

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-103-115

**О решетках конгруэнций алгебр с оператором
и симметрической основной операцией**

В. Л. Усольцев

Усольцев Вадим Леонидович — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).

e-mail: usl2004@mail.ru

Аннотация

В статье изучаются свойства решеток конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией меньшинства, определенной специальным образом и называемой симметрической. Операцией меньшинства называется тернарная операция $d(x, y, z)$, удовлетворяющая тождествам $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = x$. Алгебра называется цепной, если она имеет линейно упорядоченную решетку конгруэнций. Алгебра подпрямая неразложима, если она имеет наименьшую ненулевую конгруэнцию. Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из двух непустых непересекающихся частей: основной, которая может содержать произвольные операции, и дополнительной, состоящей из операторов. Операторами называются унарные операции, действующие как эндоморфизмы относительно основных операций, то есть перестановочные с основными операциями. Унарной называется алгебра с одной унарной операцией. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω , то унар $\langle A, f \rangle$ называется унарным редуктом алгебры $\langle A, \Omega \rangle$.

Получено описание алгебр с одним оператором и основной симметрической операцией, решетка конгруэнций которых является цепью. Показано, что алгебра данного класса является цепной тогда и только тогда, когда она подпрямая неразложима. Получено описание алгебр данного класса, решетки конгруэнций которых совпадают с решетками конгруэнций унарных редуктов этих алгебр.

Ключевые слова: решетка конгруэнций, алгебра с операторами, унарный редукт алгебры, цепная алгебра, подпрямая неразложимая алгебра.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:

В. Л. Усольцев. О решетках конгруэнций алгебр с оператором и симметрической основной операцией // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 103–115.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-103-115

On congruence lattices of algebras with an operator and the symmetric main operation

V. L. Usoltsev

Usoltsev Vadim Leonidovich — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Pedagogical University (Volgograd).

e-mail: usl2004@mail.ru

Abstract

In this paper we study properties of congruence lattices of algebras with one operator and the main symmetric operation. A ternary operation $d(x, y, z)$ satisfying identities $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = x$ is called a minority operation. The symmetric operation is a minority operation defined by specific way. An algebra A is called a chain algebra if A has a linearly ordered congruence lattice. An algebra A is called subdirectly irreducible if A has the smallest nonzero congruence. An algebra with operators is an universal algebra whose signature consists of two nonempty non-intersectional parts: the main part which can contain arbitrary operations, and the additional part consisting of operators. The operators are unary operations that act as endomorphisms with respect to the main operations, i.e., one are permutable with the main operations. An unar is an algebra with one unary operation. If f is the unary operation from the signature Ω then the unar $\langle A, f \rangle$ is called an unary reduct of algebra $\langle A, \Omega \rangle$.

A description of algebras with one operator and the main symmetric operation that have a linear ordered congruence lattice is obtained. It shown that algebra of given class is a chain algebra if and only if one is subdirectly irreducible. For algebras of given class we obtained necessary and sufficient conditions for the coincidence of their congruence lattices and congruence lattices of unary reducts these algebras.

Keywords: congruence lattice, algebra with operators, unary reduct of algebra, chain algebra, subdirectly irreducible algebra.

Bibliography: 28 titles.

For citation:

V. L. Usoltsev, 2024, “On congruence lattices of algebras with an operator and the symmetric main operation”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 103–115.

1. Введение

При изучении решеток конгруэнций в различных классах универсальных алгебр значительное внимание уделяется поиску условий, при которых решетка конгруэнций алгебры является цепью. Обычно алгебры с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций называют цепными, хотя в наиболее хорошо изученном в этом отношении классе — полугруппах — алгебры такого рода чаще называют Δ -полугруппами. В бесконечном случае коммутативные цепные полугруппы были полностью описаны Т. Тамурой [1] и Б.М. Шейном [2], [3]. Естественным обобщением коммутативных являются перестановочные полугруппы. Цепные алгебры в этом классе были описаны в [4]. Полугруппы, левые конгруэнции которых образуют цепь, были охарактеризованы в работе [5]. В [6] показано, что класс цепных нильполугрупп совпадает с классом нильполугрупп, имеющих дистрибутивную решетку конгруэнций.

Цепные алгебры изучаются и в других классах универсальных алгебр. В [7] охарактеризованы дистрибутивные двойные p -алгебры с данным свойством. В работе [8] описаны унары (алгебры с одной унарной операцией) с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций. Цепные алгебры, сигнатура которых состоит из произвольного числа коммутирующих унарных операций были описаны в [9].

В настоящей работе изучаются, в частности, цепные алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f \rangle$ с оператором f и основной операцией меньшинства $s(x, y, z)$, определенной специальным образом, описанным ниже. В общем случае, операцией меньшинства (см., например, [10]) называется тернарная операция $d(x, y, z)$, удовлетворяющая тождествам $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = x$. Из определения следует, что операция меньшинства является мальцевской. Если же для операции $d(x, y, z)$ выполняются тождества $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = y$, то она называется операцией большинства.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из двух непустых непересекающихся частей: основной, которая может содержать произвольные операции, и дополнительной, состоящей из операторов. Операторами называются унарные операции, действующие как эндоморфизмы относительно основных операций, то есть перестановочные с основными операциями.

