

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 514.174.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-138-154

О числе изоэдральных полимино

А. В. Шутов, А. А. Мокрова

Шутов Антон Владимирович — доктор физико-математических наук, Владимирский государственный университет им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).

e-mail: a1981@mail.ru

Мокрова Альбина Андреевна — кандидат физико-математических наук, Владимирский государственный университет им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).

e-mail: albina.mokrova@yandex.ru

Аннотация

Полимино представляет собой связную фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов, примыкающих друг к другу по сторонам. Разбиение плоскости на полимино называется изоэдральным, если группа симметрий действует на нем транзитивно, то есть если для любых двух полимино разбиения существует глобальная симметрия разбиения, переводящая одно полимино во второе.

В работе рассматривается задача о подсчете числа полимино площади n , порождающих изоэдральные разбиения плоскости. Показано, что число таких полимино не превосходит $C(\varepsilon)n^4(\omega + \varepsilon)^n$, где ω - константа связности квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$. Известно, что $\omega < 2.7$. Подобные оценки получены также в случае, когда фиксирован периметр, а не площадь полимино. Кроме того, аналогичная оценка справедлива и для числа самих изоэдральных разбиений плоскости при дополнительном условии регулярности разбиений.

Ранее аналогичные результаты были получены в случае решетчатых разбиений плоскости на полимино, для так называемых $p2$ -разбиений, а также для решетчатых разбиений на центрально-симметричные полимино.

Доказательство основано на критерии существования изоэдрального разбиения плоскости на полимино, полученного Лангерманом и Винслоу, а также на подсчете числа самонепересекающихся случайных блужданий на решетке $\mathbb{Z}^2$, как стандартных, так и обладающих заданной группой симметрии.

В заключении кратко обсуждаются возможные направления дальнейших исследований и некоторые открытые проблемы.

Ключевые слова: полимино, изоэдральные полимино, разбиения плоскости, критерии изоэдральности.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

А. В. Шутов, А. А. Мокрова О числе изоэдральных полимино // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 138–154.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 514.174.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-138-154

On the number of isohedral polyominoes

A. V. Shutov, A. A. Mokrova

Shutov Anton Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs (Vladimir).

e-mail: a1981@mail.ru

Mokrova Albina Andreevna — candidate of physical and mathematical sciences, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs (Vladimir).

e-mail: albina.mokrova@yandex.ru

Abstract

A polyomino is a connected figure on a plane composed from a finite number of unit squares adjacent to each other on the sides. A tiling of a plane into polyominoes is called isohedral if the symmetry group acts transitively on it, that is, if for any two polyominoes of the tiling there is a global symmetry of the tiling that moves one polyomino into the second.

The paper considers the problem of counting the number of polyominoes of area n that generate isohedral tilings of the plane. It is shown that the number of such polyominoes does not exceed $C(\varepsilon)n^4(\omega + \varepsilon)^n$, where ω is the connective constant of the square lattice $\mathbb{Z}^2$. It is known that $\omega < 2.7$. Similar estimates were also obtained in the case where the perimeter rather than the area of the polyomino is fixed. In addition, a similar estimate is valid for the number of isohedral tilings of the plane themselves under the additional condition of regularity of the tilings

Previously, similar results were obtained in the case of lattice tilings of the plane into polyominoes, for the so-called $p2$ -tilings splits, as well as for lattice tilings into centrally symmetric polyominoes.

The proof is based on the criteria for the existence of an isohedral tiling of the plane into polyominoes obtained by Langerman and Winslow, as well as on counting the number of self-avoiding random walks on the lattice $\mathbb{Z}^2$, both standard and with a given symmetry group.

In conclusion, possible directions for further research and some open problems are briefly discussed.

Keywords: polyominoes, isohedral polyominoes, plane tilings, isohedrality criteria.

Bibliography: 30 titles.

For citation:

A. V. Shutov, A. A. Mokrova, 2024, “On the number of isohedral polyominoes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 138–154.

1. Введение

Полимино, как известно, представляет собой фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов (клеток), которая сильно связна, то есть из любой клетки в любую другую клетку этого полимино можно попасть, переходя по общим сторонам смежных клеток.

Это понятие и сам термин полимино были введены в 1953 году С. В. Голомбом [1], [2].

Среди многочисленных задач, связанных с полимино, практически сразу начали изучаться задачи, связанные с разбиениями плоскости на полимино. В частности, еще Гарднером [3] перечислены все полимино, разбивающие плоскость, с числом клеток, не превосходящим семи.

Исследования, посвященные разбиениям плоскости на полимино, можно условно разделить на следующие группы:

- 1) Перечисление полимино с малым числом клеток, разбивающих плоскость [4], [6], [5] [7].
- 2) Изучение числа различных разбиений плоскости на одно полимино [8], [9].
- 3) Алгоритмы перечисления специальных разбиений плоскости на полимино [10], [11], [12], [13].
- 4) Алгоритмы, проверяющие существование разбиений плоскости на полимино [14], [15], [16], [17], [18].
- 5) Оценки и асимптотические формулы для числа специальных разбиений плоскости на полимино [19], [20], [21], [22], [23].

Разумеется, приведенный список не претендует на полноту.

Отметим, что в настоящее время неизвестно ни одного алгоритма, позволяющего определить, дает ли заданное полимино разбиение плоскости [24]. Поэтому наибольший интерес в настоящее время сконцентрирован на изучении специальных классов разбиений плоскости на полимино, таких как решетчатые, $p2$ - и $p4$ -разбиения, а также изоэдральные разбиения.

Напомним, что разбиение плоскости называется изоэдральным, если для любых двух тайлов разбиения существует глобальная симметрия разбиения, переводящая один тайл во второй.

Впервые изоэдральные разбиения были упомянуты еще Гильбертом [25]. Интерес к изоэдральным разбиением вызван тем, что они представляют собой наиболее обширный из поддающихся изучению класс разбиений, а также в связи с их важностью для кристаллографии.

