ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 519.713.2 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-116-126

О проблеме абстрактной характеризации универсальных графовых автоматов

Р. А. Фарахутдинов

Фарахутдинов Ренат Абуханович — аспирант, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (г. Саратов).
e-mail: renatfara@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена алгебраической теории автоматов, являющейся одним из разделов математической кибернетики, в котором изучаются устройства преобразования информации, возникающие во многих прикладных задачах. В зависимости от исследуемых задач рассматриваются автоматы, у которых основные множества наделены дополнительными математическими структурами, согласованными с функциями автомата. В настоящей работе исследуются автоматы над графами — графовые автоматы, множество состояний и множество выходных сигналов которых наделены математическими структурами графов. Для графов G и H универсальный графовый автомат $\mathrm{Atm}(G, H)$ является универсально притягивающим объектом в категории графовых автоматов. Полугруппа входных сигналов такого автомата имеет вид $S = \mathrm{End}\ G \times \mathrm{Hom}(G, H)$. Естественно возникает интерес к исследованию вопроса абстрактной характеризации универсальных графовых автоматов: при каких условиях абстрактный автомат A будет изоморфен универсальному графовому автомату $\mathrm{Atm}(G, H)$ над графами G из класса $\mathbf{K_1}$, H из класса $\mathbf{K_2}$? Целью работы является исследование вопроса элементарной аксиоматизации некоторых классов графовых автоматов. Доказана невозможность элементарной аксиоматизации средствами языка узкого исчисления предикатов некоторых широких классов таких автоматов над рефлексивными графами.

Ключевые слова: автомат, полугруппа, граф, абстрактная характеризация, аксиоматизация.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
Р. А. Фарахутдинов. О проблеме абстрактной характеризации универсальных графовых автоматов // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 116–126.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 1.

UDC 519.713.2 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-116-126

On the problem of abstract characterization of universal graphic automata

R. A. Farakhutdinov

Farakhutdinov Renat Abukhanovich — postgraduate student, Saratov State University (Saratov).
e-mail: renatfara@mail.ru

Abstract

This work is devoted to the algebraic theory of automata, which is one of the branches of mathematical cybernetics, which studies information transformation devices that arise in many applied problems. Depending on a specific problem, automata are considered, in which the main sets are equipped with additional mathematical structures consistent with the functions of an automaton. In this work, we study automata over graphs — graphic automata, that is, automata in which the set of states and the set of output signals are equipped with the mathematical structure of graphs. For graphs G and H universal graphic automaton $\mathrm{Atm}(G, H)$ is a universally attracting object in the category of semigroup automata. The input signal semigroup of such automaton is $S = \mathrm{End}\ G \times \mathrm{Hom}(G, H)$. Naturally, interest arises in studying the question of abstract characterization of universal graph automata: under what conditions will the abstract automaton A be isomorphic to the universal graph automaton $\mathrm{Atm}(G, H)$ over graphs G from the class $\mathbf{K_1}$, H from class $\mathbf{K_2}$? The purpose of the work is to study the issue of elementary axiomatization of some classes of graphic automata. The impossibility of elementary axiomatization by means of the language of restricted predicate calculus of some wide classes of such automata over reflexive graphs is proved.

Keywords: automaton, semigroup, graph, abstract characterization, axiomatization.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
R. A. Farakhutdinov, 2024, “On the problem of abstract characterization of universal graphic automata” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 116–126.

1. Введение

Одним из направлений современной алгебры является исследование автоматов в категориях [1], то есть автоматов у которых множества состояний и выходных сигналов наделены математическими структурами из некоторой категории $\mathbf{K}$, а функции переходов и выходов являются морфизмами этой категории. Такие алгебраические системы были предметом изучения многих известных алгебраистов, таких как Б. И. Плоткин [2], А. Г. Пинус [3, 4], Л. М. Глускин [5, 6], Ю. М. Важенин [7, 8], А. В. Михалёв [9] и многих других.

В данной работе исследуются автоматы над графами, которые называются графовыми автоматами. В категории таких автоматов для любых графов $G_1, G_2 \in \mathbf{Gr}$ найдётся универсально притягивающий объект [1] $\mathrm{Atm}(G_1, G_2)$ с полугруппой входных сигналов $\mathrm{End}\ G_1 \times \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, который называется универсальным графовым автоматом над графами G_1 и G_2.