Решетки конгруэнций алгебр с операторами и близких к ним алгебр изучались в [11], [12].

Теория алгебр с операторами имеет очевидную связь с теорией унарных алгебр. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω , то унар $\langle A, f \rangle$ называется унарным редуктом алгебры $\langle A, \Omega \rangle$. Естественный интерес вызывают связи между решеткой конгруэнций алгебры с операторами и решеткой конгруэнций ее унарного редукта. В частности, возникает вопрос об условиях, при которых данные решетки совпадают. В настоящей работе этот вопрос решается для класса алгебр $\langle A, s, f \rangle$, указанного выше.

В [13] на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ задается мальцевская операция $p(x, y, z)$, перестановочная с операцией f . Определение операции $p(x, y, z)$ (как и рассматриваемых далее операций $s(x, y, z)$ и $m(x, y, z)$) можно найти в [14]. Основные результаты, полученные при изучении свойств конгруэнций алгебр $\langle A, p, f \rangle$ с оператором f , приводятся в [15]. В их числе указаны необходимые и достаточные условия совпадения решетки конгруэнций алгебры из данного класса и решетки конгруэнций ее унарного редукта. В [16] описаны цепные алгебры в классе алгебр $\langle A, p, f \rangle$.

На основе подхода, предложенного в [13], на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ определяется тернарная операция $s(x, y, z)$, названная *симметрической*. Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента z унара $\langle A, f \rangle$ через $f^n(z)$ обозначается результат n -кратного применения операции f к элементу z ; при этом $f^0(z) = z$. Положим

$$M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\},$$

а также $k(x, y) = \min M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$s(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \quad (1)$$

Из определения вытекает, что данная операция перестановочна с операцией f . Как следствие, алгебра $\langle A, s, f \rangle$ является алгеброй с оператором f . Кроме того, из (1) следует, что операция s удовлетворяет тождествам $s(x, y, y) = s(y, y, x) = s(y, x, y) = x$, то есть является операцией меньшинства. Таким образом, класс алгебр $\langle A, s, f \rangle$ содержится в многообразии, определенном тождествами операции меньшинства и тождеством перестановочности

$f(s(x, y, z)) = s(f(x), f(y), f(z))$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что данный класс является конгруэнц-модулярным, поскольку операция меньшинства, как отмечалось выше, является мальцевской.

В [17] были описаны простые, абелевы и полиномиально полные алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f \rangle$, в [18] — гамильтоновы алгебры данного класса.

Слабой операцией почти единогласия (weak near-unanimity operation) (см., например, [19]) называется идемпотентная n -арная операция d , где $n > 1$, для которой выполняются тождества $d(y, x, \dots, x) = d(x, y, \dots, x) = \dots = d(x, x, \dots, y)$. Алгебры, имеющие термальную слабую операцию почти единогласия находят применение в рамках алгебраического подхода [20] к исследованию вычислительной сложности ограничений задачи CSP (Constraint Satisfaction Problem) и в смежных областях алгебры. Поскольку, по определению (1), $s(x, x, x) = x$ и $s(x, x, y) = s(x, y, x) = s(y, x, x)$ для любых x, y , то операция s является тернарной слабой операцией почти единогласия.

Близким к приведенному выше понятию является операция почти единогласия (near-unanimity operation) (см., например, [21]), то есть, n -арная операция φ , удовлетворяющая тождествам $\varphi(x, \dots, x, y) = \varphi(x, \dots, x, y, x) = \dots = \varphi(y, x, \dots, x) = x$ ($n \geq 3$). В тернарном случае φ является операцией большинства. Алгебрам с термальной операцией почти единогласия уделяется большое внимание в современной универсальной алгебре (см., например, [22]), теории графов и теоретической информатике (в области, связанной с задачей CSP).

Сходным с указанным в (1) способом на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ задается операция большинства $m(x, y, z)$, перестановочная с операцией f (см. [23]). В [24] показано, что используя операцию $m(x, y, z)$, на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ для $n \geq 3$ можно определить семейство n -арных операций почти единогласия $g^{(n)}$, перестановочных с операцией f , по правилам: $g^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = m(x_1, x_2, x_3)$ и $g^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = m(g^{(n-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_{n-1}, x_n)$ для $n > 3$. Там же получены необходимые и достаточные условия совпадения решетки конгруэнций алгебры $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ и решетки конгруэнций ее унарного редукта $\langle A, f \rangle$.

2. Основные определения и обозначения

Обозначим через $\text{Con}A$ решетку конгруэнций универсальной алгебры A , а через ∇_A и $\triangle_A$ — единичную и нулевую конгруэнции алгебры A соответственно. Класс конгруэнции θ , порожденный элементом x , обозначим через $x\theta$.

Для произвольной конгруэнции θ на алгебре A будем называть нетривиальной парой этой конгруэнции пару таких элементов $x, y \in A$, что $x\theta y$ и $x \neq y$.

Конгруэнция $\bar{\alpha}$ произвольной алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ называется расширением конгруэнции α подалгебры B алгебры $\langle A, \Omega \rangle$, если условие $x\bar{\alpha}y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда $x\alpha y$, либо $x = y$.