Классификация изоэдральных разбиений обычно приписывается Грюнбауму и Шеппарду [26], хотя фактически она была получена еще Хеешем и Кинцлом [27]. В [27] содержится также критерий, позволяющий выяснить, порождает ли заданная фигура изоэдральное разбиение плоскости. Интересно, что многие частные случаи этого критерии многократно переоткрывались впоследствии. Наиболее яркий пример - знаменитый критерий Конвея [3], [28]. В случае полимино критерий из [27] может быть значительно упрощен, так как не все группы симметрий реализуются в разбиениях плоскости на полимино. В частности, разбиение плоскости на полимино не может иметь поворотной симметрии третьего и шестого порядков. Данное упрощение позволило построить эффективные алгоритмы, позволяющие выяснить, порождает ли заданное полимино изоэдральное разбиение плоскости [17], [18].

Будем называть полимино изоэдральным, если оно порождает хотя бы одно изоэдральное разбиение плоскости. В настоящей работе мы на основе критерия из [18] получим оценку для числа изоэдральных полимино из n клеток.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T(n)$ — общее число изоэдральных полимино площади n . Тогда

$$T(n) \ll_{\varepsilon} (2,7 + \varepsilon)^n n^4.$$

Запись

$$f(n) \ll_{\varepsilon} g_{\varepsilon}(n),$$

означает, что существует $C(\varepsilon)$ такая, что $f(n) \leq C(\varepsilon)g_{\varepsilon}(n)$ для всех n . Здесь $f(n)$ — некоторая функция, $g_{\varepsilon}(n)$ — семейство функций, зависящих от ε .

2. Некоторые вспомогательные результаты

В данном разделе мы изложим некоторые вспомогательные результаты о числе несамопересекающихся ломаных на квадратной решетке.

Пусть $m(l)$ — число самонепересекающихся ломанных длины l на квадратной решетке (*self-avoiding walks*), $m_c(l)$ — число самонепересекающихся центрально симметричных ломанных длины l , $m_{\pi/2}(l)$ — число самонепересекающихся ломанных, обладающих следующим свойством: ломаную можно разделить на две половины, каждая из которых эквивалентна другой повернутой на угол $\frac{\pi}{2}$ (очевидно, что центры таких ломанных лежат в вершинах квадратной решетки).

ЛЕММА 1. Для числа $m(l)$ самонепересекающихся ломанных длины l на квадратной решетке существует предел $\omega = \lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{m(l)}$ [29].

Постоянную ω называют константой связности квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$.

ЛЕММА 2. Для $m(l)$ $\omega \leq 2,7$ [29].

ЛЕММА 3. Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $m(l) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 получаем, для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon)$ такая, что $m(l) \leq C(\varepsilon)(\omega + \varepsilon)^l$. Учитывая введенные обозначения, лемма доказана.

Самонепересекающаяся центрально симметричная ломаная полностью определяется своей половиной. Отсюда имеем.

ЛЕММА 4.

$$m_c(l) = \begin{cases} m(l/2), l - \text{четно}; \\ m((l+1)/2), l - \text{нечетно}. \end{cases}$$

Непосредственно из лемм 3 и 4 получаем.

ЛЕММА 5. $m_c(l) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^{l/2}$.

Из определения полимино, следует, что ломаная, задающая границу полимино, может изгибаться под углом $\frac{\pi}{2}$ только в вершине квадратной решетки, из чего немедленно получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 6.

$$m_{\pi/2}(l) = \begin{cases} m(l/2), l - \text{четно}; \\ 0, l - \text{нечетно}. \end{cases}$$

3. Критерий изоэдральности

В данном мы изложим критерий того, что полимино порождает изоэдральное разбиение плоскости. Данный критерий был получен в работе [18], где он сформулирован на языке комбинаторики слов. Мы будем использовать более геометрическую формулировку критерия.

Данный критерий состоит из 7 независимых критериев, каждый из которых на самом деле отвечает за существование изоэдрального разбиения с конкретной группой симметрии.

Будем использовать обозначения $v_i v_j$, $i, j = 1, 2, \dots, 6$, для самонепересекающейся ломаной, задающей часть границы полимино. Также пусть f_{Θ} — композиция параллельного переноса и отражения относительно горизонтальной оси, а f_{Φ} — композиция параллельного переноса и отражения относительно вертикальной оси.

Критерий 1. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на шесть частей точками $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, по крайней мере три из них различны, причем существуют параллельные переносы s_1, s_2, s_3 для которых $s_1(v_1) = v_5, s_1(v_2) = v_4$, переводящий ломаную $v_1 v_2$ в ломаную $v_5 v_4$, $s_2(v_2) = v_6, s_2(v_3) = v_5$, переводящий ломаную $v_2 v_3$ в ломаную $v_6 v_5$, $s_3(v_3) = v_1, s_3(v_4) = v_6$, переводящий ломаную $v_3 v_4$ в ломаную $v_1 v_6$.

Критерий 2. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на шесть частей точками $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, по крайней мере три из них различны, причем существует параллельный перенос s_4 для которого $s_4(v_1) = v_5, s_4(v_2) = v_4$, переводящий ломаную v_1v_2 в ломаную v_5v_4 , а ломаные $v_2v_3, v_3v_4, v_5v_6, v_6v_1$ центрально-симметричны.

Критерий 3. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на три части точками v_1, v_2, v_3 , причем ломаные v_1v_2, v_2v_3 можно разделить на две половины, каждая из которых эквивалентна другой повернутой на угол $\frac{\pi}{2}$, а ломаная v_3v_1 центральносимметрична.

Критерий 4. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на шесть частей точками $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, по крайней мере три из них различны, причем существует параллельный перенос s_5 для которого $s_5(v_1) = v_5, s_5(v_2) = v_4$, переводящий ломаную v_1v_2 в ломаную v_5v_4 , существует преобразование f_Θ , для которого $f_\Theta(v_2) = v_4, f_\Theta(v_3) = v_3$, переводящее ломаную v_2v_3 в ломаную v_4v_3 , существует преобразование f_Φ , для которого $f_\Phi(v_5) = v_6, f_\Phi(v_6) = v_1$, переводящее ломаную v_5v_6 в ломаную v_6v_1 .