В своей широко известной работе [10] С. Улам обозначил проблему характеризации математических объектов с помощью их эндоморфизмов и автоморфизмов. Принимая во внимание результаты Б. Йонссона по проблеме абстрактной характеризации алгебр отношений [11], возникает интерес к исследованию следующей проблемы абстрактной характеризации универсальных графовых автоматов: при каких условиях абстрактный автомат A будет изоморфен некоторому универсальному графовому автомату $\mathrm{Atm}(G_1, G_2)$ над графами G_1 из класса $\mathbf{K_1}$, G_2 из класса $\mathbf{K_2}$? Основным результатом данной работы является доказательство невозможности решения этой проблемы средствами языка узкого исчисления предикатов (УИП) для универсальных графовых автоматов над некоторыми широкими классами рефлексивных графов.

2. Основные понятия и определения

В работе используется общепринятая терминология теории автоматов из [1], теории графов из [12] и теории алгебраических систем из [13].

Далее всюду под графом будем понимать рефлексивный ориентированный граф $G=(X,\rho)$, где X — непустое множество вершин и $\rho \subset X \times X$ — множество дуг графа, удовлетворяющее условию $(x,x) \in \rho$ для всех $x \in X$ [12]. Дугу $(x,y) \in \rho$ будем называть собственной, если $(y,x) \notin \rho$. Граф называется квазибесконтурным, если ни одна его собственная дуга не лежит ни в каком контуре.

Графы $G_0(X) = (X, \Delta_X)$, $G_1(X) = (X, X^2)$ будем называть тривиальными рефлексивными графами. Ясно, что любое преобразование множества X является эндоморфизмом этих графов, и, следовательно, их полугруппа эндоморфизмов совпадает с множеством $T(X)$ всех преобразований множества X. Класс тривиальных рефлексивных графов обозначим $\mathbf{K_{tr}}$.

Полугрупповой автомат $A = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$ называется графовым [1], если множество состояний X_1 и множество выходных сигналов X_2 наделены структурами графов $G_1 = (X_1, \rho_1)$ и $G_2 = (X_2, \rho_2)$, что для любого входного сигнала $s \in S$ функция переходов $\delta_s = x \star s$ $(x \in X_1)$ является эндоморфизмом графа G_1 и функция выходов $\lambda_s = x \diamond s$ $(x \in X_1)$ является гомоморфизмом графа G_1 в граф G_2. Символически такие автоматы обозначаются $A = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$.

Графовый автомат $\mathrm{Atm}(G_1, G_2) = (G_1, \mathrm{End}\ G_1 \times \mathrm{Hom}(G_1, G_2), G_2, \star, \diamond)$ с операциями $x \star \varphi = \varphi(x)$ и $x \diamond \varphi = \psi(x)$ (где $x \in X_1$, $\varphi \in \mathrm{End}\ G_1$, $\psi \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$) является универсально притягивающим объектом в категории графовых автоматов [1], поэтому его называют универсальным графовым автоматом.

Мощностью графового автомата $A = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$ над графами $G_1 = (X_1, \rho_1)$ и $G_2 = (X_2, \rho_2)$ называется кардинал $|A| = |X_1| + |S| + |X_2|$. Автомат A называется конечным, счётным или несчётным, если его мощность $|A|$ — конечный, счётный или несчётный кардинал соответственно.

3. Задача элементарной аксиоматизации

Для классов графов $\mathbf{K_1}$ и $\mathbf{K_2}$ через $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ обозначим класс всех автоматов, изоморфных универсальным графовым автоматам $\mathrm{Atm}(G_1, G_2)$ для графов $G_1 \in \mathbf{K_1}$ и $G_2 \in \mathbf{K_2}$. Естественно возникает вопрос об абстрактной характеризации автоматов из класса $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$, который формулируется следующим образом [11]: при каких условиях абстрактный автомат будет изоморфен некоторому автомату из класса $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$? В работах [14, 15] приводятся решения этой задачи для полуавтоматов (автоматов без выходов) над классами графов квазипорядка $\mathbf{K_{qo}}$ и для класса рефлексивных квазибесконтурных графов $\mathbf{K_{rqa}}$. Оба этих результата, помимо аксиом языка узкого исчисления предикатов, используют условия, формулируемые на языке исчисления предикатов более высокого порядка. Целью настоящей работы является доказательство невозможности аксиоматизации средствами языка УИП классов автоматов $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ для некоторых широких классов графов $\mathbf{K_1}$ и $\mathbf{K_2}$.

