ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 1.

УДК 517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-62-102

Исследование структуры слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического биллиарда с полиномиальным потенциалом[1]

С. Е. Пустовойтов

Пустовойтов Сергей Евгеньевич — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: pustovoitovse1@mail.ru

Аннотация

В работе рассматривается плоский биллиард, ограниченный эллипсом, в поле потенциальной силы. Была найдена явная формула полиномиального потенциала, сохраняющего интегрируемость такого биллиарда. Для него была изучена структура слоения Лиувилля на всех неособых уровнях энергии с помощью метода разделения переменных. А именно, был предложен алгоритм, который строит бифуркационную диаграмму, а также инвариант Фоменко-Цишанга, исходя из значений параметров потенциала. Кроме того, была изучена топология изоэнергетического многообразия и обнаружены случаи динамики твердого тела, лиувиллево эквивалентные нашему биллиарду.

Ключевые слова: интегрируемая гамильтонова система, биллиард, полиномиальный потенциал, слоение Лиувилля, инвариант Фоменко-Цишанга.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
С. Е. Пустовойтов. Исследование структуры слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического биллиарда с полиномиальным потенциалом // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 62–102.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 1.

UDC 517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-62-102

Research of the structure of the Liouville foliation of an integrable elliptical billiard with polynomial potential

S. E. Pustovoitov

Pustovoitov Sergey Evgenievich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: pustovoitovse1@mail.ru

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-71-10106 в МГУ им. М.В.Ломоносова. Автор является стипендиатом фонда «БАЗИС»

Abstract

In this paper we consider a planar billiard bounded by an ellipse in the potential force field. An explicit formula of the polynomial potential preserving integrability of such a billiard was found. The structure of the Liouville foliation at all non singular energy levels was studied using the method of separation of variables. Namely, an algorithm that constructs the bifurcation diagram and the Fomenko-Zieschang invariants from the values of the parameters of the potential was proposed. In addition, the topology of the isoenergetic manifold was studied and the cases of rigid body dynamics, which are Liouville equivalent to our billiard, were established.

Keywords: integrable Hamiltonian system, billiard, polynomial potential, Liouville foliation, Fomenko-Zieschang invariant.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
S. E. Pustovoitov, 2024, "Research of the structure of the Liouville foliation of an integrable elliptical billiard with polynomial potential" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 62–102.

1. Введение

Под понятием математического биллиарда скрывается обширный класс динамических систем. Классическое определение, восходящее к работам Дж. Биркгофа [1] и К. Якоби [2], гласит, что математический биллиард является динамической системой, описывающей равномерное движение материальной точки в плоской области, ограниченной некоторым контуром, с абсолютно упругим отражением от границы. Конечно же, такая система является гамильтоновой системой с двумя степенями свободы, и в качестве ее гамильтониана выступает кинетическая энергия точки. Согласно знаменитой гипотезе, предложенной Дж. Биркгофом, плоский выпуклый биллиард с гладкой границей допускает первый интеграл (т.е. закон сохранения), независимый с гамильтонианом, только если границей биллиарда выступает эллипс. В последние годы появился ряд работ, посвященных продвижению в доказательстве этой гипотезы. Так, В. Ю. Калошин и А. Соррентино в [3] показали, что при малом интегрируемом возмущении эллиптического биллиарда результирующей границей может быть лишь эллипс. В то же время, А. А. Глюцук в [4], совместно с М. Бялым и А. Е. Мироновым, показал, что биллиард обладает полиномиальным первым интегралом, если и только если он ограничен дугами софокусных коник и допустимых прямых. Дополнительно, случай интегрируемых эллиптико-гиперболических биллиардов был рассмотрен В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) в [5] с точки зрения топологии слоения Лиувилля их фазового четырехмерного пространства и его трехмерного неособого изоэнергетического сечения, т.е. их разбиения на общие поверхности уровней интегралов. А именно, была предложена некоторая конечная классификация таких биллиардов, и для каждого класса был вычислен соответствующий инвариант слоения – инвариант Фоменко-Цишанга, или т.н. меченые молекулы.

Одно из основных преимуществ классических математических биллиардов перед другими динамическими системами состоит в их наглядности. Многие утверждения, требующие громоздких вычислений в системах механики, таких как случаи динамики твердого тела или геодезические потоки, могут быть доказаны из элементарных геометрических соображений. Тем не менее, как было показано, интегрируемых случаев классический биллиардов весьма ограниченное число. В связи с этим, были рассмотрены многие обобщения классических случаев. Например, В. В. Ведюшкиной была предложена конструкция интегрируемой биллиардной книжки, описывающей биллиардное движение на некотором классе конечных двумерных клеточных комплексов. Теория биллиардных книжек была развита в совместных работах В. В. Ведюшкиной, В. А. Кибкало, А. Т. Фоменко и И. С. Харчевой в [6]-[7] . С другой стороны, можно снабдить классический биллиард действием магнитного поля. В работе М. Бялого

и А. Е. Миронова [8] было показано, что почти для всех значений сигнатуры магнитного поля выпуклый магнитный биллиард интегрируем тогда и только тогда, когда он ограничен окружностью. Анализ слоения Лиувилля такого биллиарда был проведен В. В. Ведюшкиной и автором в [9].

В настоящей работе мы остановимся на биллиарде внутри плоской области, ограниченной эллипсом, в потенциальном поле. Как и в случае других обобщений, встает вопрос интегрируемости такого биллиарда. Так, критерий интегрируемости с дополнительным интегралом определенного вида был приведен В. В. Козловым в [10], а интегрируемые потенциалы в форме многочлена Лорана (их общий вид) были описаны В. И. Драговичем в [11]. Мы же ограничимся классом полиномиальных потенциалов и изучим структуру слоения Лиувилля фазового четырехмерного пространства M^4. Так, анализ слоений неособых изоэнергетических подмногообразий для биллиарда с потенциалом второго порядка (упругим потенциалом Гука) провел И. Ф. Кобцев в [12], а четвертого порядка – автор в [13]. Данная же работа является обобщением предыдущих двух для интегрируемого полиномиального потенциала произвольного порядка. Для этого мы используем язык 3-атомов и инвариантов Фоменко-Цишанга, изложенный в [14]. Главным результатом работы является алгоритм, позволяющий вычислить такой инвариант слоения для любого неособого уровня энергии, а также построить бифуркационную диаграмму для каждого конкретного потенциала. Помимо этого, была обнаружена лиувиллева эквивалентность данного биллиарда с интегрируемыми системами динамики твердого тела, и установлен топологический тип неособых изоэнергетических многообразий. Таким образом, настоящая работа подводит нас ближе к решению вопроса, сформулированного А. Т. Фоменко, о реализации структур и особенностей произвольной интегрируемой системы с помощью биллиарда с точки зрения лиувиллевой эквивалентности.

Автор выражает благодарность А. Т. Фоменко и В. В. Ведюшкиной за многочисленные обсуждения и ценные научные советы, а также В. И. Драговичу за важный комментарий, определивший постановку задачи.

2. Необходимые определения

Пусть на симплектическом многообразии (M^4, ω) задана автономная гамильтонова динамическая система $v = sgrad(H) := \omega^{-1}dH$ с гамильтонианом H. Такая система называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если она допускает первый интеграл F, функционально независимый с гамильтонианом, при этом векторные поля $sgrad(H)$ и $sgrad(F)$ полны. *Слоением Лиувилля* в данном случае называется разбиение многообразия M^4 на на общие поверхности уровней интегралов $\{H = const, F = const\}$. Отметим, что такие поверхности являются инвариантными для потоков первых интегралов. Согласно знаменитой *теореме Лиувилля*, компактный регулярный слой такого слоения диффеоморфен двумерному тору, называемому *тором Лиувилля*, при этом слоение в четырехмерной окрестности такого тора устроено тривиально. Преимущественно в работе мы изучаем слоение Лиувилля неособого изоэнергетического подмногообразия $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = const\}$ (т.е. $dH \neq 0$ для любой точки $x \in Q^3$), для которого дополнительный интеграл F является *функцией Ботта*. Это означает, что критические точки функции F на Q^3 организуются либо в систему непересекающихся окружностей, либо в систему двумерных торов, либо в систему бутылок Клейна. Потребуем, что системе соответствуют только критические окружности. Тогда особые слои слоения Лиувилля, на которых лежат эти окружности, вместе со своими трехмерными окрестностями образуют некоторые расслоенные ориентируемые многообразия с краем. Класс эквивалентности таких многообразий с точностью до послойного диффеоморфизма, сохраняющего их ориентацию и ориентацию критических окружностей, называется *3-атомом*, при этом такое отношение эквивалентности назовем *лиувиллевым*. Определение и свойства 3-атомов см. в ра-