Для любых чисел $n > 0$, $m \geq 0$ положим $C_n^m = \langle a | f^m(a) = f^{m+n}(a) \rangle$. Унар C_n^0 называется циклом длины n . Элемент унара называется циклическим, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом; в противном случае будем называть элемент нециклическим. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \dots$, где $n > 0$ и $0 \leq t_1 < t_2 < \dots$. Элемент a унара называется периодическим, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geq 0$ и $n \geq 1$, и непериодическим в противном случае. Через $T(A)$ и $D(A)$ обозначаются множества всех периодических и непериодических элементов унара A соответственно. Унар $\langle A, f \rangle$ называется периодическим, если $A = T(A)$, и унаром без кручения, если $A = D(A)$. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t , для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geq 1$, называется глубиной элемента a и обозначается через $t(a)$. Глубиной $t(A)$ унара A называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, глубина унара принима-

ется формально равной бесконечности. Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их суммой и обозначается через $B + C$.

Унар $\langle A, f \rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ при некоторых $n \geq 0, m \geq 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется компонентой связности унара A . Элемент a унара называется узловым, если найдутся такие различные элементы b и c (возможно, циклические), отличные от a , что $f(b) = a = f(c)$. Элемент a унара $\langle A, f \rangle$ называется неподвижным, если $f(a) = a$. Связный унар с неподвижным элементом называется корнем. Корнем без нетривиальных узлов называется корень, не имеющий узловых элементов, кроме, может быть, неподвижного.

Пусть B — подунар произвольного унара $\langle A, f \rangle$. Через θ_B обозначается конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$, определенная по правилу [25]: условие $x\theta_B y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in B$.

Пусть v — узловый элемент унара $\langle A, f \rangle$. Через θ_v обозначается конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$, определенная по правилу [16]: условие $x\theta_v y$ для любых $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in f^{-1}(v)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Через σ_k обозначается конгруэнция $\text{Ker } f^k$ алгебры $\langle A, \Omega \cup \{f\} \rangle$ с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω . Положим также $\sigma_0 = \Delta_A$. Через σ обозначается конгруэнция на $\langle A, \Omega \cup \{f\} \rangle$, определенная как

$$x\sigma y \Leftrightarrow \exists s > 0 (f^s(x) = f^s(y)).$$

Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный связный унар без кручения, имеющий единственный узловый элемент. Обозначим узловый элемент унара через v и определим на $\langle A, f \rangle$ функцию $r(x)$ для элементов $x \in A$ следующим образом: $r(x) = n$, если $f^n(x) = v$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $r(x) = -n$, если $f^n(v) = x$ и $r(x) = 0$ при $x = v$.

3. Цепные алгебры в классе $\langle A, s, f \rangle$

Далее везде через $\langle A, s, f \rangle$ обозначается алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1).

ЛЕММА 1. Пусть $\langle A, f \rangle$ — связный периодический унар с единственным узловым элементом v , содержащий цикл неединичной длины h . Тогда решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является цепью.

Доказательство. Пусть $\theta \in \text{Con} \langle A, s, f \rangle$, $\theta \neq \nabla_A$. Предположим, что глубины всех элементов A , входящих в нетривиальные пары конгруэнции θ , ограничены глубиной некоторого элемента $c \in A$, и докажем, что $\theta = \sigma_{t(c)}$. Поскольку $\Delta_A = \sigma_0$, то рассмотрим случай $\theta \neq \Delta_A$.

Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $x\theta y$. По предположению, $t(x), t(y) \leq t(c)$. Тогда элементы $f^{t(c)}(x), f^{t(c)}(y)$ являются циклическими. Предположим, что $f^{t(c)}(x) \neq f^{t(c)}(y)$. Учитывая инъективность операции f на цикле, получаем, что $f^{t(c)+m}(x) \neq f^{t(c)+m}(y)$ для любого $m > 0$. Отсюда, $k(x, y) = \infty$, что противоречит пункту 2 леммы 11 [26]. Таким образом, $f^{t(c)}(x) = f^{t(c)}(y)$, откуда $x\sigma_{t(c)} y$ и $\theta \subseteq \sigma_{t(c)}$.

Пусть теперь $x\sigma_{t(c)} y$, откуда $f^{t(c)}(x) = f^{t(c)}(y)$. Так как $\sigma_{t(c)} \in \text{Con} \langle A, s, f \rangle$, то, по лемме 2 [27], элементы x, y не могут одновременно быть циклическими. Пусть, для определенности, x — нециклический элемент.

Так как $x\theta y$, то $|x\theta| > 1$. Тогда, по лемме 4 [27], для элемента $a = f^{h-r}(v)$, где r — остаток от деления $t(x)$ на h , выполняется условие $a\theta x$.

Рассмотрим сначала случай, когда элемент y не является циклическим.

Пусть $|y\theta| > 1$. Поскольку из равенства $f^{t(c)}(x) = f^{t(c)}(y)$ вытекает, что элементы x, y удовлетворяют условиям леммы 6 [27], то $t(x) \equiv t(y)(h)$. Тогда остаток от деления $t(y)$ на h равен r , а значит, по лемме 4 [27], имеем $a\theta y$. Отсюда, $x\theta y$.