Критерий 5. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на шесть частей точками $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, по крайней мере три из них различны, причем существует параллельный перенос s_6 для которого $s_6(v_1) = v_5, s_6(v_2) = v_4$, переводящий ломаную v_1v_2 в ломаную v_5v_4 , существует преобразование f_Θ , для которого $f_\Theta(v_2) = v_1, f_\Theta(v_3) = v_6$, переводящее ломаную v_2v_3 в ломаную v_1v_6 , существует преобразование f_Φ , для которого $f_\Phi(v_3) = v_6, f_\Phi(v_4) = v_5$, переводящее ломаную v_3v_4 в ломаную v_6v_5 .

Критерий 6. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на шесть частей точками $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, по крайней мере три из них различны, причем существует параллельный перенос s_7 для которого $s_7(v_1) = v_5, s_7(v_2) = v_4$, переводящий ломаную v_1v_2 в ломаную v_5v_4 , ломаные v_2v_3, v_3v_4 — центрально-симметричны, существует преобразование f_Φ , для которого $f_\Phi(v_5) = v_6, f_\Phi(v_6) = v_1$, переводящее ломаную v_5v_6 в ломаную v_6v_1 .

Критерий 7. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на шесть частей точками $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, причем ломаные v_1v_2, v_3v_4 — центрально-симметричны, существует преобразование f_Θ , для которого $f_\Theta(v_2) = v_5, f_\Theta(v_3) = v_6$, переводящее ломаную v_2v_3 в ломаную v_5v_6 , существует преобразование f_Φ , для которого $f_\Phi(v_4) = v_6, f_\Phi(v_5) = v_1$, переводящее ломаную v_4v_5 в ломаную v_6v_1 .

ТЕОРЕМА 2. *Полимино является изоэдральным тогда и только тогда, когда его граница удовлетворяет хотя бы одному из критериев 1-7.*

Каждое разбиение границы из критериев 1-7 порождает разбиение плоскости. Способ построения этого разбиения описан в [18]. Разбиение плоскости, полученное из разбиения границы, удовлетворяющего i -тому критерию удобно называть разбиением i -того типа, $i = 1, 2, \dots, 7$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Разбиения первого типа это решетчатые разбиения, а разбиения второго типа это $p2$ -разбиения. В работах [21] и [22] для числа соответствующих разбиений были получены оценки, представленные в теоремах 3 и 4 соответственно.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Если полимино обладает нетривиальной группой симметрии, то для него может существовать разбиение границы, удовлетворяющее нескольким критериям одновременно. Поэтому тип разбиения, вообще говоря, определен не однозначно. Кроме того, полимино может породить несколько разбиений одного типа.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. *Обычно условия критерия Конвея (критерий 2) формулируются следующим образом. «Две противоположных ломаных, a и d , — “параллельны” в том смысле, что они конгруэнтны и находятся в одной ориентации. Каждая из четырех других ломаных b ,*

c , e и f центросимметрично; то есть они не изменяются поворотом на 180° вокруг средней точки. ... Любое из шести ребер может быть пустым (несуществующим).» [30] В работе [30] приведен контрпример (рисунок 1). На ранее опубликованные в работах [21], [22], [23] доказательства формулировка критерия не влияет.

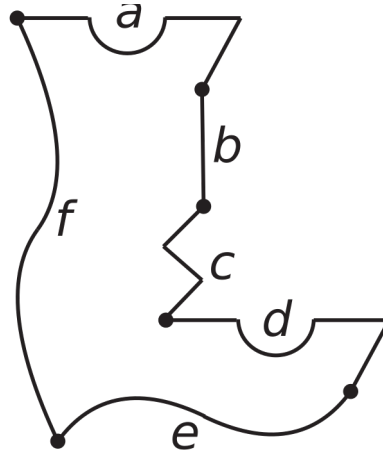


Рис. 1: Контрпример для критерия Конвея

4. Число изоэдральных разбиений плоскости на полимино с заданным полупериметром

Вначале получим оценку для числа изоэдральных полимино в терминах не площади, а полупериметра.

Пусть $t(p)$ — число изоэдральных полимино полупериметра p . Отметим, что данное число, очевидно, не превосходит числа разбиений изоэдральных разбиений плоскости на такие полимино.

При этом на самом деле достаточно ограничиться подсчетом числа разбиений некоторого специального вида, а именно регулярных изоэдральных разбиений. Разбиение плоскости на полимино будем называть регулярным, если любые два полимино разбиения граничат по целому числу клеток целочисленной решетки. Известно [18], что если существует изоэдральное разбиение плоскости на полимино, то существует и регулярное изоэдральное разбиение плоскости на то же самое полимино.

Отметим, что каждому разбиению границы полимино из критериев 1–7 соответствует некоторое изоэдральное разбиение плоскости на полимино. Если ломаные, определяющие разбиение, состоят из отрезков единичной длины, полученное разбиение будет регулярным.

Пусть $t_i(p)$ — число регулярных изоэдральных разбиений типа i ($1 \leq i \leq 7$) на полимино полупериметра p . Эквивалентно, $t_i(p)$ — число способов разбить границы всех полимино полупериметра p на ломаные, состоящие из отрезков единичной длины, и удовлетворяющие i -ому критерию.

В силу сказанного выше, выполняется неравенство

$$t(p) \leq \sum_{i=1}^7 t_i(p).$$

Наша следующая цель состоит в получении верхних оценок для $t_i(p)$ для всех i .

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо неравенство*

$$t_1(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^2. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо неравенство*

$$t_2(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^4. \quad (2)$$

Примеры разбиения границы полимино на части в случае разбиений первого и второго типа представлены на рисунках 2 и 3 соответственно. Концы ломаных, составляющих границу полимино, здесь и далее для удобства отмечены точками.