ботах А.Т.Фоменко [17]-[20]. Все 3-атомы были классифицированы А. Т. Фоменко, А. В. Болсиновым и А. А. Ошемковым в [14] и описывают боттовские бифуркации торов Лиувилля. Забегая вперед, отметим, что в нашей работе будут встречаться только 3-атомы A, A^*, атомы серий B_k и C_k, где k – количество критических окружностей (рис. 1). Рассмотрим теперь

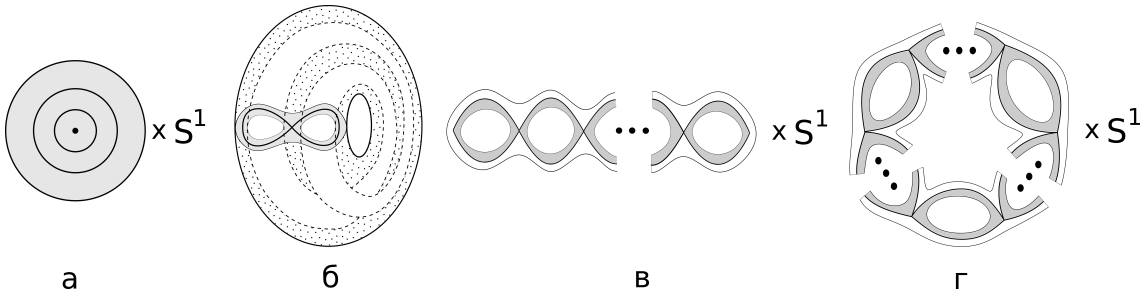


Рис. 1: Примеры 3-атомов. На рис. а изображен атом A, на рис. б – атом A^*, на рис. в – атом серии B_k, на рис. г – атом серии C_k

базу слоения Лиувилля неособого многообразия Q^3. Такая база является одномерным комплексом и называется *графом Риба*. Вершины графа соответствуют некоторым критическим слоям, а перестройкам торов Лиувилля через эти слои – 3-атомы. Таким образом, соотнесем вершинам соответствующие 3-атомы. Полученный инвариант слоения называется *грубым инвариантом Фоменко* или же *грубой молекулой*. Отметим, что каждой внутренней точке графа Риба соответствует тор Лиувилля. Дополним теперь грубую молекулу числовыми метками, полностью описывающими, как именно граничный тор Лиувилля одного 3-атома переходит в граничный тор другого при движении по ребру, соединяющего эти атомы. Полученный инвариант назовем *инвариантом Фоменко-Цишанга*, или *меченой молекулой*. Более подробно то, как именно определяются метки, описано в [14]. Оказывается, построенный таким образом инвариант является полным инвариантом лиувиллевой эквивалентности. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 1. *(Фоменко-Цишанг) Системы v_1 и v_2 на Q_1^3 и Q_2^3 лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

3. Постановка задачи. Интегрируемость

Рассмотрим математический биллиард внутри плоской области Ω, ограниченной эллипсом, заданным уравнением $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ в декартовых координатах (здесь $a > b > 0$). Попадая на границу, материальная точка отражается от нее абсолютно упруго. Положим, что на точку действует некоторый потенциал $W(x, y) \in C^\infty(\Omega)$. Таким образом, ее движение удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -W_x \\ \ddot{y} = -W_y \end{cases} \tag{1}$$

Фазовым пространством этой системы является симплектическое многообразие (M^4, ω). Многообразие M^4 имеет следующий вид:

$$M^4 = T^*\Omega / \{(\vec{x}_b, \vec{p}_i(\vec{x}_b)) \sim (\vec{x}_b, \vec{p}_r(\vec{x}_b))\}, \tag{2}$$

то есть является кокасательным расслоением биллиардной области Ω, факторизованным на своей границе согласно закону отражения (здесь $\vec{x}_b$ – точка на границе биллиарда, $\vec{p}_i(\vec{x}_b)$ и $\vec{p}_r(\vec{x}_b)$ – импульсы материальной точки при попадании на границу биллиарда в точке $\vec{x}_b$ и при

отражении от нее соответственно). Симплектическая структура ω имеет канонический вид в координатах (x, y, p_x, p_y):

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Описанная таким образом динамическая система является гамильтоновой на фазовом пространстве (M^4, ω) с гамильтонианом следующего вида:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + W(x, y) \tag{4}$$

В [15] было доказано, что если материальная точка в таком биллиарде движется по инерции (т.е. $W \equiv 0$), то система допускает следующий первый интеграл движения:

$$\Lambda = \frac{p_x^2}{a} + \frac{p_y^2}{b} - \frac{(xp_y - p_x y)^2}{ab}, \tag{5}$$

значение которого является параметром каустики $\lambda = \Lambda$, принадлежащей следующему однопараметрическому семейству софокусных квадрик:

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1 \tag{6}$$

Этот первый интеграл функционально независим с гамильтонианом H почти всюду и находится с ним в инволюции относительно симплектической структуры ω. Следовательно, классический биллиард в эллипсе является вполне интегрируемым по Лиувиллю. Топологическим анализом и классификацией такого биллиарда, а также биллиардов, ограниченных квадриками софокусного семейства (6), занималась В. В. Ведюшкина в [5].

Однако в общем случае при произвольном потенциале W интегрируемость нарушается. В. В. Козлов в [10] предложил следующий критерий интегрируемости.

Утверждение 1 (В.В.Козлов). *Биллиард в эллипсе с потенциалом $W \in C^\infty(\Omega)$ допускает первый интеграл вида $G = \Lambda + g(x, y)$, если и только если потенциал W удовлетворяет следующему уравнению:*

$$(a-b)W_{xy} + 3(yW_x - xW_y) + W_{xy}(y^2 - x^2) + xy(W_{xx} - W_{yy}) = 0 \tag{7}$$

Примерами таких потенциалов являются квадратичный потенциал Гука $W = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$ и потенциал четвертой степени вида $W = \beta x^2 + \alpha y^2 + \frac{2(\alpha-\beta)}{a-b}x^2y^2 + \frac{\alpha-\beta}{a-b}(x^4 + y^4)$. Топологический анализ биллиардов с этими потенциалами был проведен И. Ф. Кобцевым в [12] и автором в [13].

Общее решение уравнения (7) в форме полинома Лорана было найдено В. И. Драговичем в работе [11]. В нашей работе мы ограничимся случаем обычного полиномиального потенциала произвольной степени n в декартовой системе координат (примеры таких потенциалов были приведены выше). Опишем сначала некоторые его важные свойства.

Лемма 1. *Общее решение уравнения (7) в виде многочлена*

$$W = \sum_{i=0, j=0}^{i+j=n} a_{i,j} x^i y^j \tag{8}$$

удовлетворяет следующим свойствам:
1) $a_{i,j} = 0$ при $2 \nmid i$ или $2 \nmid j$;
2) пространство решений вида (8) имеет размерность $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Доказательство. Подставим функцию вида (8) в уравнение (7). В полученном уравнении коэффициент при $x^{i-1}y^{j-1}$ имеет следующий вид:

$$(a-b)ija_{i,j} + i(i+j)a_{i,j-2} - j(i+j)a_{i-2,j} = 0, \tag{9}$$

где $i > 0$, $j > 0$, $i + j \leq n + 2$. При этом полагаем, что $a_{-1,i} = a_{i,-1} = a_{i,n+1-i} = a_{i,n+2-i} = 0$ для любого $i \in \overline{0..n+1}$.

Таким образом, дифференциальное уравнение (7) преобразовалось в систему линейных уравнений типа (9) относительно коэффициентов $a_{i,j}$. Заметим, что эта система состоит из четырех независимых подсистем от переменных вида $a_{2k+1,2l+1}$, $a_{2k,2l+1}$, $a_{2k+1,2l}$ и $a_{2k,2l}$ соответственно. Рассмотрим каждую из них по отдельности при условии, что число n четно (для нечетного n доказательство аналогичное).