Графовый автомат $A = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$ с графом состояний $G_1 = (X_1, \rho_1)$, полугруппой входных сигналов $S = (S, \cdot)$, графом выходных сигналов $G_2 = (X_2, \rho_2)$, функцией переходов $\star : X_1 \times S \to X_1$ и функцией выходов $\diamond : X_1 \times S \to X_2$ рассматривается как многоосновная алгебраическая Ω-система $A = (X_1, S, X_2, \Omega)$ с тремя непустыми базисными множествами X_1, S, X_2 и сигнатурой $\Omega = \{P_1, P_2, \cdot, \star, \diamond\}$. Здесь X_1 — множество вершин графа G_1, X_2 — множество вершин графа G_2, P_1 — бинарный предикатный символ отношения смежности вершин графа G_1, P_2 — бинарный предикатный символ отношения смежности вершин графа G_2, $\cdot$ — бинарный функциональный символ композиции элементов полугруппы, $\star$ — бинарный функциональный символ функции переходов автомата и $\diamond$ — бинарный функциональный символ функции выходов автомата.

Элементарная теория универсальных графовых автоматов определяется в стиле аксиоматики Гильберта геометрии плоскости с помощью языка УИП с трёхсортными переменными $\mathbf{L_A}$ сигнатуры $\Omega = \{P_1, P_2, \cdot, \star, \diamond\}$. Алфавит такого языка состоит из:

1) счётного множества индивидуальных переменных первого сорта для обозначения элементов множества вершин графа состояний автомата;

2) счётного множества индивидуальных переменных второго сорта для обозначения входных сигналов автомата;

3) счётного множества индивидуальных переменных третьего сорта для обозначения выходных сигналов автомата;

4) из двухместного предикатного символа P_1 типа (1,1) для обозначения отношения смежности на множестве вершин графа состояний автомата;

5) из двухместного предикатного символа P_2 типа (3,3) для обозначения отношения смежности на множестве вершин графа выходных сигналов автомата;

6) из двухместного функционального символа $\cdot$ типа (2,2,2) для обозначения операции композиции полугруппы входных сигналов автомата;

7) из двухместного функционального символа $\star$ типа (1,2,1) для обозначения функции переходов автомата;

8) из двухместного функционального символа $\diamond$ типа (1,2,3) для обозначения функции выходов автомата;

9) из конечного множества логических и технических символов, таких как

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Longrightarrow,\ \Longleftrightarrow,\ \forall^1,\ \exists^1,\ \forall^2,\ \exists^2,\ \forall^3,\ \exists^3,\ =\ \text{и}\ (,\ ).$$

Для языка $\mathbf{L_A}$ термы трёх сортов получаются обычным комбинированием символа $\cdot$ с двумя термами второго сорта, символов $\star$ и $\diamond$ с термами первого и второго сорта, т.е. это выражения вида $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $t^{(2)} \cdot t_1^{(2)}$, $t^{(1)} \star t^{(2)}$, $t^{(1)} \diamond t^{(2)}$ где $x^{(1)}$ и $t^{(1)}$ — переменная и терм первого сорта, $x^{(2)}$ и $t^{(2)}$, $t_1^{(2)}$ — переменная и термы второго сорта, $x^{(3)}$ — переменная третьего сорта. При этом получаются термы $t^{(1)} \star t^{(2)}$, $t^{(2)} \cdot t_1^{(2)}$, $t^{(1)} \diamond t^{(2)}$ первого, второго и третьего сорта, соответственно.

Атомарные формулы языка $\mathbf{L_A}$ получаются обычным комбинированием символа $=$ с двумя термами одного сорта, символа P_1 — с двумя термами первого сорта и символа P_2 — с двумя термами третьего сорта, т.е. это выражения вида $t = t'$, $P_1(t_1^{(1)}, t_2^{(1)})$, $P_2(t_3^{(3)}, t_4^{(3)})$, где t, t' — термы одного и того же сорта, $t_i^{(1)}$ — термы первого сорта (где $i = 1, 2$), $t_j^{(3)}$ — термы третьего сорта (где $j = 3, 4$). Формулы языка $\mathbf{L_A}$ определяются по индукции обычным образом (см., например, [16]).

Для классов графов $\mathbf{K_1}$ и $\mathbf{K_2}$ класс графовых автоматов $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ называется элементарно аксиоматизируемым, если существует такое множество предложений Σ языка графовых автоматов $\mathbf{L_A}$, что класс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ состоит из тех и только тех графовых автоматов A, на которых истинны все формулы из множества Σ.