Положим теперь $|y\theta| = 1$. Поскольку, по предположению, элемент c входит в нетривиальную пару конгруэнции θ , то $|c\theta| > 1$, а значит, по лемме 3 [27], найдется такой циклический элемент d , что $c\theta d$. Из условия $t(y) \leq t(c)$ вытекает, что $t(c) = t(y) + m$ для некоторого $m \geq 0$. Тогда $f^m(c)\theta f^m(d)$. Поскольку y не является циклическим элементом, то $t(y) > 0$, откуда $m < t(c)$, а значит, $f^m(c)$ также не является циклическим. Из условия $t(c) = t(y) + m$ следует, что $t(f^m(c)) = t(y)$.

Если $y = f^m(c)$, то $y\theta f^m(d)$, а поскольку $f^m(d)$ — циклический, то $|y\theta| > 1$, что противоречит условию $|y\theta| = 1$.

Пусть теперь $y \neq f^m(c)$. Так как $f^m(c)\theta f^m(d)$, то по следствию из леммы 6 [16], $k(f^m(c), f^m(d)) = t(f^m(c)) = t(y)$ и $k(y, f^m(c)) = \max\{t(y), t(f^m(c))\} = t(y)$. Тогда $p(y, f^m(c), f^m(d)) = f^m(d)$ и $p(y, f^m(c), f^m(c)) = y$, откуда $y\theta f^m(d)$, что снова приводит к противоречию.

Рассмотрим теперь случай, когда элемент y — циклический.

Из условия $|x\theta| > 1$, по лемме 3 [27], найдется такой циклический элемент a , что $a\theta x$. Отсюда, $f^{t(c)}(a)\theta f^{t(c)}(x)$, и с учетом условия $f^{t(c)}(x) = f^{t(c)}(y)$, имеем $f^{t(c)}(a)\theta f^{t(c)}(y)$. Поскольку оба последних элемента являются циклическими, то, по лемме 2 [27], получаем $f^{t(c)}(a) = f^{t(c)}(y)$. Тогда, с учетом инъективности операции f на цикле, верно равенство $a = y$, откуда $x\theta y$.

Таким образом, $\sigma_{t(c)} \subseteq \theta$, а значит, $\theta = \sigma_{t(c)}$.

Предположим теперь, что глубины элементов, принадлежащих нетривиальным парам конгруэнции θ не ограничены в совокупности, и докажем, что в этом случае $\theta = \sigma$.

Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $x\theta y$. Тогда, по пункту 2 леммы 11 [26], $k(x, y) < \infty$ и, следовательно, $f^n(x) = f^n(y)$ для некоторого $n > 0$. Отсюда, по определению конгруэнции σ , имеем $x\sigma y$ и $\theta \subseteq \sigma$.

Пусть теперь $x\sigma y$, то есть $f^n(x) = f^n(y)$ для некоторого $n > 0$. По предположению, найдется такой элемент c , входящий в некоторую нетривиальную пару $(b, c) \in \theta$, что $t(x) < t(c)$, $t(y) < t(c)$, $n < t(c)$. Из последнего неравенства следует, что $t(c) = n + m$ для некоторого $m > 0$. Отсюда, условие $f^n(x) = f^n(y)$ влечет $f^{t(c)}(x) = f^{t(c)}(y)$. Тогда, учитывая условия $t(x) < t(c)$, $t(y) < t(c)$ и рассуждая как выше при доказательстве утверждения $\sigma_{t(c)} \subseteq \theta$, получаем, что $x\theta y$ и, значит, $\sigma \subseteq \theta$. Окончательно, $\theta = \sigma$.

Таким образом, любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$ совпадает либо с σ_n для некоторого $n > 0$, либо с конгруэнцией σ . Тогда утверждение леммы вытекает из замечания 2 [28] и того факта, что отношение σ является объединением возрастающей цепи всех конгруэнций вида σ_n . $\square$

ЛЕММА 2. Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент. Тогда для любых различных $x, y \in A$ и любого $n > 0$ условие $x\sigma_n y$ эквивалентно условию $0 < r(x) = r(y) \leq n$.

Доказательство. Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$, $n > 0$. Предположим, что выполняется условие $0 < r(x) = r(y) \leq n$. Обозначим $r = r(x) = r(y)$. По условию, $n = r + s$ для некоторого $s \geq 0$. Так как $r > 0$, то $f^r(x) = f^r(y) = v$, где v — узловой элемент унара. Тогда $f^{r+s}(x) = f^{r+s}(y)$, откуда $f^n(x) = f^n(y)$ и, следовательно, $x\sigma_n y$.

Пусть теперь выполнено условие $x\sigma_n y$. Тогда $f^n(x) = f^n(y)$. Предположение о том, что $f^n(x) \notin \langle v \rangle$ приводит к противоречию с условием единственности узлового элемента в унаре $\langle A, f \rangle$. Отсюда, $f^n(x) = f^k(v) = f^n(y)$ для некоторого $k \geq 0$, и по определению функции $r(x)$, имеем $0 < r(x) = r(y) \leq n$. $\square$

ЛЕММА 3. Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент. Тогда решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является цепью.