Начнем с системы на $a_{2k+1,2l+1}$. Рассмотрим уравнение (9) для произвольного нечетного i и $j = n+2-i$. Из условий на систему следует, что $a_{i,j} = 0$. Следовательно, если коэффициент $a_{i-2,j} = 0$, то и $a_{i,j-2} = 0$. Однако, при $i = 1$ и $j = n + 1$ коэффициент $a_{-1,n+1}$ равен нулю по условию на систему. Следовательно, коэффициент $a_{2k+1,2l+1} = 0$ при $2k + 2l + 2 = n$. Рассмотрим теперь уравнение (9) для произвольного нечетного i и $j = n - i$. Из доказанного выше $a_{i,j} = 0$. Проведя аналогичные рассуждения, получим, что $a_{2k+1,2l+1} = 0$ при $2k+2l+2 = n-2$. Таким образом, уменьшая каждый раз значение суммы $i+j$ на два, получим, что $a_{2k+1,2l+1} = 0$ при любых возможных значениях k и l.

Рассмотрим теперь систему на $a_{2k,2l+1}$. Аналогично предыдущему случаю, рассмотрим уравнение (9) при произвольном четном i и $j = n + 1 - i$. Из условий на систему следует, что $a_{i,j} = 0$. Следовательно, если коэффициент $a_{i,j-2} = 0$, то и $a_{i-2,j} = 0$. Однако, коэффициент $a_{n,-1} = 0$ из условий на систему. Следовательно, $a_{2k,2l+1} = 0$ при $2k + 2l + 1 = n - 1$. Таким образом, проведя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, получим, что $a_{2k,2l+1} = 0$ при любых возможных значениях k и l.

Рассуждения для системы на $a_{2k+1,2l}$ повторяют рассуждения для предыдущего случая с точностью до замены индексов i на j. Следовательно, коэффициенты вида $a_{2k+1,2l}$ также равны нулю, что завершает доказательство первого пункта леммы.

Наконец, рассмотрим систему на $a_{2k,2l}$. При $i = 0$ и $j = n + 2$ уравнение (9) становится тождественным $0 = 0$. Обозначим коэффициент $a_{0,n}$ за α_1. При $i + j = n + 2$ коэффициент $a_{i,j} = 0$. Следовательно, значение коэффициента $a_{i,j-2}$ линейно зависит от значения $a_{i-2,j}$, если $i \neq 0$. Таким образом, коэффициент вида $a_{2k,2l}$ является линейной функцией относительно параметра α_1.

Аналогично, при $i = 0$ и $j = n$ уравнение (9) становится тождественным $0 = 0$. Обозначим коэффициент $a_{0,n-2}$ за α_2. По доказанному ранее, при $i + j = n$ коэффициент $a_{i,j} = a_{i,j}(\alpha_1)$. Следовательно, значение коэффициента $a_{i,j-2}$ линейно зависит от значения $a_{i-2,j}$ и параметра α_1, если $i \neq 0$. Таким образом, коэффициент вида $a_{2k,2l}$ является линейной функцией относительно параметров α_1 и α_2.

Проведя аналогичные рассуждения, несложно доказать, что в общем случае коэффициент вида $a_{2k,2l}$ при $2k + 2l = n - 2(m - 1)$ является линейной функцией от параметров α_1, α_2, ..., α_m, при этом $a_{0,n-2(m-1)} = \alpha_m$ для m от единицы до $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Заметим, что параметры α_m были выбраны независимо друг от друга и в исходной системе линейных уравнений каждое уравнение типа (9) было использовано для вычисления значения коэффициента $a_{i,j-2}$. Следовательно, параметры α_m являются координатами в пространстве решений уравнения (7), а размерность этого пространства равняется $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Лемма доказана. □

Замечание 1. *Используя идеи доказательства леммы 1, несложно восстановить алгоритм решения системы линейных уравнений (9) (был впервые проведен В. И. Драговичем в [11]). Известно, что при $2k+2l=n$, решение имеет вид $a_{2k,2l}=\binom{k+l}{k}\alpha_1$. Однако, в произвольном случае зависимость коэффициента $a_{2k,2l}$ от параметров α_m имеет более сложный вид. Тем не менее, общий вид решения уравнения (7) в форме многочлена (8) будет приведен в дальнейшем в эллиптических координатах.*

Перейдем теперь от используемых ранее декартовых координат (x,y) к эллиптическим координатам (λ_1,λ_2). Уравнения перехода имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x^2=\frac{(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)}{a-b}, \\ \\ y^2=\frac{(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{b-a}. \end{cases} \tag{10}$$

Координатными линиями в этой системе координат являются эллипсы и гиперболы, принадлежащие софокусному семейству (6). При этом координата $\lambda_1\in[-a,-b)$ является параметром гиперболы, а координата $\lambda_2\in(-b,\infty)$ является параметром эллипса. Уравнение границы биллиарда имеет вид $\lambda_2=0$.

Замечание 2. *Эллиптические координаты плохи тем, что матрица Якоби является вырожденной на координатных осях $0x$ и $0y$. Поэтому все формулы, которые будут использоваться в дальнейшем, имеют место при $x\neq 0$ и $y\neq 0$, а поведение системы на осях определяется по непрерывности.*

Гамильтониан в эллиптических координатах имеет следующий вид:

$$H=\frac{2(a+\lambda_1)(b+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}\mu_1^2+\frac{2(a+\lambda_2)(b+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\mu_2^2+W(\lambda_1,\lambda_2), \tag{11}$$

где μ_1 и μ_2 являются обобщенными импульсами, соответствующими координатам λ_1 и λ_2 соответственно.

Следующая лемма дает общий вид решения уравнения (7) в форме многочлена (8) в эллиптических координатах.

Лемма 2. *Уравнение (7) в эллиптических координатах (10) имеет следующий вид:*

$$xy\left(\frac{W_1-W_2}{\lambda_1-\lambda_2}-W_{12}\right)=0, \tag{12}$$

где W_i — частная производная функции W по λ_i, и $W_{12}=\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}$.

Общее решение уравнения (7) в форме многочлена (8) имеет следующий вид:

$$W=\frac{P(\lambda_1)-P(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}, \tag{13}$$

где P – произвольный многочлен степени $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1$.

Доказательство. Докажем, что уравнение (12) равносильно уравнению (7). Обратные формулы перехода от эллиптических координат к декартовым имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda_1=\frac{1}{2}(x^2+y^2-a-b-R(x,y)), \\ \\ \lambda_2=\frac{1}{2}(x^2+y^2-a-b+R(x,y)), \end{cases} \tag{14}$$

где $R(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-a+b)^2+4(a-b)y^2}$. Из этой системы получим следующие формулы:

$$\lambda'_{1_x}=\frac{2x(\lambda_1+b)}{\lambda_1-\lambda_2};\quad \lambda'_{1_y}=\frac{2y(\lambda_1+a)}{\lambda_1-\lambda_2};$$

$$\lambda'_{2_x}=-\frac{2x(\lambda_2+b)}{\lambda_1-\lambda_2};\quad \lambda'_{2_y}=-\frac{2y(\lambda_2+a)}{\lambda_1-\lambda_2};$$

$$\lambda''_{1_{xx}}=\frac{2(\lambda_1+b)}{\lambda_1-\lambda_2}-\frac{8x^2(\lambda_1+b)(\lambda_2+b)}{(\lambda_1-\lambda_2)^3};\quad \lambda''_{1_{yy}}=\frac{2(\lambda_1+a)}{\lambda_1-\lambda_2}-\frac{8y^2(\lambda_1+a)(\lambda_2+a)}{(\lambda_1-\lambda_2)^3};$$

$$\lambda''_{2_{xx}}=-\frac{2(\lambda_2+b)}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{8x^2(\lambda_1+b)(\lambda_2+b)}{(\lambda_1-\lambda_2)^3};\quad \lambda''_{2_{yy}}=-\frac{2(\lambda_2+a)}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{8y^2(\lambda_1+a)(\lambda_2+a)}{(\lambda_1-\lambda_2)^3};$$

$$\lambda''_{1_{xy}}=\lambda''_{2_{xy}}=-\frac{4xy((\lambda_1+a)(\lambda_2+b)+(\lambda_1+b)(\lambda_2+a))}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}.$$