Графовый автомат $A = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$ над графами $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$ может рассматриваться не только как многоосновная алгебраическая система $A = (X_1, S, X_2, \Omega)$ сигнатуры $\Omega = \{P_1, P_2, \cdot, \star, \diamond\}$, но и как обычная алгебраическая система $A_1 = (B, \Omega_1)$ с базисным множеством $B = X_1 \cup S \cup X_2$ и обогащённой сигнатурой $\Omega_1 = \{P_1, P_2, \cdot, \star, \diamond, P_{X_1}, P_S, P_{X_2}\}$ с тремя дополнительными унарными предикатными символами P_{X_1}, P_S, P_{X_2} для обозначения состояний, входных и выходных сигналов автомата A. Поэтому аксиоматизация классов графовых автоматов с помощью языка УИП сигнатуры $\Omega = \{P_1, P_2, \cdot, \star, \diamond\}$ с трёхсортными переменными $\mathbf{L_A}$ сводится к аксиоматизации классов таких автоматов с помощью обычного языка УИП сигнатуры $\Omega_1 = \{P_1, P_2, \cdot, \star, \diamond, P_{X_1}, P_S, P_{X_2}\}$. Следовательно, для графовых автоматов справедливы основные результаты теории моделей монографии Г. Кейслера и Ч. Чэна [16]. В частности, будет справедлива следующая теорема Лёвенгейма-Скулема-Тарского для графовых автоматов.

Теорема 1. *Если аксиоматизируемый класс графовых автоматов $\mathbf{K}$ имеет автоматы некоторой бесконечной мощности, то этот класс $\mathbf{K}$ имеет автоматы произвольной бесконечной мощности.*

Подкласс автоматов $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1'}, \mathbf{K_2'})$ класса автоматов $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ для классов графов $\mathbf{K_1'}, \mathbf{K_2'}, \mathbf{K_1}, \mathbf{K_2}$ называется относительно элементарно аксиоматизируемым в классе $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$, если существует такое множество предложений Σ' языка УИП сигнатуры Ω, что класс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1'}, \mathbf{K_2'})$ состоит из тех и только тех графовых автоматов A класса $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$, на которых истинны все формулы из множества Σ'.

Лемма 1. *Если подкласс автоматов $Atm(\mathbf{K_1'}, \mathbf{K_2'})$ относительно элементарно аксиоматизируем в классе автоматов $Atm(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$, и подкласс автоматов $Atm(\mathbf{K_1'}, \mathbf{K_2'})$ не может быть элементарно аксиоматизируем, то и класс $Atm(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ не может быть элементарно аксиоматизируем.*

4. Основной результат

Введём следующие предикаты языка $\mathbf{L_A}$ для переменных первого сорта x, y, u, v:

$$\begin{aligned}
\Pi(x, y, u, v) &= (\exists^2 s)(x \star s = u \wedge y \star s = v \wedge (\forall^1 z)(z \star s = u \vee z \star s = v)),\\
Q(x, y) &= \Pi(x, y, x, y) \wedge \neg\Pi(x, y, y, x),\\
E(x, y, u, v) &= (x = u \wedge y = v \vee x = v \wedge y = u),\\
N(x, y, u, v) &= (x \neq u \wedge x \neq v \wedge y \neq u \wedge y \neq v),\\
Q_1(x, y) &= Q(x, y) \wedge (\forall^1 u, v)(Q(u, v) \Rightarrow E(x, y, u, v)).
\end{aligned}$$

Используя лемму 2 из работы [17], легко проверить истинность утверждений следующей леммы.

Лемма 2. *Для любого универсального графового автомата $Atm(G_1, G_2)$ над графами $G_1 = (X_1, \rho_1)$ и $G_2 = (X_2, \rho_2)$ справедливы следующие утверждения:*

1) *для вершин* x, y, u, v *графа состояний* G_1 *предикат* $\Pi(x, y, u, v)$ *истинен тогда и только тогда, когда в автомате* $Atm(G_1, G_2)$ *найдётся входной сигнал* s*, который определяет отображение* $\delta_s(x) = x \star s$ $(x \in X)$*, удовлетворяющее условию* $\delta_s(x) = u$*,* $\delta_s(y) = v$ *и* $\delta_s(X_1) = \{u, v\}$*;*

2) *для вершин* a, b *нетривиального графа состояний* G_1 *предикат* $Q(a, b)$ *истинен тогда и только тогда, когда в графе* G_1 *вершины* a *и* b *соединяются собственной дугой, не лежащей ни в каком контуре;*

3) *для вершин* a, b, c, d *графа состояний* G_1 *предикат* $E(a, b, c, d)$ *истинен тогда и только тогда, когда* $\{a, b\} = \{c, d\}$*;*

4) *для вершин* a, b, c, d *графа состояний* G_1 *предикат* $N(a, b, c, d)$ *истинен тогда и только тогда, когда* $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$*;*

5) *для вершин* a, b *графа состояний* G_1 *предикат* $Q_1(a, b)$ *истинен тогда и только тогда, когда в графе* G_1 *вершины* a, b *соединяются собственной дугой, не лежащей ни в каком контуре, и в графе* G_1 *нет других собственных дуг, не лежащих ни в каких контурах.*

Пусть $\mathbf{Gr}$ — класс всех графов, $\mathbf{K_0}$ — класс рефлексивных графов с одной вершиной. Имеют место следующие леммы.