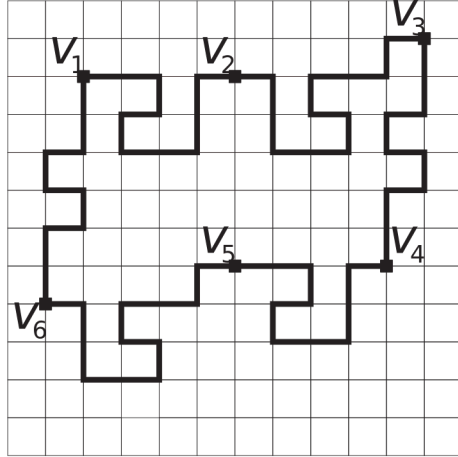


Рис. 2: Пример полимино 1 типа

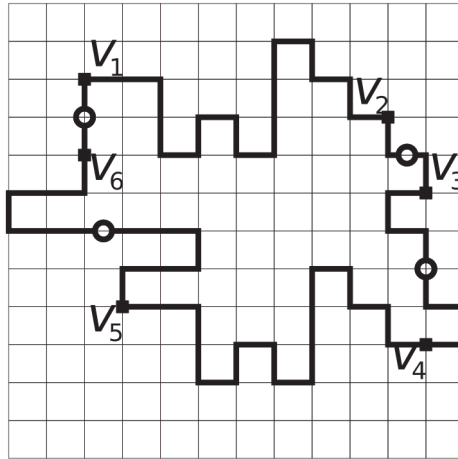


Рис. 3: Пример полимино 2 типа

Теоремы 3 и 4 доказаны в работах [21] и [22] соответственно.

ТЕОРЕМА 5. *Справедливо неравенство*

$$t_3(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^2. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для полупериметра полимино, порождающего регулярное разбиение третьего типа, справедливо равенство

$$p = \frac{1}{2}l_{v_1v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_1}. \quad (4)$$

Учитывая леммы 1 — 6, имеем

$$\begin{aligned}
 t_3(p) &\leq \sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_1} = p} m_{\pi/2}(l_{v_1v_2})m_{\pi/2}(l_{v_2v_3})m_c(l_{v_3v_1}) \ll_{\varepsilon} \\
 &\ll_{\varepsilon} \sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_1} = p} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2}l_{v_1v_2}} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2}l_{v_2v_3}} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2}l_{v_3v_1}} \ll_{\varepsilon} \\
 &\ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p \sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_1} = p} 1,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $\sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_1} = p} 1$ — число решений уравнения (4) и $\sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_1} = p} 1 \ll_{\varepsilon} p^2$. Тогда из (5) получаем (3). Теорема доказана.

Пример полимино, порождающего разбиение третьего типа, представлен на рисунке 4.

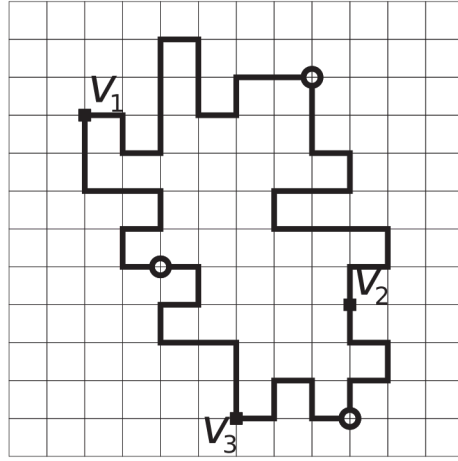


Рис. 4: Пример полимино 3 типа

ТЕОРЕМА 6. *Справедливо неравенство*

$$t_4(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^2. \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Полупериметр полимино, порождающего разбиение четвертого типа, вычисляется как

$$p = l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + l_{v_5v_6}. \tag{7}$$

Учитывая леммы 1 — 4, имеем

$$\begin{aligned}
 t_4(p) &\leq \sum_{l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + l_{v_5v_6} = p} m(l_{v_1v_2})m(l_{v_2v_3})m(l_{v_5v_6}) \ll_{\varepsilon} \\
 &\ll_{\varepsilon} \sum_{l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + l_{v_5v_6} = p} \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_1v_2}} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_2v_3}} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_5v_6}} \ll_{\varepsilon} \\
 &\ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p \sum_{l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + l_{v_5v_6} = p} 1,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $\sum_{l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + l_{v_5v_6} = p} 1$ — число решений уравнения (7) и $\sum_{l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + l_{v_5v_6} = p} 1 \ll_{\varepsilon} p^2$. Тогда из (8) получаем (6). Теорема доказана.

Пример полимино, порождающего разбиение четвертого, типа представлен на рисунке 5.

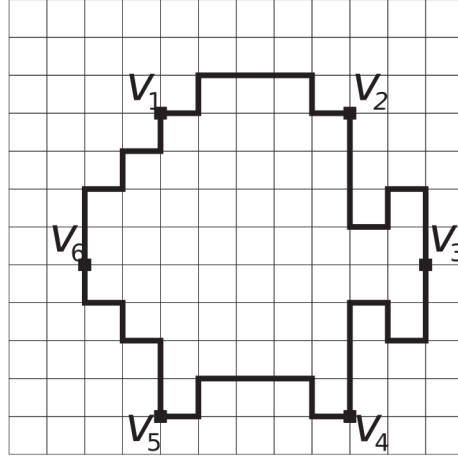


Рис. 5: Пример полимино 4 типа

ТЕОРЕМА 7. *Справедливо неравенство*

$$t_5(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^2. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Полупериметр полимино, порождающего разбиение пятого типа, равен

$$p = l_{v_1 v_2} + l_{v_2 v_3} + l_{v_3 v_4}. \quad (10)$$

Учитывая леммы 1 — 4, имеем

$$\begin{aligned} t_5(p) &\leq \sum_{l_{v_1 v_2} + l_{v_2 v_3} + l_{v_3 v_4} = p} m(l_{v_1 v_2}) m(l_{v_2 v_3}) m(l_{v_3 v_4}) \ll_{\varepsilon} \\ &\ll_{\varepsilon} \sum_{l_{v_1 v_2} + l_{v_2 v_3} + l_{v_3 v_4} = p} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_1 v_2}} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_2 v_3}} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_3 v_4}} \ll_{\varepsilon} \\ &\ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p \sum_{l_{v_1 v_2} + l_{v_2 v_3} + l_{v_3 v_4} = p} 1, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\sum_{l_{v_1 v_2} + l_{v_2 v_3} + l_{v_3 v_4} = p} 1$ — число решений уравнения (10) и $\sum_{l_{v_1 v_2} + l_{v_2 v_3} + l_{v_3 v_4} = p} 1 \ll_{\varepsilon} p^2$. Тогда из (11) получаем (9). Теорема доказана.