Перепишем уравнение (7) в эллиптических координатах. Получим уравнение вида

$$A_1W_1+A_2W_2+A_{11}W_{11}+A_{22}W_{22}+A_{12}W_{12}=0,$$

где коэффициенты A_{ij} имеют следующий вид:

$$A_1=(y^2-x^2+a-b)\lambda''_{1_{xy}}+xy(\lambda''_{1_{xx}}-\lambda''_{1_{yy}})+3(y\lambda'_{1_x}-x\lambda''_{1_y});$$

$$A_2=(y^2-x^2+a-b)\lambda''_{2_{xy}}+xy(\lambda''_{2_{xx}}-\lambda''_{2_{yy}})+3(y\lambda'_{2_x}-x\lambda''_{2_y});$$

$$A_{11}=(y^2-x^2+a-b)\lambda'_{1_x}\lambda'_{1_y}+xy((\lambda'_{1_x})^2-(\lambda'_{1_y})^2);$$

$$A_{22}=(y^2-x^2+a-b)\lambda'_{2_x}\lambda'_{2_y}+xy((\lambda'_{2_x})^2-(\lambda'_{2_y})^2);$$

$$A_{12}=(y^2-x^2+a-b)(\lambda'_{1_x}\lambda'_{2_y}+\lambda'_{2_x}\lambda'_{1_y})+2xy(\lambda'_{1_x}\lambda'_{2_x}-\lambda'_{1_y}\lambda'_{2_y}).$$

Подставим полученные ранее выражения для частных производных эллиптических координат по декартовым в формулы коэффициентов A_{ij} и получим $A_{11}=A_{22}=0$, $A_{12}=4xy(a-b)$, $A_2=-A_1=\frac{4xy(a-b)}{\lambda_1-\lambda_2}$. Таким образом, была доказана равносильность уравнений (12) и (7).

Доказательство того, что функция (13) является решением уравнения (12), состоит в непосредственной подстановке одной формулы в другую. Заметим, что пространство решений вида (13) имеет размерность $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. Действительно, свободный коэффициент c_0 многочлена $P(z)$ сокращается сам с собой в формуле (13). Слагаемое c_1z многочлена $P(z)$ изменяет потенциал W на константу. Следовательно, многочлен P определен с точностью до своей линейной части c_1z+c_0, а оставшиеся его $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ коэффициентов c_2, ..., $c_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}$ являются координатами в пространстве решений.

Докажем, что функция $\frac{\lambda_1^{(m+1)}-\lambda_2^{(m+1)}}{\lambda_1-\lambda_2}$ является многочленом степени $2m$ в декартовых координатах. Действительно,

$$\frac{\lambda_1^{(m+1)}-\lambda_2^{(m+1)}}{\lambda_1-\lambda_2}=\sum_{i=0}^{m}\lambda_1^i\lambda_2^{m-i}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}\lambda_1^i\lambda_2^{m-i}+\lambda_1^{m-i}\lambda_2^i,$$

$$\lambda_1^k\lambda_2^{k+l}+\lambda_1^{k+l}\lambda_2^k=(\lambda_1\lambda_2)^k(\lambda_1^l+\lambda_2^l).$$

Из формул (14) несложно заметить, что функция $\lambda_1\lambda_2$ является многочленом второй степени, а функция $\lambda_1^l+\lambda_2^l$ является многочленом степени $2l$ для любого l. Следовательно, функция вида (13) является многочленом степени n в декартовых координатах. Таким образом, пространство решений вида (13) является подпространством пространства решений вида (8). Согласно лемме 1 эти два подпространства совпадают в силу размерности.

Лемма доказана. □

Замечание 3. *Заметим, что функция (13) является решением уравнения (12) даже в общем случае $P \in C^\infty(\mathbb{R})$ (также проверяется непосредственной подстановкой). Это дает еще больший класс интегрируемых биллиардов с потенциалом, который будет рассмотрен в будущих работах.*

В дальнейшем для определенности положим $c_0 = 0$ и $c_1 = 0$.

Теорема 2. *Следующая функция является первым интегралом эллиптического биллиарда с потенциалом $W = \frac{P(\lambda_1)-P(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}$:*

$$F = -H\lambda_1 + 2(a+\lambda_1)(b+\lambda_1)\mu_1^2 + P(\lambda_1) \tag{15}$$

Интегралы H и F находятся в инволюции и функционально независимы почти всюду. Функция F связана с первым интегралом G из утверждения 1 соотношением $F = -\frac{1}{2}G$.

Доказательство. Сначала докажем, что функция F сохраняется вдоль траекторий между ударами о границу биллиарда. Вычислим значение $\dot{F}$

$$\dot{F} = -H\dot{\lambda_1} + 2\dot{\lambda_1}(b+\lambda_1)\mu_1^2 + 2\dot{\lambda_1}(a+\lambda_1)\mu_1^2 + 4(a+\lambda_1)(b+\lambda_1)\mu_1\dot{\mu_1} + P'(\lambda_1)\dot{\lambda_1}$$

Подставим значения $\dot{\lambda_1}$ и $\dot{\mu_1}$ из уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i = \frac{\partial H}{\partial \mu_i}, \\ \\ \dot{\mu}_i = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \end{cases} \tag{16}$$

Можно убедиться, что после подстановки получим тождественный ноль. А значит, $F = const$ вдоль траекторий между отражениями.

Теперь докажем, что функция F сохраняется при отражении от стенки биллиарда. Заметим, что при отражении значение интеграла H и координаты λ_1 не меняются. Следовательно, достаточно проверить лишь неизменность величины μ_1^2. Отметим, что закон абсолютно упругого отражения от софокусной квадрики в эллиптических координатах можно записать следующим образом: если точка отражается от гиперболы, то вектор скорости изменится по правилу $(\dot{\lambda_1}, \dot{\lambda_2}) \to (-\dot{\lambda_1}, \dot{\lambda_2})$, а если точка отражается от эллипса, то вектор скорости изменится по правилу $(\dot{\lambda_1}, \dot{\lambda_2}) \to (\dot{\lambda_1}, -\dot{\lambda_2})$. Из уравнений Гамильтона (16) вытекает следующая формула:

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{4(a+\lambda_1)(b+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}\mu_1. \tag{17}$$

Следовательно, вектор импульса (μ_1, μ_2) меняется при отражении аналогично вектору скорости, и значение μ_1^2 остается неизменным.

То, что первые интегралы H и F находятся в инволюции и функционально независимы почти всюду и то, что интеграл F имеет вид $-\frac{1}{2}G$, проверяются непосредственно. Опустим соответствующие выкладки.

Теорема доказана. □

Замечание 4. *Определим две следующие функции:*

$$H_1 = \frac{2(a+\lambda_1)(b+\lambda_1)+P(\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}\mu_1^2 \tag{18}$$

$$H_2 = \frac{2(a+\lambda_2)(b+\lambda_2)+P(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\mu_2^2. \tag{19}$$

Тогда первые интегралы запишутся в виде $H = H_1 - H_2$, $F = \lambda_1 H_2 - \lambda_2 H_1$. При этом вклад потенциала в интеграл G равен $g = 2\frac{\lambda_2 P(\lambda_1)-\lambda_1 P(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}$ и тоже является многочленом от декартовых переменных x и y, причем каждый его моном имеет также четную степень по обеим переменным.

Таким образом, было доказано, что биллиард в эллипсе с потенциалом типа (13) (который является многочленом в декартовых координатах) вполне интегрируем по Лиувиллю, при этом дополнительный первый интеграл F задан явно. Проведем топологический анализ такой биллиардной системы, используя язык полных инвариантов Фоменко-Цишанга и бифуркационных диаграмм.