Лемма 3. *Для любого класса графов* $\mathbf{K}$ *класс автоматов* $Atm(\mathbf{K}, \mathbf{K_0})$ *относительно элементарно аксиоматизируем в классе* $Atm(\mathbf{K}, \mathbf{Gr})$ *с помощью аксиомы*

$$A_0 = (\forall^3 x, y)\ x = y.$$

Лемма 4. *Пусть* $A = Atm(G_1, G_2)$ *— универсальный графовый автомат над тривиальным рефлексивным графом состояний* $G_1 = (X_1, \rho_1) \in \mathbf{K_{tr}}$ *и одновершинным рефлексивным графом выходных сигналов* $G_2 = (X_2, \rho_2) \in \mathbf{K_0}$*. Тогда автомат* A *имеет конечную мощность, если граф* G_1 *— конечный граф, и автомат* A *имеет несчётную мощность, если граф* G_1 *— бесконечный граф.*

Доказательство. Пусть $A = \mathrm{Atm}(G_1, G_2)$ — универсальный графовый автомат над тривиальным рефлексивным графом $G_1 = (X_1, \rho_1) \in \mathbf{K_{tr}}$, одновершинным рефлексивным графом $G_2 = (X_2, \rho_2) \in \mathbf{K_0}$ и полугруппой входных сигналов $S = \mathrm{End}\ G_1 \times \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$.

По определению мощность автомата A — это кардинал $|A| = |X_1| + |S| + |X_2|$. Так как $G_1 \in \mathbf{K_{tr}}$, $|X_2| = 1$, то

$$|S| = |\mathrm{End}\ G_1| \cdot |\mathrm{Hom}(G_1, G_2)| = |{X_1}^{X_1}| \cdot |{X_2}^{X_1}| = |{X_1}^{X_1}|$$

и, следовательно, A имеет конечную мощность, если X_1 — конечное множество, и A имеет несчётную мощность, если X_1 — бесконечное множество. $\square$

Следующий результат показывает невозможность элементарной аксиоматизации классов универсальных графовых автоматов $\mathrm{Atm}(\mathbf{K}, \mathbf{Gr})$ для ряда классов рефлексивных графов $\mathbf{K}$.

Теорема 2. *Для следующих классов графов* $\mathbf{K}$ *классы универсальных графовых автоматов* $Atm(\mathbf{K}, \mathbf{Gr})$ *не могут быть элементарно аксиоматизируемы:*

1) *класс* $\mathbf{K} = \mathbf{K_{tr}}$ *всех тривиальных рефлексивных графов;*

2) *класс* $\mathbf{K} = \mathbf{K_r}$ *всех рефлексивных графов;*

3) *класс* $\mathbf{K} = \mathbf{K_{rs}}$ *всех рефлексивных симметричных графов;*

4) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{qo}}$ *всех графов квазипорядка;*

5) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{ra}}$ *всех рефлексивных бесконтурных графов;*

6) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{re}}$ *всех рефлексивных графов, имеющих дугу, не лежащую ни в каком контуре;*

7) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{rqa}}$ *всех рефлексивных квазибесконтурных графов;*

8) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{lo}}$ *всех графов линейного порядка.*

Доказательство. Рассмотрим класс автоматов $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr}}, \mathbf{Gr})$. Аксиома A_0 определяет в этом классе подкласс автоматов $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr}}, \mathbf{K_0})$, в котором согласно лемме 4 содержатся универсальные графовые автоматы с конечной или несчётной мощностью, значит в классе $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr}}, \mathbf{K_0})$ нет счётных автоматов и по теореме 1 такой класс не может быть элементарно аксиоматизируем. Согласно лемме 3 класс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr}}, \mathbf{K_0})$ относительно элементарно аксиоматизируем в классе $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr}}, \mathbf{Gr})$, и, следовательно, по лемме 1 класс автоматов $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr}}, \mathbf{Gr})$ не может быть элементарно аксиоматизируем.