Пример полимино, порождающего разбиение пятого типа, представлен на рисунке 6.

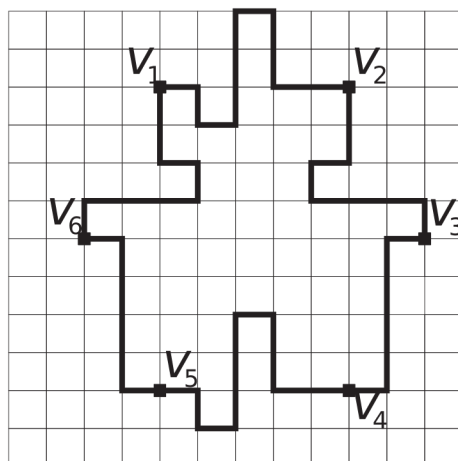
ТЕОРЕМА 8. *Справедливо неравенство*

$$t_6(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^3. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Полупериметр полимино, порождающего разбиение шестого типа, равен

$$p = l_{v_1 v_2} + \frac{1}{2} l_{v_2 v_3} + \frac{1}{2} l_{v_3 v_4} + l_{v_5 v_6}. \quad (13)$$



Учитывая леммы 1 — 5, имеем

$$\begin{aligned}
t_6(p) &\leq \sum_{l_{v_1 v_2} + \frac{1}{2} l_{v_2 v_3} + \frac{1}{2} l_{v_3 v_4} + l_{v_5 v_6} = p} m(l_{v_1 v_2}) m_c(l_{v_2 v_3}) m_c(l_{v_3 v_4}) m(l_{v_5 v_6}) \ll_{\varepsilon} \\
&\ll_{\varepsilon} \sum_{l_{v_1 v_2} + \frac{1}{2} l_{v_2 v_3} + \frac{1}{2} l_{v_3 v_4} + l_{v_5 v_6} = p} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_1 v_2}} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2} l_{v_2 v_3}} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2} l_{v_3 v_4}} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_5 v_6}} \ll_{\varepsilon} \\
&\ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p \sum_{l_{v_1 v_2} + \frac{1}{2} l_{v_2 v_3} + \frac{1}{2} l_{v_3 v_4} + l_{v_5 v_6} = p} 1,
\end{aligned} \tag{14}$$

где $\sum_{l_{v_1 v_2} + \frac{1}{2} l_{v_2 v_3} + \frac{1}{2} l_{v_3 v_4} + l_{v_5 v_6} = p} 1$ — число решений уравнения (13) и

$$\sum_{l_{v_1}v_2+\frac{1}{2}l_{v_2}v_3+\frac{1}{2}l_{v_3}v_4+l_{v_5}v_6=p} 1 \ll_{\varepsilon} p^3.$$

Тогда из (14) получаем (12). Теорема доказана.

Пример полимино, порождающего разбиение шестого типа, представлен на рисунке 7.

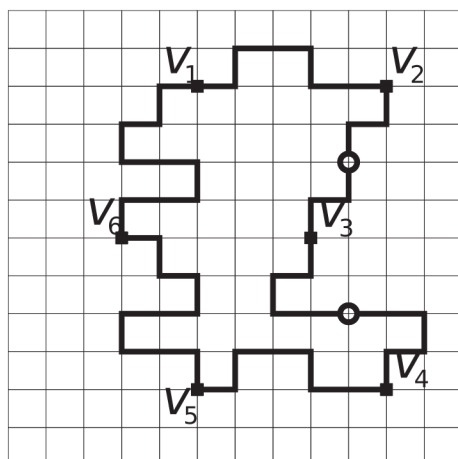


Рис. 7: Пример полимино 6 типа

ТЕОРЕМА 9. *Справедливо неравенство*

$$t_7(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^3. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Полупериметр полимино, порождающего разбиение седьмого типа, равен

$$p = \frac{1}{2}l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_4} + l_{v_4v_5}. \quad (16)$$

Учитывая леммы 1 — 5, имеем

$$\begin{aligned} t_7(p) &\leq \sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_4} + l_{v_4v_5} = p} m_c(l_{v_1v_2})m(l_{v_2v_3})m_c(l_{v_3v_4})m(l_{v_4v_5}) \ll_{\varepsilon} \\ &\ll_{\varepsilon} \sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_4} + l_{v_4v_5} = p} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2}l_{v_1v_2}} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_2v_3}} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2}l_{v_3v_4}} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_4v_5}} \ll_{\varepsilon} \\ &\ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p \sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_4} + l_{v_4v_5} = p} 1, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_4} + l_{v_4v_5} = p} 1$ — число решений уравнения (16) и

$$\sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_4} + l_{v_4v_5} = p} 1 \ll_{\varepsilon} p^3.$$

Тогда из (17) получаем (15). Теорема доказана.

Пример полимино, порождающего разбиение седьмого типа, представлен на рисунке 8.