4. Геометрическое разделение переменных. Области возможного движения

Зафиксируем уровень интегралов $H = h$ и $F = f$. Вычислим компоненты вектора скорости материальной точки в зависимости от ее координат. Чтобы это сделать, выразим значение μ_1 из формулы (17), подставим его в формулу (15) и выразим из нее значение $\dot{\lambda_1}$. Аналогичными рассуждениями можно выразить значение $\dot{\lambda_2}$, заметив, что

$$F = -H\lambda_2 + 2(a+\lambda_2)(b+\lambda_2)\mu_2^2 + P(\lambda_2).$$

Таким образом, была получена следующая формула:

$$\dot{\lambda_i} = \pm\frac{\sqrt{8}}{\lambda_2-\lambda_1}\sqrt{V(\lambda_i)(a+\lambda_i)(b+\lambda_i)}, \tag{20}$$

где $V(z) = f + hz - P(z)$–многочлен степени $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1$. В декартовых координатах получим следующее:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{d}{\lambda_2-\lambda_1}\left((-1)^I\sqrt{V(\lambda_1)(a+\lambda_2)(b+\lambda_1)} + (-1)^J\sqrt{V(\lambda_2)(a+\lambda_1)(b+\lambda_2)}\right) \\ \dot{y} = \frac{d}{\lambda_2-\lambda_1}\left((-1)^I\sqrt{-V(\lambda_1)(a+\lambda_1)(b+\lambda_2)} + (-1)^J\sqrt{-V(\lambda_2)(a+\lambda_2)(b+\lambda_1)}\right) \end{cases} \tag{21}$$

где $I, J \in \{0,1\}$, $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-b}}$. В силу того, что $-a \le \lambda_1 \le -b$ и $-b \le \lambda_2$, это условие равносильно следующей системе:

Утверждение 2. *Координаты материальной точки должны удовлетворять следующей системе неравенств:*

$$\begin{cases} V(\lambda_1) \le 0 \\ V(\lambda_2) \ge 0. \end{cases} \tag{22}$$

Доказательство. Заметим, что все четыре подкоренные выражения в системе (21) должны быть не меньше нуля. Пусть $(a+\lambda_1)(b+\lambda_2) \ne 0$. В силу того, что $-a \le \lambda_1 \le -b$ и $-b \le \lambda_2$, $(a+\lambda_1)(b+\lambda_2) > 0$. Но $V(\lambda_2)(a+\lambda_1)(b+\lambda_2) \ge 0$ и $-V(\lambda_1)(a+\lambda_1)(b+\lambda_2) \ge 0$. Следовательно, неравенства системы (22) выполняются.

Аналогичные рассуждения применим для случая $(a+\lambda_2)(b+\lambda_1) \ne 0$. В случае $(a+\lambda_1)(b+\lambda_2) = 0$ и $(a+\lambda_2)(b+\lambda_1) = 0$ имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$, т.е. материальная точка находится в фокусе эллипса. В выражениях из системы (21) появляется неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Пусть без ограничения общности $V(-b) > 0$. Тогда при $\lambda_1 = -b$ и $\lambda_2 \to -b+0$ значение $\dot{y}$ стремится к $\pm\infty$, что невозможно в силу теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных условий. Следовательно $V(\lambda_1) = V(\lambda_2) = V(-b) = 0$, что удовлетворяет системе (22).

Утверждение доказано. □

Определение 1. *Областью возможного (допустимого) движения уровня интегралов $H = h$ и $F = f$ называется образ соответствующего слоя слоения Лиувилля при проекции $p : M^4 \to \Omega$ на биллиардный стол. Иными словами, это замкнутая область на биллиарде, в которой материальная точка может находиться при фиксированных значениях интегралов h и f.*

Следствие 1. *Система неравенств (22) вместе с условием $\lambda_2 \leq 0$ (условие того, что движение происходит внутри биллиардного стола) задает область возможного движения уровня интегралов $H = h$ и $F = f$.*

Доказательство. В качестве начальных условий положим точку (λ_1, λ_2), удовлетворяющей системе (22), и вектор скорости в этой точке, вычисленный по формулам (21). Согласно определению области возможного движения, точка с координатой (λ_1, λ_2) ей принадлежит. При этом по утверждению 2 траектория движения, определенная этими начальными условиями, полностью лежит в области, определенной системой (22).

Следствие доказано. □

Замечание 5. *Такой подход в случае классического биллиарда был использован в [15] для описания его регулярных и критических траекторий. В последствии М. П. Харламовым в [16] был разработан общий подход к изучению динамических систем, допускающие уравнения вида (20). Заметим, что любая область возможного движения ограничена софокусными эллипсами и гиперболами, принадлежащими однопараметрическому семейству (6), причем значениями параметров этих границ являются корни многочлена V или ноль. Иными словами, область возможного движения является объединением прямоугольников в эллиптических координатах. В этом смысле формулу (20) и систему (21) называют формулами геометрического разделения переменных.*

Замечание 6. *Также заметим, что если точка с координатами (λ_1, λ_2) не является фокусом граничного эллипса, то из системы (21) вытекает три возможности: 1) точке (λ_1, λ_2) соответствуют две пары взаимно обратных векторов скорости, если ни λ_1, ни λ_2 не являются корнями многочлена V; 2) этой точке соответствует одна пара взаимно обратных векторов скорости, если только одно из значений λ_1 или λ_2 является корнем многочлена V (эти вектора являются касательными к квадрике с параметром, равным той координате λ_i, которая является корнем); 3) точке соответствует единственный нулевой вектор скорости, если оба значения λ_1 и λ_2 являются корнями многочлена V.*

Рассмотрим теперь случай $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$, т.е. точка с координатами (λ_1, λ_2) является фокусом (без ограничения общности, считаем, что это фокус с координатами $x = \sqrt{a-b}$ и $y = 0$). По утверждению 2 многочлен V имеет вид $V(z) = (z+b)R(z)$, где $R(-b) \geq 0$. Рассмотрим точку в окрестности этого фокуса с координатами $x = \sqrt{a-b} + k cos\phi$ и $y = k sin\phi$ при некотором значении ϕ. Согласно формулам (21), пределы значений компонент вектора скорости при $k \to 0$ имеют следующий вид:

$$\lim_{k\to 0} \dot{x} = C cos\phi,$$

$$\lim_{k\to 0} \dot{y} = C sin\phi,$$

где $C = \sqrt{2W(-b)}$. Следовательно, фокусам соответствует целая окружность равных по длине векторов скорости при $R(-b) \neq 0$ или один нулевой вектор скорости при $R(-b) = 0$.

Следующая теорема позволяет определить регулярные значения первых интегралов H и F.

Теорема 3. *Пусть при фиксированных значениях первых интегралов $H = h$ и $F = f$ каждая компонента связности области возможного движения имеет непустую внутренность, и каждой внутренней точке области возможного движения соответствует четыре вектора скорости. Тогда прообраз этой области при проекции p гомеоморфен объединению нескольких двумерных торов. При этом, каждой односвязной компоненте связности области возможного движения соответствует один тор Лиувилля, а каждой неодносвязной (кольцевой) компоненте – два тора. Более того, слоение Лиувилля в окрестности этих торов в изоэнергетическом пространстве $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = const\}$ устроено тривиально.*

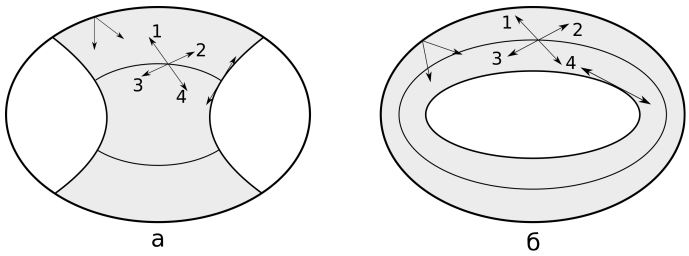


Рис. 2: Регулярные области возможного движения. Стрелками изображены векторы скорости. Внутренним точкам соответствуют четыре вектора, граничным точкам – два. На граничном эллипсе вектора 1-3 и 2-4 склеиваются согласно биллиардному закону отражения.