Из п. 1) леммы 2 следует, что в классах $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_r}, \mathbf{Gr})$, $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{rs}}, \mathbf{Gr})$ и $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{qo}}, \mathbf{Gr})$ подкласс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr}}, \mathbf{K_0})$ определяется аксиомой

$$A_1 = (\forall^1 x, y, z, w)(\forall^3 u, v)\left((x \neq y \Longrightarrow \Pi(x, y, z, w)) \wedge u = v\right).$$

Следовательно, классы $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_r}, \mathbf{Gr})$, $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{rs}}, \mathbf{Gr})$ и $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{qo}}, \mathbf{Gr})$ также не могут быть элементарно аксиоматизируемы.

Аналогично аксиома A_1 в классе $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{ra}}, \mathbf{Gr})$ определяет подкласс автоматов $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr0}}, \mathbf{K_0})$ для класса $\mathbf{K_{tr0}}$ тривиальных рефлексивных графов состояний с тождественным отношением смежности. Из леммы 4 следует, что универсальные графовые автоматы над такими графами имеют конечную или несчётную мощность. Следовательно, в классе $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{tr0}}, \mathbf{K_0})$ нет счётных автоматов, и по теореме 1 такой класс не может быть элементарно аксиоматизируем. Значит, по лемме 1 класс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{ra}}, \mathbf{Gr})$ не является элементарно аксиоматизируемым.

Из п. 5) леммы 1 следует, что в классе $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{re}}, \mathbf{Gr})$ аксиома

$$A_2 = (\exists^1 x, y)(\forall^3 u, v)\left(Q_1(x, y) \wedge (\forall^1 z, w)(N(x, y, z, w) \Longrightarrow \Pi(x, y, z, w)) \wedge u = v\right)$$

определяет подкласс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{re1}}, \mathbf{K_0})$ универсальных графовых автоматов с рефлексивными графами состояний $G_1 = (X_1, \rho_1)$, имеющих точно одну собственную дугу (a, b), не лежащую ни в каком контуре, и смежными между собой всеми остальными вершинами $c, d \in X_1$, которые отличны от вершин a, b, и одновершинными рефлексивными графами выходных сигналов $G_2 = (X_2, \rho_2)$, $X_2 = \{z\}$. В таких автоматах любое отображение $\varphi : X_1 \to X_1'$, где $X_1' = X_1 \setminus \{a, b\}$, является эндоморфизмом графа G_1, а пара отображений (φ, c_z) (где c_z — постоянное отображение X_1 в $z \in X_2$) является входным сигналом универсального графового автомата $A = \mathrm{Atm}(G_1, G_2)$ и, значит, такой автомат имеет мощность $|A| \geq |X_1| + |{X_1'}^{X_1}| \cdot |{X_2}^{X_1}| + |X_2|$, то есть $|A| \geq |X_1| + |{X_1'}^{X_1}|$. Очевидно, что для конечных таких автоматов A мощность $|A|$ конечна и для бесконечных таких автоматов A мощность $|A|$ несчётна. Следовательно, в классе $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{re1}}, \mathbf{K_0})$ нет счётных автоматов, и по теореме 1 такой класс не может быть элементарно аксиоматизируем. Значит, по лемме 1 класс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{re}}, \mathbf{Gr})$ также не является элементарно аксиоматизируемым.

Аналогично в классе $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{rqa}}, \mathbf{Gr})$ аксиома A_2 определяет подкласс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{re1}}, \mathbf{K_0})$ и, значит, класс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{rqa}}, \mathbf{Gr})$ также не может быть элементарно аксиоматизируем.

Класс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{lo}}, \mathbf{Gr})$ состоит из универсальных графовых автоматов с графами состояний, являющимися линейно упорядоченными множествами $G = (X, \leq)$. Введём дополнительные предикаты языка $\mathbf{L_A}$ с переменной первого сорта x:

$$M(x) = (\forall^1 y)\ P(y, x),$$
$$m(x) = (\forall^1 y)\ P(x, y).$$

Очевидно, что для вершины x графа состояний G предикат $M(x)$ истинен тогда и только тогда, когда в линейно упорядоченном множестве G элемент x является наибольшим элементом, тогда как предикат $m(x)$ истинен в том и только том случае, когда в линейно упорядоченном множестве G элемент x является наименьшим элементом.