Доказательство. Пусть θ — произвольная нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$ и x, y — произвольные различные элементы множества A .

Предположим, что найдется такая пара элементов $(b, c) \in \theta$, что $r(b) \neq r(c)$. Тогда, по лемме 12 [16], $k(b, c) = \infty$. Отсюда, по определению операции s , имеем $s(x, b, c) \in \{b, c\}$, $s(y, b, c) \in \{b, c\}$. Тогда $s(x, b, c)\theta s(x, b, b)$, откуда $b\theta x$. Аналогично получаем $b\theta y$. Отсюда $\theta = \nabla_A$, что противоречит выбору θ . Таким образом, для любой пары $(b, c) \in \theta$ имеем $r(b) = r(c)$.

Если $r(b) > 0$, то $f^{r(b)}(b) = v = f^{r(b)}(c)$. Тогда $k(b, c) \leq r(b)$. Предположив, что $k(b, c) < r(b)$, получаем противоречие с условием единственности узлового элемента. Отсюда, $k(b, c) = r(b)$.

Если же $r(b) \leq 0$, то $b = c$ и $k(b, c) = 0$.

Пусть $z \in A$ — такой элемент, что $r(z) = r(c) = r(b)$. Рассуждая, как выше, получаем, что при $r(b) > 0$ верно $k(z, b) = r(b)$, а при $r(b) \leq 0$ выполняется $k(z, b) = 0$. Тогда в любом из этих двух случаев имеем $k(z, b) = k(b, c)$, что, по определению операции s , влечет равенство $s(z, b, c) = b$. Тогда $b = p(z, b, c)\theta p(z, b, b) = z$.

Изложенное выше, с учетом леммы 2, показывает, что любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$ совпадает с конгруэнцией σ_n при подходящем n . Окончательно, утверждение леммы вытекает из замечания 2 [28]. $\square$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\langle A, s, f \rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является цепью в том и только в том случае, когда данная алгебра подпрямно неразложима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ — цепь. Тогда, поскольку по теореме 1 [27], решетка $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ является атомной, то в ней существует атом, содержащийся во всех ненулевых конгруэнциях данной алгебры. Отсюда, алгебра $\langle A, s, f \rangle$ подпрямно неразложима.

Пусть теперь алгебра $\langle A, s, f \rangle$ подпрямно неразложима. Тогда, по теореме 3 [27], унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет одному из условий 1) – 5) этой теоремы. Рассмотрим возникающие случаи.

Случай 1. Операция f на унаре $\langle A, f \rangle$ инъективна.

В этом случае, по теореме 9 [17], алгебра $\langle A, s, f \rangle$ является конгруэнц-простой, и, следовательно, $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ есть цепь.

Случай 2. Унар $\langle A, f \rangle$ изоморфен C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

При этом условии, по следствию 1 из предложения 3 [28], решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является цепью длины $1 + t$.

Случай 3. $\langle A, f \rangle$ есть связный периодический унар, имеющий единственный узловой элемент v , который является циклическим.

Здесь из условий связности и периодичности вытекает, что унар $\langle A, f \rangle$ содержит подунар B , изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 0$.

Если $n > 1$, то решетка $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ является цепью по лемме 1.

При $n = 1$ унар $\langle A, f \rangle$ является корнем без нетривиальных узлов. Тогда, по пункту 4 леммы 11 [26], любая неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$ имеет вид σ_n для некоторого $n \geq 0$. В этом случае, по замечанию 2 [28], совокупность всех неединичных конгруэнций образует цепь в решетке $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$. По лемме 2 [28], единичная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$, унарный редукт которой является корнем, совпадает с конгруэнцией σ . Отсюда, решетка $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ является цепью.

Случай 4. $\langle A, f \rangle$ — связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент.

При этом условии решетка $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ является цепью по лемме 3.

Случай 5. Унар $\langle A, f \rangle$ является суммой одной компоненты связности B , имеющей вид, указанный в одном из случаев 2–4, и произвольного подунара C , операция f на котором инъективна.

В данном случае, по пункту 8 леммы 11 [26], любая нетривиальная конгруэнция θ алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является расширением некоторой конгруэнции ее подалгебры $\langle B, s, f \rangle$. Как следствие, решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ изоморфна решетке $\text{Con}\langle B, s, f \rangle$ с присоединенной внешней единицей, а значит, по доказанному выше в случаях 2–4, $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ является цепью. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\langle A, s, f \rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является цепью тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) $\langle A, f \rangle$ — унар с инъективной операцией;
- 2) $\langle A, f \rangle$ изоморфен C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
- 3) $\langle A, f \rangle$ — связный периодический унар, имеющий единственный узловой элемент, который является циклическим;
- 4) $\langle A, f \rangle$ — связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент;
- 5) $\langle A, f \rangle$ является суммой одной компоненты связности, имеющей вид, указанный в одном из случаев 2–4, и произвольного подунара с инъективной операцией.

Вытекает из теоремы 1 и теоремы 3 [27].

4. Алгебры $\langle A, s, f \rangle$, каждая конгруэнция которых является конгруэнцией их унарного редукта

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\langle A, s, f \rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Каждая конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$ является конгруэнцией алгебры $\langle A, s, f \rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle A, f \rangle$ изоморфен одному из следующих унаров:

- 1) C_p^0 , где p — простое число;
- 2) $C_1^0 + C_1^0$;
- 3) C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.