Доказательство. Из замечания 6 следует, что фокус не принадлежит области возможного движения. Следовательно, согласно утверждению 2 существуют две возможности: 1) каждая компонента связности области возможного движения ограничена двумя дугами софокусных гипербол и дугами эллипсов (рис. 2, а); 2) каждая компонента связности ограничена двумя софокусными эллипсами (рис. 2, б). Рассмотрим случай односвязной области. Разобьем область возможного движения на дуги софокусных эллипсов. Точки этих дуг оснастим векторами скорости согласно формулам (21). По условию теоремы, каждой внутренней точке дуги эллипса соответствуют четыре вектора скорости, обозначенные 1, 2, 3 и 4. Заметим, что на гиперболических границах вектор 1 склеивается с вектором 2, а вектор 3 – с вектором 4. Следовательно, прообраз каждой такой дуги разбиения в Q^3 гомеоморфен двум не пересекающимся окружностям, соответствующим парам векторов 1-2 и 3-4. Таким образом, в прообразе всей компоненты связности области возможного движения лежат два цилиндра, которые склеены друг с другом по границам в силу того, что на эллиптических границах области возможного движения вектор 1 склеивается с вектором 3, а вектор 2 – с вектором 4. При этом ориентация граничных окружностей склейки двух цилиндров одинакова. Следовательно, итоговый прообраз гомеоморфен двумерному тору.

Аналогичные рассуждения проведем в случае неодносвязной компоненты связности области возможного движения. Разобьем всю область на софокусные эллипсы и оснастим их точки четырьмя векторами скорости, обозначенными 1, 2, 3 и 4. Прообраз каждого такого эллипса в Q^3 гомеоморфен четырем окружностям, соответствующим векторам скорости. Таким образом, в прообразе всей компоненты связности области возможного движения лежат четыре цилиндра, при этом цилиндры, соответствующие векторам 1 и 3, и цилиндры, соответствующие векторам 2 и 4, склеены друг с другом по своим границам в силу тех же свойств. Следовательно, получили два тора, соответствующие движению по часовой стрелке и против часовой стрелки материальной точки внутри кольцевой области возможного движения.

Заметим, что в силу непрерывности для любого f', лежащего в достаточно малой окрестности значения f, каждой внутренней точке области возможного движения также соответствуют четыре вектора скорости. Следовательно, слоение Лиувилля в окрестности описанных торов устроено тривиально.

Теорема доказана. □ Таким образом, если при значениях интегралов $H = h$ и $F = f$ область возможного движения удовлетворяет условиям теоремы 3, эти значения являются регулярными.

5. Бифуркационные диаграммы

Согласно следствию 1 изучение областей возможного движения и их бифуркаций (а следовательно, и изучение бифуркаций торов Лиувилля) можно свести к изучению свойств многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$. А именно, обозначим пять условий на многочлен V:

$C1$) существует точка $z = e \in (-a, -b)$, которая является точкой экстремума многочлена V, и $V(e) = 0$;

$C2$) существует точка $z = e \in (-b, 0)$, которая является точкой экстремума многочлена V, и $V(e) = 0$;

$C3$) $V(0) = 0$, и V возрастает в окрестности нуля;

$C4$) $V(-a) = 0$;

$C5$) $V(-b) = 0$.

Лемма 3. *Зафиксируем значение f. Условие теоремы 3 выполнено тогда и только тогда, когда не выполнено ни одно из условий $C1 - C5$.*

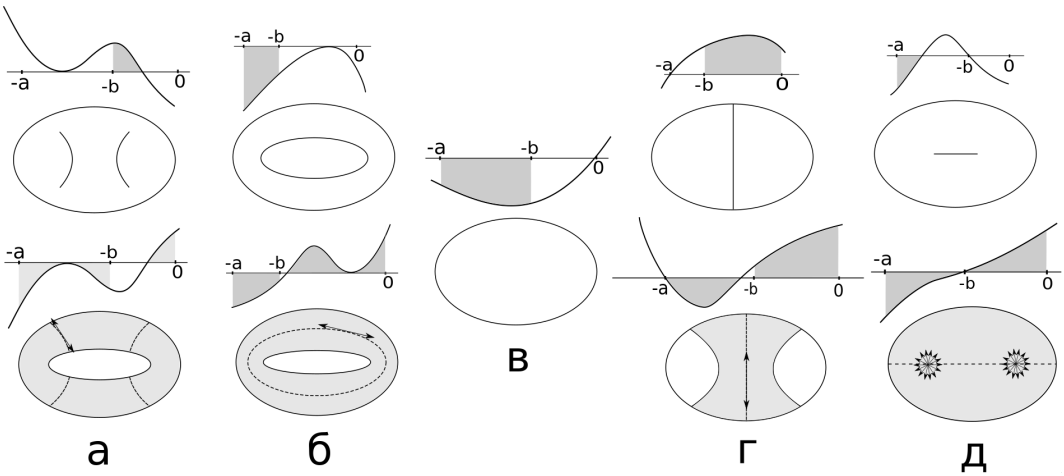


Рис. 3: Примеры критических областей возможного движения. Изображен график многочлена V в координатах $0zV$ и соответствующая область возможного движения. Рисунок а соответствует условию $C1$, рисунок б – условию $C2$, рисунок в – условию $C3$, рисунок г – условию $C4$, рисунок д – условию $C5$

Доказательство. **Необходимость.** От противного. Пусть выполнено условие $C1$, при этом точка $z = e$ является точкой минимума многочлена V. Тогда, по утверждению 2, существует одномерная компонента связности области возможного движения – дуга гиперболы $\lambda_1 = e$. Если же точка $z = e$ является точкой максимума многочлена V, то по замечанию 6 во внутренности области возможного движения существует точка с координатами (e, λ_2), которой соответствуют лишь два вектора скорости. Получили противоречие (рис. 3, а). Доказательства того, что условия $C2 - C4$ не выполняются, аналогичны (рис. 3, б, в и г соответственно).

Пусть выполнено условие $C5$. Если при этом $V'(-b) > 0$, то фокусы принадлежат области возможного движения, при этом им соответствует целая окружность векторов (см. замечание 6). Если $V'(-b) = 0$, то фокусам соответствует один нулевой вектор. Если $V'(-b) < 0$, то по

утверждению 2 существует одномерная компонента связности области возможного движения – отрезок фокальной прямой (рис. 3, д).

Достаточность. Доказательство достаточности повторяет доказательство необходимости, обращенное в противоположную сторону.

Лемма доказана. □

Построим теперь бифуркационную диаграмму (множество критических значений первых интегралов $H = h$, $F = f$ на плоскости $\mathbb{R}^2(h, f)$) рассматриваемого биллиарда. Отметим, что корни многочлена V'' не зависят от значений h и f, а точки экстремумов многочлена V не зависят от значений f (см. формулу (20)). Пусть для некоторого значения $h = h_0$ точка $z = e \in (-a, 0)$ является точкой экстремума многочлена V (то есть $V'(e) = 0$ и $V''(e) \neq 0$). Тогда по теореме о неявной функции существует функция $e(h)$ в окрестности точки h_0, т.ч. $e(h_0) = e$ и $V'(e(h)) = 0$ (то есть $e(h)$ также является точкой экстремума многочлена V). Функцию $e(h)$ можно продолжить на отрезок $[h_1, h_2]$, где $V''(e(h_1)) = V''(e(h_2)) = 0$ и для любого $h \in (h_1, h_2)$ выполняется следующее: $V''(e(h)) \neq 0$.

Теорема 4. *Пусть $e_i(h)$ – построенные выше функции на своих областях определения (экстремумы многочлена $V(z)$ при фиксированном значении h). Тогда бифуркационная диаграмма состоит из дуг следующих кривых (возможно, не всех):*

$d1_i$) $V(e_i(h)) = 0$ при $e_i(h) \in [-a, -b]$;

$d2_i$) $V(e_i(h)) = 0$ при $e_i(h) \in [-b, 0]$;

$d3$) $f = 0$ при $h \geq 0$;

$d4$) $V(-a) = 0$;

$d5$) $V(-b) = 0$.

Доказательство. Зафиксируем значение h и f. Заметим, что принадлежность точки (h, f) дуге $d1_i$ эквивалентно выполнению условия $C1$, принадлежность дуге $d2_i$ эквивалентно условию $C2$, дуге $d3$ – условию $C3$, дуге $d4$ – условию $C4$, и дуге $d5$ – условию $C5$. Из леммы 3 и теоремы 3 следует, что точки образа отображения момента $\mathcal{F} : M^4 \to \mathbb{R}^2(h, f)$, не лежащие на перечисленных дугах, являются регулярными (им соответствует объединение торов в изоэнергетическом пространстве Q^3, причем слоение Лиувилля в окрестности этих торов устроено тривиально).