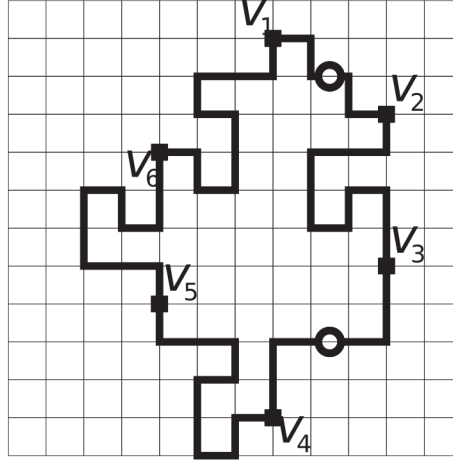


Рис. 8: Пример полимино 7 типа

5. Результаты

Обобщим результаты теорем 3 — 9.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $t_i(p)$ — число регулярных изоздральных разбиений плоскости на полимино типа i с полупериметром p , $i = 1, 2, \dots, 7$. Верхняя оценка числа таких разбиений для каждого типа полимино определяется одним из неравенств

$$\begin{cases} t_i(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^2, & \text{при } i = 1, 3, 4, 5; \\ t_i(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^4, & \text{при } i = 2; \\ t_i(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^3, & \text{при } i = 6, 7. \end{cases} \quad (18)$$

Таким образом для числа изоэдральных полимино заданного полупериметра имеем оценку

$$t(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^4.$$

Данная оценка справедлива также для числа регулярных изоэдральных разбиений плоскости на полимино заданного полупериметра.

Перейдем к площади. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $T_i(n)$ — число регулярных изоэдральных разбиений плоскости на полимино типа i площади n , $i = 1, 2, \dots, 7$. Верхняя оценка числа таких разбиений для каждого типа полимино определяется одним из неравенств

$$\begin{cases} T_i(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^2, & \text{при } i = 1, 3, 4, 5; \\ T_i(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^4, & \text{при } i = 2; \\ T_i(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^3, & \text{при } i = 6, 7. \end{cases} \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки для разбиений порожденных полимино первого и второго типа получены в работах [21] и [22].

Методом математической индукции можно получить неравенство связывающее полупериметр p полимино и его площадь n : $2p \leq 2n + 2$. Тогда для получения верхней оценки числа изоэдральных разбиений плоскости на полимино заданной площади $T(n)$ просуммируем оценки (18) для случаев 1, 3, 4 и 5, полученные для числа изоэдральных разбиений на полимино с полупериметром p от 1 до $n + 1$: $T_i(n) \leq \sum_1^{n+1} t(p) \ll_{\varepsilon} \sum_1^{n+1} (\omega + \varepsilon)^p p^2$. Заменяя последнюю сумму на интеграл $\int_1^{n+2} C(\varepsilon)(\omega + \varepsilon)^x x^2 dx$ и учитывая, что $\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax}(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3})$, получаем

$$T_i(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^2. \quad (20)$$

Для случаев 6, 7 просуммируем оценки (18) от 1 до $n + 1$: $T_i(n) \leq \sum_1^{n+1} t(p) \ll_{\varepsilon} \sum_1^{n+1} (\omega + \varepsilon)^p p^3$. Заменяя последнюю сумму на интеграл $\int_1^{n+2} C(\varepsilon)(\omega + \varepsilon)^x x^3 dx$ и учитывая, что $\int x^3 e^{ax} dx = e^{ax}(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4})$, получаем

$$T_i(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^3. \quad (21)$$

Для случая 2 просуммируем оценки (18) от 1 до $n + 1$: $T_i(n) \leq \sum_1^{n+1} t(p) \ll_{\varepsilon} \sum_1^{n+1} (\omega + \varepsilon)^p p^4$. Заменяя последнюю сумму на интеграл $\int_1^{n+2} C(\varepsilon)(\omega + \varepsilon)^x x^4 dx$ и учитывая $\int x^4 e^{ax} dx = e^{ax}(\frac{x^4}{a} - \frac{4x^3}{a^2} + \frac{12x^2}{a^3} - \frac{24x}{a^4} + \frac{24}{a^5})$, получаем

$$T_i(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^4. \quad (22)$$

Обобщив формулы (20) — (22), получим (19). Теорема доказана.

Окончательно имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $T(n)$ — общее число изоэдральных полимино площади n . Верхняя оценка общего числа таких разбиений определяется неравенством

$$T(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^4. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат немедленно вытекает из предыдущей теоремы и неравенства

$$T(n) \leq \sum_{i=1}^7 T_i(n).$$

Отметим, что аналогичная оценка также имеет место для числа регулярных изоэдральных разбиений плоскости на полимино площади n .

6. Заключение

В работе получена оценка для числа $T(n)$ полимино, порождающих изоэдральные разбиения плоскости. Эта оценка имеет порядок $C(\varepsilon)n^4(\omega + \varepsilon)^n$. Близкие по порядку (точнее отличающиеся на полиномиальный множитель) оценки ранее были получены Шутовым и Коломейкиной для более узких классов разбиений. Отметим, что лучшая на данный момент нижняя оценка для $T(n)$ получена в работе [21] и имеет порядок $T(n) \geq c2^n$. Было бы крайне интересно преодолеть или хотя бы уменьшить разрыв между верхней и нижней оценкой, однако эта задача представляется крайне сложной и требующей привлечения принципиально новых идей.

Еще более сложной представляется задача расширения результатов работы на другие классы разбиений. В частности, известны примеры так называемых анизотрапальных полимино, то есть полимино, порождающих исключительно неизоэдральные разбиения плоскости, однако не известно каких-либо достаточно общих критериев существования таких разбиений. Также остается открытым вопрос о существовании полимино, порождающего только непериодические разбиения плоскости.