Доказательство. Достаточность утверждения следует из предложения 2 [24]. Докажем его необходимость.

Пусть унар $\langle A, f \rangle$ не изоморфен ни одному из унаров, перечисленных в условии теоремы. Достаточно найти такую его конгруэнцию, которая не является стабильной относительно операции $s(x, y, z)$.

Пусть $\langle A, f \rangle$ — унар без кручения. Тогда он содержит подунар $B \cong F_1$. Отсюда следует существование на подунаре B нетривиальной конгруэнции θ . Так как операция f инъективна на B , то по теореме 9 [17], алгебра $\langle B, s, f \rangle$ конгруэнц-проста. Таким образом, отношение θ не стабильно относительно операции $s(x, y, z)$, а значит, не будет стабильно и его расширение $\bar{\theta} = \theta \cup \Delta_A$, рассматриваемое, как конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$.

Пусть теперь унар $\langle A, f \rangle$ содержит подунар $B \cong C_n^0$ для некоторого $n > 0$.

Положим $n > 1$. Если $B = A$, то, по условию, n — составное число. Так как любая конгруэнция на унаре, являющемся циклом, определяется некоторым делителем длины этого цикла, то, выбрав делитель, не совпадающий с n и 1, получаем, что унар $\langle A, f \rangle$ имеет нетривиальную конгруэнцию θ . В то же время, в силу инъективности операции f на B , как и выше, отношение θ не стабильно относительно операции $s(x, y, z)$.

Если же B — собственный подунар унара $\langle A, f \rangle$, то найдется элемент $a \in A \setminus B$. Кроме того, так как $n > 1$, то для некоторых различных элементов $b, c \in B$ имеем $b\theta_{BC}$. По лемме 1 [24], $k(b, c) = \infty$. Тогда, по определению операции s , верно утверждение $s(b, c, a) \in \{b, c\}$.

С другой стороны, $s(b, b, a) = a$. Предполагая выполнение утверждения $\theta_B \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$, получаем $a = s(b, b, a)\theta_B s(b, c, a) \in \{b, c\}$, что противоречит выбору элемента a . Таким образом, конгруэнция θ_B унара $\langle A, f \rangle$ не стабильна относительно операции s .

Пусть теперь $n = 1$. Рассмотрим сначала случай, когда унар $\langle A, f \rangle$ содержит более одного одноэлементного подунара. В этом случае в $\langle A, f \rangle$ найдется двухэлементный подунар $D = \{b, c\}$, где $f(b) = b$ и $f(c) = c$. По условию, D будет собственным подунаром унара $\langle A, f \rangle$. Тогда найдется элемент $a \in A \setminus D$. Кроме того, по определению конгруэнции θ_D на унаре $\langle A, f \rangle$ имеем $b\theta_D c$. Так как элементы b и c лежат в разных компонентах связности, то $k(b, c) = \infty$. Отсюда, как и выше, предполагая выполнение утверждения $\theta_D \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$, получаем $a = s(b, b, a)\theta_D s(b, c, a) \in \{b, c\}$, что противоречит выбору элемента a .

Пусть теперь унар $\langle A, f \rangle$ содержит единственный одноэлементный подунар. Предположим сначала, что унар $\langle A, f \rangle$ — связный. Тогда он является корнем. Так как по условию он неизоморфен унару C_1^t ни при каком $t \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то $\langle A, f \rangle$ содержит узловой элемент v . Тогда найдутся такие отличные от v элементы $b, c \in A$, что $b \neq c$, $f(b) = v$, $f(c) = v$. Обозначим через K подунар унара $\langle A, f \rangle$, порожденный элементом b . Очевидно, $v \in K$ и $c \notin K$. Отсюда, $v\theta_K b$ и $(c, v) \notin \theta_K$. Поскольку $\langle A, f \rangle$ — корень, то подунар K изоморфен $C_1^{t(b)}$. Тогда, по лемме 10 [28], имеем $k(b, v) = t(b) > 0$. Аналогично получаем $k(v, c) = t(c) > 0$. При этом, из условия $f(b) = v = f(c)$ имеем $t(b) = t(c)$. Отсюда, по определению операции $s(x, y, z)$, получаем $s(b, v, c) = v$. С другой стороны, $s(b, b, c) = c$. Предполагая выполнение утверждения $\theta_K \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$, получаем, что $v = s(b, v, c)\theta_K s(b, b, c) = c$, что противоречит условию $(c, v) \notin \theta_K$. Таким образом, конгруэнция θ_K унара $\langle A, f \rangle$ не стабильна относительно операции $s(x, y, z)$.