Пусть точка (h, f) принадлежит одной из дуг $d1_i$. Следовательно, существует точка на биллиарде с координатами $\lambda_1 = e_i$ и $\lambda_2 \neq -b$, для которой $P(\lambda_1) = f + h\lambda_1$, $P'(\lambda_1) = h$. Кроме того, согласно формулам (20) и (17) получим $\mu_1 = 0$. С учетом этого, вычислим полные дифференциалы первых интегралов H и F в точке (λ_1, λ_2):

$$dH = -\frac{4(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_2 d\mu_2 + \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2}d\lambda_2$$

$$dF = -\lambda_1 dH.$$

Следовательно, в точке (λ_1, λ_2) ранг матрицы Якоби отображения момента $\mathcal{F}$ падает, т.е. точка (h, f) является особой, а дуга $d1_i$ принадлежит бифуркационной диаграмме. Аналогично можно показать, что дуга $d2_i$ также принадлежит бифуркационной диаграмме.

Рассмотрим теперь точку (h, f) на дуге $d4$. Согласно замечанию 6 на оси $0y$ найдется точка с координатами $\lambda_1 = -a$ и $\lambda_2 \neq -b$, в которой $p_x = 0$. Вычислим полные дифференциалы первых интегралов H и $G = -2F$:

$$dH = p_y dp_y + W'_y dy$$

$$dG = \frac{2}{a}p_y dp_y + g'_y dy.$$

Напомним, что функции W и g являются многочленами от декартовых координат, при этом их мономы имеют четную степень по обеим переменным. Следовательно $W'_y(0,y) = (W(0,y))'_y$ и $g'_y(0,y) = (g(0,y))'_y$. Из формул на функции W и g, приведенных в лемме 2 и замечании к теореме 2, получим следующее:

$$W(0,y) = \sum_{i=2}^{n/2} c_i \sum_{k=0}^{i} (-a)^{i-k}(y^2-b)^k$$

$$g(0,y) = -2\sum_{i=2}^{n/2} c_i \sum_{k=1}^{i} (-a)^{i-k-1}(y^2-b)^k,$$

где c_i – коэффициенты многочлена P. Таким образом, несложно заметить, что $g'_y = \frac{2}{a}W'_y$. Следовательно, в точке (λ_1, λ_2) ранг матрицы Якоби отображения момента $\mathcal{F}$ падает, т.е. точка (h, f) является особой, а дуга $d4$ принадлежит бифуркационной диаграмме. Аналогично можно показать, что дуга $d5$ также принадлежит бифуркационной диаграмме.

Наконец, рассмотрим дугу $d3$. В отличие от предыдущих случаев, на биллиарде нет точек падения ранга матрицы Якоби отображения момента $\mathcal{F}$. Перестройка торов Лиувилля, соответствующая точке (h, f) этой дуги, происходит в силу негладкой природы биллиарда на его границе. Более точно, в следующем разделе будет показано, что точкам дуги $d3$ соответствуют несколько минимальных 3-атомов A, образы критической окружности которых при проекции на биллиард являются дугами граничного эллипса (рис. 3, в).

Теорема доказана. □

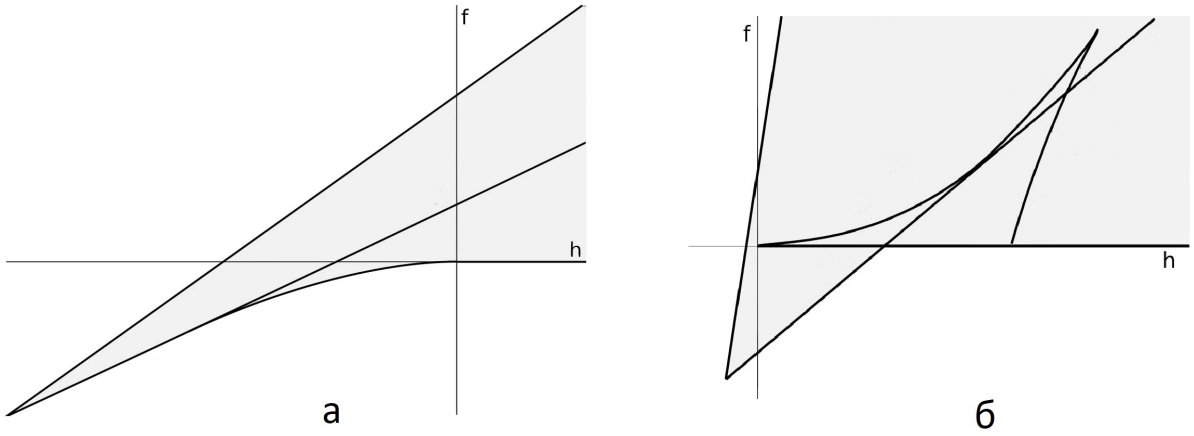


Рис. 4: Примеры бифуркационных диаграмм. На рис. а изображен случай (гуковского) потенциала второй степени, на рис. б – случай потенциала четвертой степени.

Следствие 2. *Регулярными областями возможного движения (т.е. образами торов Лиувилля при проекции p на биллиард) являются только области, описанные в теореме 3.*

Замечание 7. *Из неравенств (21) следует, что если при фиксированных значениях первых интегралов h и f движение не происходит, если выполнено одно из двух условий: $V(z) > 0$ для любого $z \in [-a,-b]$; $V(z) < 0$ для любого $z \in [-b,0]$. Следовательно, образ отображения момента на каждом уровне гамильтониана $H = h$ ограничен двумя кривыми: 1) кривой $d1_i$, если соответствующая ей точка $z = e_i$ является глобальным минимумом многочлена V на полуинтервале $[-a,-b)$, либо кривой $d4$, если им является точка $z = -a$; 2) кривой $d2_i$, если точка $z = e_i$ является глобальным максимумом многочлена V на отрезке $[-b,0]$, либо кривой $d3$ или $d5$, если им является точка $z = 0$ или $z = -b$ соответственно.*

Замечание 8 (Вырожденные орбиты и точки ранга 0.). *Найдем теперь наклон дуг* $d1_i$ *и* $d2_i$*:*

$$0 = (V(e_i(h)))'_h = f'_h + e_i(h) + e'_i(h)V'(e_i) = f'_h + e_i(h).$$

Таким образом, $f'_h = -e_i(h)$*, при этом* $e_i(h) \in [-a, 0]$*. Следовательно, все дуги* $d1_i$ *и* $d2_i$ *монотонно возрастают. Если две дуги* $d1_i$ *и* $d1_j$ *(или* $d2_i$ *и* $d2_j$*) касаются при некотором значении* h_0*, то* $e_i(h_0) = e_j(h_0) =: e$*. Таким образом, многочлен* $V'(z)$ *имеет кратный корень* $z = e$*, и следовательно* $V''(e) = 0$*. Иными словами, обе функции* $e_i(h)$ *и* $e_j(h)$ *определены либо при* $h \le h_0$*, либо при* $h \ge h_0$*, а точка касания является "клювом" (рис. 5, а). Аналогично, точка касания дуг* $d2_i$ *и* $d3$ *образует "клюв" (рис. 5, б).*

Если дуга $d1_i$ *касается дуги* da *при некотором значении* h_0*, то* $e_i(h_0) = -a$*. Следовательно, функция* $e_i(h)$ *определена либо при* $h \le h_0$*, либо при* $h \ge h_0$ *(рис. 5, в). При значении* h*, для которого* $e_i(h) = -b$*, дуга* $d1_i$ *переходит в дугу* $d2_i$*, а точка касания с дугой* $d5$ *изображена на рис. 5, г. Таким образом, были найдены все точки бифуркационной диаграммы, отвечающие вырожденным орбитам потоков интегралов* $sgrad(H)$ *и* $sgrad(F)$*.*