Более перспективной представляется задача обобщения представленных результатов на полигексы и полиамонды, то есть на фигуры, составленные из правильных шестиугольников и треугольников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Golomb S. W. Checker boards and polyominoes // American Mathematical Monthly. 1954. Vol. 61. P. 672–682.
2. Голлоб С.В. Полимино М.: Мир. 1975. 207 с.
3. Gardner M. More about tiling the plane: the possibilities of polyominoes, polyiamonds, and polyhexes // Scientific American. 1975. P. 112–115.
4. Rhoads G. C. Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. Vol. 174. P. 329–353.
5. Rawsthorne D. Tiling complexity of small n-ominoes ($n < 10$) // Discrete Math. 1988. Vol. 70, no. 1. P. 71–75
6. Rhoads G. C. Planar Tilings and the Search for an Aperiodic Prototile. PhD dissertation. Rutgers University. 2003.
7. Myers J. Polyomino, polyhex and polyiamond tiling. Available at: <https://www.polyomino.org.uk/mathematics/polyform-tiling/>
8. Fontaine A., Martin G. Polymorphic polyominoes // Math. Mag. 1984. Vol. 57, no. 5. P. 275–283.

9. Kazuyuki A., Yoshinobu H. On the number of p4-tilings by an n -omino // *Internat. J. Comput. Geom. Appl.* 2018. Vol. 29, no. 1. P. 3–19.
10. Малеев А. В. Алгоритм и компьютерная программа перебора вариантов упаковок полимино в плоскости // *Кристаллография.* 2013. Т. 58. Вып. 5. С. 749–756.
11. Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G. Schattschneider D. A method to generate polyominoes and polyiamonds for tilings with rotational symmetry // *Graphs and Combinatorics.* 2007. Vol. 23, Supplement 1. P. 259–267.
12. Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G. Schattschneider D. Enumeration of polyominoes, polyiamonds and polyhexes for isohedral tilings with rotational symmetry // *Computational Geometry and Graph Theory - International Conference. KyotoCGGT.* Kyoto, Japan. June 11–15, 2007. Revised Selected Papers. Springer. P. 68–78.
13. Horiyama T., Samejima M. Enumeration of polyominoes for p4 tiling // *Proc. 21st Canadian Conf. Computational Geometry. CCCG, 2009.* P. 29–32.
14. Beauquier D., Nivat M. On translating one polyomino to tile the plane // *Discrete Comput. Geom.* 1991. Vol. 6, no. 6. P. 575–592.
15. Brlek S., Provencal X., Fedou J.-M. On the tiling by translation problem // *Discrete Applied Mathematics.* 2009. Vol. 157, no. 3, P. 464–475.
16. Gambini I. Vuillon L. An algorithm for deciding if a polyomino tiles the plane by translations // *RAIRO Theoretical Informatics and Applications.* 2007. Vol. 41, no. 2. P. 147–155.
17. Keating K., Vince A. Isohedral polyomino tiling of the plane // *Discrete Comput. Geom.* 1999. Vol. 21, no. 4. P. 615–630.
18. Lanngerman S., Winslow A. A Quasilinear-Time Algorithm for Tiling the Plane Isohedrally with a Polyomino // *Proc. of 32nd International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2016).* 2016. P. 50:1–50:15.
19. Brlek S., Frosini A., Rinaldi S. Vuillon L. Tilings by translation: enumeration by a rational language approach // *The electronic journal of combinatorics.* 2006. Vol. 13. P. 15.
20. Малеев А. В., Шутов А. В. О числе трансляционных разбиений плоскости на полимино // *Труды IX Всероссийской научной школы “Математические исследования в естественных науках”.* Апатиты. 2013. С. 101–106.
21. Шутов А. В., Коломейкина Е. В. Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади // *Моделирование и анализ информационных систем.* 2013. Т. 20. Вып. 5. С. 148–157.
22. Шутов А. В., Коломейкина Е. В. Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади // *Моделирование и анализ информационных систем.* 2015. Т. 22. Вып. 2. С. 295–303.
23. Шутов А. В., Коломейкина Е. В. Оценка числа p2-разбиений плоскости на полимино заданной площади // *Чебышевский сборник.* 2016. Т. 17. Вып. 3. С. 204–214.
24. Goodman-Strauss C. Can’t decide? undecide! // *Notices of the American Mathematical Society.* 2010. Vol. 57(3). P. 343–356.

25. Hilbert D. Mathematical problems // Bulletin of the American Mathematical Society. 1902. Vol. 8(10). P. 437-479.
26. Grunbaum B., Shephard G.C. The eighty-one types of isohedral tilings in the plane // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1977. Vol. 82(2). P. 177-196.
27. Heesch H., Kienzle O. Flachenschluss: System der Formen luckenlos aneinanderschliessender Flachteile. Springer. 1963.
28. Schattschneider D. Will it tile? try the Conway criterion! // Mathematics Monthly. 1980. Vol. 53(4). P. 224-233.
29. Bauerschmidt R., Duminil-Copin H., Goodman J., Slade G. "Lectures on selfavoiding walks", Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions // Clay Mathematics Proceedings. 2010. Vol. 15. P. 395-476.
30. Schattschneider D. John Conway, Tilings, and Me! // Mathematical Intelligencer. 1921. Vol. 43(2). P. 124-129.

REFERENCES

1. Golomb S. W. 1954, "Checker boards and polyominoes", *American Mathematical Monthly*, vol. 61, pp. 672-682. (<https://doi.org/10.2307/2307321>)
2. Golomb S. W. 1994, "Polyominoes, 2nd edition", *Princeton University Press, New Jercey*, 196 p. (<https://doi.org/10.1515/9780691215051>)
3. Gardner M. 1975, "More about tiling the plane: the possibilities of polyominoes, polyiamonds, and polyhexes", *Scientific American*, pp 112-115. (<https://doi.org/10.1038/scientificamerican0875-112>)
4. Rhoads G. C. 2005, "Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds" *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 174, pp. 329-353. (<https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.05.002>)
5. Rhoads G. C. 2003, "Planar Tilings and the Search for an Aperiodic Prototile", *PhD dissertation, Rutgers University*.
6. Rawsthorne D. 1988, "Tiling complexity of small n-ominoes ($n < 10$)", *Discrete Math.*, vol. 70, no. 1, pp. 71-75. ([https://doi.org/10.1016/0012-365X\(88\)90081-7](https://doi.org/10.1016/0012-365X(88)90081-7))
7. Myers J. 2016, "Polyomino, polyhex and polyiamond tiling", Available at: <https://www.polyomino.org.uk/mathematics/polyform-tiling/>
8. Fontaine A. & Martin G. 1984, "Polymorphic polyominoes", *Math. Mag.*, vol. 57, no. 5, pp. 275-283. (<https://doi.org/10.1080/0025570X.1984.11977126>)
9. Kazuyuki A. & Yoshinobu H. 2018, "On the number of p4-tilings by an n -omino", *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, vol. 29, no. 1, pp. 3-19. (<https://doi.org/10.1142/S0218195919400016>)
10. Maleev A. V. 2013, "Algorithm and computer-program search for variants of polyomino packings in plane", *Kristallografija*, vol. 58, no. 5, pp. 749-756. (<https://doi.org/10.7868/S0023476113040140>)