Если же унар $\langle A, f \rangle$ несвязный, то кроме компоненты связности S , содержащей его одноэлементный подунар, он имеет и другую компоненту связности P . Тогда, в силу единственности одноэлементного подунара в унаре $\langle A, f \rangle$, компонента связности P имеет либо подунар, изоморфный F_1 , либо подунар B , изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$, что приводит к одному из рассмотренных выше случаев (за исключением ситуации, когда n является простым числом). Если же n — простое, то рассуждая как выше (в случае, когда B — собственный подунар унара $\langle A, f \rangle$), можно выбрать в качестве элемента $a \in A \setminus B$ любой элемент компоненты связности S , и это снова приводит к тому, что конгруэнция θ_B унара $\langle A, f \rangle$ не стабильна относительно операции s . $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ совпадает с решеткой конгруэнций ее унарного редукта $\langle A, f \rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle A, f \rangle$ изоморфен одному из следующих унаров:

- 1) C_p^0 , где p — простое число;
- 2) $C_1^0 + C_1^0$;
- 3) C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tamura T. Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain // Bull. Soc. Math. France, 97 (1969), 369–380.
2. Schein B.M. Commutative semigroups where congruences form a chain // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 17 (1969), 523–527.
3. Schein B.M. Corrigenda to "Commutative semigroups where congruences form a chain" // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 23 (1975), 1247–1248.
4. Nagy A., Jones P.R. Permutative Semigroups Whose Congruences Form a Chain // Semigroup Forum. 2004. Vol. 69. P. 446–456.

5. Kozhukhov I. B. Left chain semigroups // Semigroup Forum. 1981. Vol. 22. P. 1–8.
<https://doi.org/10.1007/BF02572781>
6. Popovich A. L., Jones P. R. On congruence lattices of nilsemigroups // Semigroup Forum. 2017. Vol. 95, No. 2. P. 314–320.
7. Goldberg M. S. Distributive double p-algebras whose congruence lattices are chains // Algebra Universalis. 1983. Vol. 17. P. 208–215. <https://doi.org/10.1007/BF01194530>
8. Егорова Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры // Упорядоченные множества и решетки. Вып. 5. Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1978. С. 11–44.
9. Карташова А. В. Коммутативные унарные алгебры с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 1. С. 80–92.
10. Szendrei A. Clones in universal algebra. Montréal: Les presses de l'Université de Montréal, 1986. 166 p.
11. Hyndman J., Nation J. B., Nishida J. Congruence lattices of semilattices with operators // Studia Logica. 2016. Vol. 104. № 2. P. 305–316.
12. Garcia P., Esteva F. On Ockham Algebras: Congruence Lattices and Subdirectly Irreducible Algebras // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P. 319–346.
13. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. докл. межд. семинара, посв. памяти проф. Л. А. Скорнякова. Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.
14. Усольцев В. Л. О рисовском замыкании в некоторых классах алгебр с оператором // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 2(78). С. 271–287.
15. Усольцев В. Л. Унары с тернарной мальцевской операцией // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 201–202.
16. Усольцев В. Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // Изв. Волгоградского гос. пед. ун-та, сер. "Ест. и физ.-мат. науки". 2005. № 4(13). С. 17–24.
17. Усольцев В. Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50). Ч. 2. С. 229–236.
18. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2014. Т. 15, вып. 3(51). С. 100–113.
19. Maróti M., McKenzie R. Existence theorems for weakly symmetric operations // Algebra Universalis. 2008. Vol. 59. № 3–4. P. 463–489.
20. Bulatov A., Krokhin A., Jeavons P. The complexity of constraint satisfaction: An algebraic approach // Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra. Berlin: Springer-Verlag, 2005. P. 181–213.
21. Baker K. A., Pixley A. Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems // Math. Zeitschrift. 1975. V. 143. P. 165–174.
22. Marković P., McKenzie R. Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms // Algebra Universalis. 2008. Vol. 58. P. 119–128.

23. Usol'tsev, V. L. Subdirectly Irreducible Algebras in One Class of Algebras with One Operator and the Main Near-Unanimity Operation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, № 1. P. 206–216.
24. Усольцев В. Л. О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // Научно-техн. вестник Поволжья. 2016. Вып. 2. С. 28–30.
25. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f \rangle$ // Arch. Math. (Basel) 1970. Vol. 21. P. 256–264.
26. Лата А. Н. О конгруэнц-когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 2(62). С. 154–172.
27. Усольцев В. Л. Подпрямая неразложимость и атомы решеток конгруэнций алгебр с оператором и симметрической основной операцией // Чебышевский сб. 2021. Т. 22, вып. 2(78). С. 257–270.
28. Usoltsev V. L. Simple and pseudosimple algebras with operators // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 164, № 2. P. 281–293.