В классе графов $\mathbf{K_{lo}}$ аксиома

$$\begin{aligned} A_2 = & (\exists^1 u, v)\ (m(u)\ \wedge\ M(v)\ \wedge\ (\forall^1 x)(x \neq v \Longrightarrow \\ & \Longrightarrow (\exists^1 y)(y \neq x \wedge P(x, y) \wedge (\forall^1 z)(z \neq x \wedge P(x, z) \Longrightarrow P(y, z))))). \end{aligned}$$

определяет подкласс $\mathbf{K_{lo1}}$ линейно упорядоченных множеств $G = (X, \leq)$, которые удовлетворяют условиям:

1) G имеет наименьший элемент u и наибольший элемент v;

2) для любого элемента $x \in X$, не являющегося наибольшим элементом, существует единственный следующий за ним элемент y, который будем обозначать x'.

Очевидно, что класс $\mathbf{K_{lo1}}$ содержит все конечные линейно упорядоченные множества и линейно упорядоченное множество $\mathbb{N}^\infty$ натуральных чисел $\mathbb{N}$ с обычным порядком $\leq$ и с внешне присоединенным наибольшим элементом ∞.

Для любого бесконечного упорядоченного множества $G = (X, \leq)$ из класса $\mathbf{K_{lo1}}$ по индукции определяется упорядоченное подмножество $(Z, \leq)$:

1) элемент $z_1 \in Z$ — это наименьший элемент множества G;

2) для уже определенного элемента $z_n \in Z$ элемент $z_{n+1} \in Z$ является следующим за z_n элементом z'_n.

Очевидно, что множество $Z = \{z_i : i \in \mathbb{N}\}$ в графе G определяет линейно упорядоченное подмножество, изоморфное $(\mathbb{N}, \leq)$.

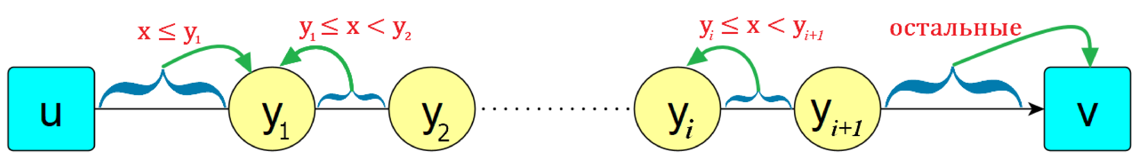

Рис. 1: Схематическое изображение отображения $\varphi : X \to X$ для бесконечного подмножества $Y \subset Z$.

Покажем, что для любого бесконечного подмножества $Y \subset Z$ существует такой эндоморфизм $\varphi \in \mathrm{End}\ G$, что $\varphi(X) \cap Z = Y$. Ясно, что элементы подмножества $Y \subset Z$ образуют строго возрастающую последовательность $y_1 < y_2 < \cdots < y_n < \ldots$, с помощью которой можно определить отображение $\varphi : X \to X$ по правилу (см. рисунок 1):

$$\varphi(x) = \begin{cases} y_1, & \text{если } x \leq y_1, \\ y_i, & \text{если } y_i \leq x < y_{i+1} \text{ для некоторого } i \in \mathbb{N}, \\ v, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что отображение φ является эндоморфизмом графа G и выполняется $\varphi(X) \cap Z = Y$.

Следовательно, мощность множества End G не меньше мощности $\mu(Z)$ множества всех подмножеств счётного множества Z, которое несчётно [18].

Рассмотрим автомат A из класса $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{lo1}}, \mathbf{K_0})$ с графом состояний $G_1 = (X_1, \leq_1)$ и одновершинным рефлексивным графом выходных сигналов $G_2 = (X_2, \leq_2)$. Мощность такого автомата — это кардинал

$$\begin{aligned}|A| &= |X_1| + |\mathrm{End}\ G_1| \cdot |\mathrm{Hom}(G_1, G_2)| + |X_2| = \\ &= |X_1| + |\mathrm{End}\ G_1| \cdot |X_2^{X_1}| + |X_2| = \\ &= |X_1| + |\mathrm{End}\ G_1| \cdot |1^{X_1}| + 1.\end{aligned}$$

Таким образом, $|A| \geq |\mathrm{End}\ G_1| \geq \mu(Z)$, где $\mu(Z)$ — это несчётная мощность множества всех подмножеств счётного множества $Z \subset X_1$.

Отсюда следует, что класс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{lo1}}, \mathbf{K_0})$ не может быть элементарно аксиоматизируем, значит по лемме 1 весь класс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_{lo}}, \mathbf{Gr})$ не может быть аксиоматизируем средствами языка УИП. □

5. Заключение

В работе изучена проблема абстрактной характеризации универсальных графовых автоматов. В теореме 2 доказано, что классы универсальных графовых автоматов $\mathrm{Atm}(\mathbf{K}, \mathbf{Gr})$ с графами состояний из некоторых важных классов рефлексивных графов $\mathbf{K}$ не допускают аксиоматизации средствами языка узкого исчисления предикатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994. 191 с.

2. Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966. 604 с.

3. Пинус А. Г. Об элементарной эквивалентности производных структур свободных полугрупп, унаров и групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, №6. С. 730–748.

4. Пинус А. Г. Об элементарной эквивалентности производных структур свободных решеток // Изв. вузов. Матем. 2002. №5. С. 44–47.

5. Глускин Л. М. Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23. С. 841–870.

6. Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований // УМН. 1961. Т. 16, №5. С. 157–162.

7. Важенин Ю. М. Элементарные свойства полугрупп преобразований упорядоченных множеств // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, №3. С. 281–301.

8. Важенин Ю. М. Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости классов рефлексивных графов // Изв. вузов. Матем. 1972. №7. С. 3–11.

9. Михалев А. В. Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. 1974. Т. 12. С. 51–76.

10. Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964. 168 с.

11. Jonsson B. Topics in Universal Algebras // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1972. Vol. 250. P. 230.

12. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.

13. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука. Физматлит, 1970. 392 с.

14. Акимова С. А. Абстрактная характеристика полугруппы эндоморфизмов упорядоченного множества // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та. 2004. №6. С. 3–5.

15. Фарахутдинов Р. А. Относительно элементарная определимость класса универсальных графовых полуавтоматов в классе полугрупп // Изв. вузов. Матем. 2022. №1. С. 74–84.

16. Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977. 616 с.

17. Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. On Concrete Characterization of Universal Graphic Automata // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, №3. P. 664–671.

18. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

REFERENCES

1. Plotkin, B. I., Greenglaz, L. Ja. & Gvaramija, A. A., 1994, “Elements of algebraic theory of automata”, *Vyshaja Shkola, Moscow*, 191 p. (In Russ.)

2. Plotkin, B. I., 1966, “Groups of automorphisms of algebraic systems”, *Nauka, Moscow*, 604 p. (In Russ.)

3. Pinus, A. G., 2004, “Elementary equivalence of derived structures of free semigroups, unars, and groups”, *Algebra and logic*, vol. 43, no. 6, pp. 408–417 (In Russ.)

4. Pinus, A. G., 2002, “Elementary equivalence of derived structures of free lattices”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, vol. 5, pp. 44–47 (In Russ.)

5. Gluskin, L. M., 1961, “Semigroups and endomorphism rings of linear spaces”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 25, no. 6, pp. 809–814 (In Russ.)

6. Gluskin, L. M., 1961, “Semigroups of isotone transformations”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 16, no. 5, pp. 157–162 (In Russ.)

7. Vazhenin, Yu. M., 1970, “Elementary properties of semigroups of transformations of ordered sets”, *Algebra and logic*, vol. 9, no. 3, pp. 281–301 (In Russ.)

8. Vazhenin, Yu. M., 1972, “The elementary definability and elementary characterizability of classes of reflexive graphs”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, vol. 7, pp. 3–11 (In Russ.)

9. Mikhalev, A. V., 1976, “Endomorphism rings of modules, and lattices of submodules”, *J Math Sci*, vol. 5, no. 6, pp. 786–802.

10. Ulam, S. M., 1960, “A collection of mathematical problems”, *Interscience, New York*, 150 p.

11. Jonsson, B., 1972, “Topics in Universal Algebras”, *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 250, 230 p.

12. Harary, F., 1969, “Graph Theory”, *Addison Wesley*, 288 p.

13. Maltzev, A. I., 1970, “Algebraic systems”, *Nauka. Fizmatlit, Moscow*, 392 p. (In Russ.)

14. Akimova, S. A., 2004, “Abstract characterization of endomorphism semigroups of ordered sets”, *Mathematika. Mekhanika: sb. nauch. tr. Saratov: Izd. Saratov State Un.*, no. 6, pp. 3–5. (In Russ.)

15. Farakhutdinov, R. A., 2022, “Relatively elementary definability of the class of universal graphic semiautomata in the class of semigroups”, *Allerton Press*, vol. 66, no. 1, pp. 62–70.

16. Kejsler, H. J., Chang, C. C., 2013, “Model theory”, *Dover Publications*, 672 p.

17. Molchanov, V. A., Farakhutdinov, R. A., 2022, “On Concrete Characterization of Universal Graphic Automata”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 43, iss. 3, pp. 664–671.

18. Kuratowski, K., Mostowski, A., 1698, “Set theory”, *North-Holland*, 417 p.

Получено: 06.12.2023
Принято в печать: 21.03.2024