11. Fukuda H. & Mutoh N. & Nakamura G. & Schattschneider D. 2007, “A method to generate polyominoes and polyiamonds for tilings with rotational symmetry”, *Graphs and Combinatorics*, vol. 23, no. 1, pp. 259–267. (<https://doi.org/10.1007/s00373-007-0719-y>)
12. Fukuda H. & Mutoh N. & Nakamura G. & Schattschneider D. 2008, “Enumeration of polyominoes, polyiamonds and polyhexes for isohedral tilings with rotational symmetry”, *Computational Geometry and Graph Theory - International Conference, KyotoCGGT 2007, Kyoto, Japan, June 11–15, 2007. Revised Selected Papers, Springer*, pp. 68–78. (https://doi.org/10.1007/978-3-540-89550-3_7)
13. Horiyama T. & Samejima M. 2009, “Enumeration of polyominoes for p4 tiling”, *Proc. 21st Canadian Conf. Computational Geometry (CCCG 2009)*, pp. 29–32.
14. Beauquier D. & M. Nivat M. 1991, “On translating one polyomino to tile the plane”, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 6, no. 6, pp. 575–592. (<https://doi.org/10.1007/BF02574705>)
15. Brlek S. & Provencal X & Fedou J.-M. 2009, “On the tiling by translation problem”, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 157, no. 3, pp. 464–475. (<https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.05.026>)
16. Gambini I. & Vuillon L. 2007, “An algorithm for deciding if a polyomino tiles the plane by translations”, *RAIRO Theoretical Informatics and Applications*, vol. 41, no. 2, pp. 147–155. (<https://doi.org/10.1051/ita:2007012>)
17. Keating K. & Vince A. 1999, “Isohedral polyomino tiling of the plane”, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 21, no. 4, pp. 615–630. (<https://doi.org/10.1007/PL00009442>)
18. Lanngerman S. & Winslow A. 2016, “A Quasilinear-Time Algorithm for Tiling the Plane Isohedrally with a Polyomino”, *Proc. of 32nd International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2016)*, vol. 50, pp. 1–50. (<https://doi.org/10.4230/LIPIcs.SocG.2016.50>)
19. Brlek S. & Frosini A. & Rinaldi S. & Vuillon L. 2006, “Tilings by translation: enumeration by a rational language approach”, *The electronic journal of combinatorics*, vol. 13, p. 15. (<https://doi.org/10.37236/1041>)
20. Maleev A. V. & Shutov A. V. 2013, “On the number of translational plane tilings by polyomino”, *Trudy IX Vserossiiskoi nauchnoi shkoly “Matematicheskie issledovaniya v estestvennykh naukah” (Proc. IX All-Russian scientific school “Mathematical Research in Natural sciences Apatity)*, pp. 101–106.
21. Shutov A. V. & Kolomeykina E. V. 2013, “The Estimation of the Number of Lattice Tilings of a Plane by a Given Area Polyomino”, *Model. Anal. Inform. Sist.*, vol. 20, no. 5, pp. 148–157. (<https://doi.org/10.18255/1818-1015-2013-5-148-157>)
22. Shutov A. V. & Kolomeykina E. V. 2015, “The estimating of the number of lattice tilings of a plane by a given area centrosymmetrical polyomino”, *Model. Anal. Inform. Sist.*, vol. 22, no. 2, pp. 295–303. (<https://doi.org/10.18255/1818-1015-2015-2-295-303>)
23. Shutov A. V. & Kolomeykina E. V. 2016, “The estimation of the number of p2-tilings of a plane by a given area polyomino”, *Chebyshevskii Sbornik.*, vol. 17, no. 3, pp. 204–214. (<https://doi.org/10.22405/2226-8383-2016-17-3-204-214>)
24. Goodman-Strauss C. 2010, “Can’t decide? undecide!”, *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 57, no. 3, pp. 343–356.

25. Hilbert D. 1902, “Mathematical problems”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 8, no. 10, pp. 437-479. (<https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1902-00923-3>)
26. Grunbaum B. & Shephard G. C. 1977, “The eighty-one types of isohedral tilings in the plane”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 82, no. 2, pp. 177–196. (<https://doi.org/10.1017/S0305004100053810>)
27. Heesch H. & Kienzle O. 1963, “Flachenschluss: System der Formen luckenlos aneinanderschliessender Flachteile”, *Springer*.
28. Schattschneider D. 1980, “Will it tile? try the Conway criterion!”, *Mathematics Monthly*, vol. 53, no. 4, pp. 224-233. (<https://doi.org/10.2307/2689617>)
29. Bauerschmidt R. & Duminil-Copin H. & Goodman J. & Slade G. 2010, “Lectures on selfavoiding walks”, *Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions. Clay Mathematics Proceedings*, vol. 15, pp. 395–476.
30. Schattschneider D. 1921, “John Conway, Tilings, and Me!”, *Mathematical Intelligencer*, vol. 43, no. 2, pp. 124–129. (<https://doi.org/10.1007/s00283-021-10062-0>)

Получено: 18.12.2023

Принято в печать: 21.03.2024