REFERENCES

1. Tamura, T. 1969, “Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain”, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 97, pp. 369–380. DOI: 10.24033/bsmf.1689
2. Schein, B. M. 1969, “Commutative semigroups where congruences form a chain”, *Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, vol. 17, pp. 523–527.
3. Schein, B. M. 1975, “Corrigenda to “Commutative semigroups where congruences form a chain””, *Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, vol. 23, pp. 1247–1248.
4. Nagy, A. & Jones, P. R. 2004, “Permutative Semigroups Whose Congruences Form a Chain”, *Semigroup Forum*, vol. 69. pp. 446–456. DOI: 10.1007/s00233-004-0131-3
5. Kozhukhov, I. B. 1981, “Left chain semigroups”, *Semigroup Forum*, vol. 22, pp. 1–8. DOI: 10.1007/BF02572781
6. Popovich, A. L. & Jones, P. R. 2017, “On congruence lattices of nilsemigroups”, *Semigroup Forum*, vol. 95, no. 2, pp. 314–320. DOI: 10.1007/s00233-016-9837-2
7. Goldberg, M. S. 1983, “Distributive double p-algebras whose congruence lattices are chains”, *Algebra Universalis*, vol. 17, pp. 208–215. DOI: 10.1007/BF01194530
8. Egorova, D. P. 1978, “The congruence lattice of a unary algebra”, *Uporyadochennye mnojstva i reshetki: Mezhvuzovskii nauchnii sbornik (Ordered sets and lattices)*, Saratov, no. 5, pp. 11–44. (Russian)
9. Kartashova, A. V. 2014, “On commutative unary algebras with totally ordered congruence lattice”, *Mathematical Notes*, vol. 95, no. 1, pp. 67–77. DOI: 10.1134/S0001434614010076
10. Szendrei, A. 1986, “Clones in universal algebra”, *Les presses de l'Université de Montréal*, Montréal, 166 p.

11. Hyndman J., Nation J.B. & Nishida J. 2016, "Congruence lattices of semilattices with operators", *Studia Logica*, vol. 104, no 2, pp. 305–316. DOI: 10.1007/s11225-015-9641-0
12. Garcia, P. & Esteva, F. 1995, "On Ockham Algebras: Congruence Lattices and Subdirectly Irreducible Algebras", *Studia Logica*, vol. 55, pp. 319–346. DOI: 10.1007/BF01061240
13. Kartashov, V.K. 1999, "On unars with Mal'tsev operation", *Universal'naya algebra i ee prilozheniya: Tezisy soobshcheniy uchastnikov mezhdunarodnogo seminara, posvyashchennogo pamyati prof. Mosk. gos. un-ta L.A. Skornyakova (Universal algebra and application: theses of Int. workshop dedicated memory of prof. L. A. Skornyakov)*, Volgograd, pp. 31–32. (Russian)
14. Usoltsev, V.L. 2021, "On Rees closure in some classes of algebras with an operator", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 22, no. 2(78), pp. 271–287. (Russian) DOI: 10.22405/2226-8383-2018-22-2-271-287
15. Usoltsev, V.L. 2008, "Unars with ternary Mal'tsev operation", *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 63, no. 5, pp. 201–202; translated in *Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, no. 5, pp. 986–987. DOI: 10.1070/RM2008v063n05ABEH004572
16. Usoltsev, V.L. 2005, "On subdirectly irreducible unars with Mal'tsev operation", *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya "Estestvennye i fiziko-matematicheskie nauki"*, vol. 4, pp. 17–24 (Russian).
17. Usoltsev, V.L. 2012, "On polynomially complete and Abelian unars with Mal'tsev operation", *Uchenye Zapiski Orlovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, vol. 6(50), part 2, pp. 229–236. (Russian)
18. Usoltsev, V.L. 2014, "On Hamiltonian ternary algebras with operators", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 15, no. 3(51), pp. 100–113. (Russian) DOI: 10.22405/2226-8383-2014-15-3-100-113
19. Maróti M., McKenzie R. 2008, "Existence theorems for weakly symmetric operations", *Algebra Universalis*, vol. 59, no. 3-4, pp. 463–489. DOI: 10.1007/s00012-008-2122-9
20. Bulatov A., Krokhin A. & Jeavons P. 2005, "The complexity of constraint satisfaction: An algebraic approach", *Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra*, Berlin, Springer-Verlag, pp.181–213. DOI: 10.1007/1-4020-3817-8_8
21. Baker, K. A. & Pixley, A. 1975, "Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems", *Math. Zeitschrift*, vol. 143, pp. 165–174. DOI: 10.1007/BF01187059
22. Marković, P. & McKenzie, R. 2008, "Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms", *Algebra Universalis*, vol. 58, pp. 119–128. DOI: 10.1007/s00012-008-2049-1
23. Usoltsev, V.L. 2021, "Subdirectly Irreducible Algebras in One Class of Algebras with One Operator and the Main Near-Unanimity Operation", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 42, no. 1, pp. 206–216. DOI: 10.1134/S199508022101025X
24. Usoltsev, V.L. 2016, "On congruence lattices of algebras with one operator and basic near-unanimity operation", *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Povolzhya*, vol. 2, pp. 28–30 (Russian).
25. Wenzel, G.H. 1970, "Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f \rangle$ ", *Archiv der Mathematik, Basel*, vol. 21, pp. 256–264. DOI: 10.1007/BF01220912
26. Lata, A.N. 2017, "On congruence coherent Rees algebras and algebras with an operator", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 18, no. 2(62), pp. 154–172. (Russian) DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-2-154-172

-
27. Usoltsev, V.L. 2021, "The subdirect irreducibility and the atoms of congruence lattices of algebras with one operator and the symmetric main operation", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 22, no. 2(78), pp. 257–270. (Russian) DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-2-257-270
28. Usoltsev, V.L. 2010, "Simple and pseudosimple algebras with operators", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 164, no. 2, pp. 281-293. DOI: 10.1007/S1095800997306

Получено: 18.12.2023

Принято в печать: 21.03.2024