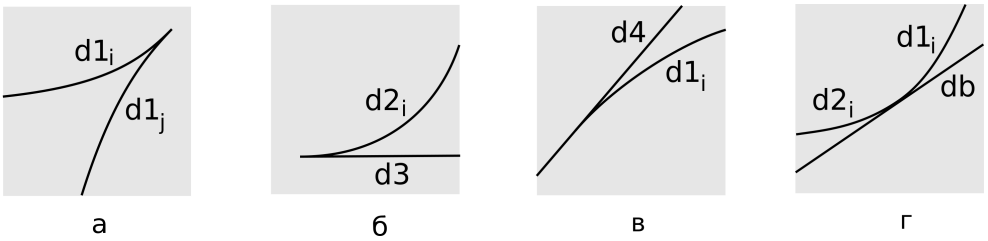


Рис. 5: Образ отображения момента $\mathcal{F}$ в окрестности точки касания дуг бифуркационной диаграммы

Рассмотрим теперь точки пересечения дуг $d1_i$ *и* $d2_j$ *при* $i \ne j$*. Соответствующие точки* $z = e_i(h)$ *и* $z = e_j(h)$ *являются двумя разными корнями многочлена* V *и одновременно его экстремумами, при этом* $e_i(h) \in (-a, -b)$ *и* $e_j(h) \in (-b, 0)$*. Согласно замечанию* 6, точке с координатами $\lambda_1 = e_i$ и $\lambda_2 = e_j$ соответствует нулевой вектор скорости. Таким образом, используя формулы (18) и (19), а также вид многочлена $V(z) = f + hz - P(z)$, получим следующие формулы:

$$dH_1 = \frac{f + h\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}(d\lambda_2 - d\lambda_1) + \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2}d\lambda_1$$

$$dH_2 = \frac{f + h\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}(d\lambda_2 - d\lambda_1) + \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2}d\lambda_2$$

Подставляя полученные выражения в формулы $dH = dH_1 - dH_2$, $dF = d(\lambda_1 H_2 - \lambda_2 H_1)$, получим $dF = dH = 0$. Следовательно, точка (h, f) пересечения дуг $d1_i$ и $d2_j$ является точкой ранга 0. Аналогично, точки пересечения дуги $d1_i$ с дугой $d3$ или $d5$, точки пересечения дуги $d2_i$ с дугой $d4$ или $d5$, а также точки пересечения дуги $d5$ с дугой $d3$ или $d4$ являются точками ранга 0.

Оставим пока вне рассмотрения вопросы о классификации слоений Лиувилля в окрестности слоев, содержащих описанные вырожденные орбиты и невырожденные точки ранга 0 нашей системы. Приведем лишь несколько примеров. А именно, в следующем разделе будет показано, что существует конфигурация многочлена V, для которого появляется вырожденная особенность, изображенная на рис. 5, а, причем дуге $d1_j$ соответствует атом A, а дуге $d1_i$ – атом B. Круговая молекула в этом случае имеет вид, изображенный на рис. 6, а, и такая вырожденная особенность является параболической (рис. 6, б). Или же в случае, изображенном на рис. 5, в, существует конфигурация многочлена V, при которой дуге $d1_i$ соответствует

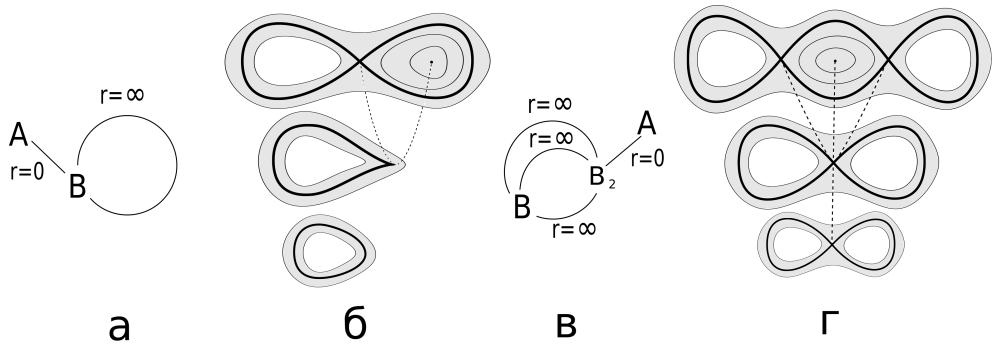


Рис. 6: Примеры круговых молекул и бифуркаций вырожденных особенностей.

атом B_2, дуге $d4$ до точки касания соответствует атом B, а после нее – атом A. Круговая молекула в этом случае имеет вид, изображенный на рис. 6, в, а такая вырожденная особенность является "вилкой " (рис. 6, г).

Также, в дальнейшем будем рассматривать только те значения гамильтониана h_0, для которых на соответствующей вертикальной прямой $h = h_0$ в плоскости $0hf$ нет точек касания дуг бифуркационной диаграммы и точек пересечения ранга 0. В частности это означает, что многочлен V не имеет кратных корней. При этом трехмерная поверхность уровня гамильтониана $\{H = h_0\}$ является невырожденным трехмерным многообразием.

6. Бифуркации областей возможного движения. 3-атомы

Следующие три леммы описывают всевозможные перестройки регулярных областей возможного движения и, как следствие, 3-атомы.

Лемма 4. *Зафиксируем значение интегралов $H = h$ и $F = f$, причем точка (h, f) не является вырожденной или ранга 0. Пусть эта точка лежит на кривой $d1_i$, $d4$ или их пересечении. Тогда такому значению интеграла F соответствуют несколько седловых 3-атомов C_{2k}, B_k или максимальных атомов A в изоэнергетическом многообразии $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$.*

Доказательство. Из предположения того, что точка (h, f) не является вырожденной, следует, что она не принадлежит дугам $d2_i$, $d3$ и $d5$. Следовательно, фокусы граничного эллипса не лежат в области возможного движения. Пусть точка (h, f) лежит на пересечении дуг $d1_i$, которым соответствуют различные точки экстремумов e_i многочлена V. Тогда для этой точки выполнено условие $C1$, при этом не выполнены $C2$, $C3$ и $C5$. Согласно замечанию 6, каждой внутренней точке области возможного движения соответствуют четыре вектора скорости, кроме точек дуг гипербол $\lambda_1 = e_i$, которым соответствуют два вектора скорости. Если точка (h, f) также лежит на дуге $d4$, для нее выполнено условие $C4$, и внутренним точкам области возможного движения, лежащим на вертикальной оси $0y$, также соответствуют два вектора скорости.

Пусть в точке $z = e_{i_1} =: e$ достигается локальный минимум многочлена $V(z)$. При $F \to f-0$ область возможного движения удовлетворяет условию теоремы 3 и имеет компоненты связности, ограниченные двумя софокусными гиперболами с параметрами $\lambda \to e - 0$ и $\lambda \to e + 0$ соответственно (рис. 7, а). Таким образом, в пределе соответствующие компоненты связности области возможного движения становятся одномерными (стягиваются на дуги гиперболы с параметром $\lambda = e$), а прообраз каждой такой компоненты в Q^3 гомеоморфен окружности. Таким образом, слоение Лиувилля в окрестности этой окружности устроено как 3-атом A. Аналогично, если в точке $z = -a$ многочлен $V(z)$ обращается в ноль, при этом в окрестности

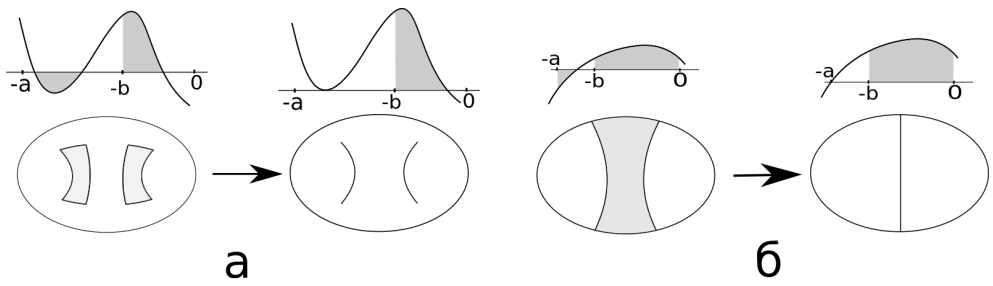


Рис. 7: Перестройки областей возможного движения, соответствующие максимальному атому A. Изображены графики многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и их движение при возрастании значения f, а также соответствующие им области возможного движения.

этого корня он возрастает, соответствующая компонента связности области возможного движения становится одномерной (отрезком оси $0y$), а окрестность прообраза этой компоненты в Q^3 гомеоморфна 3-атому A (рис. 7, б).

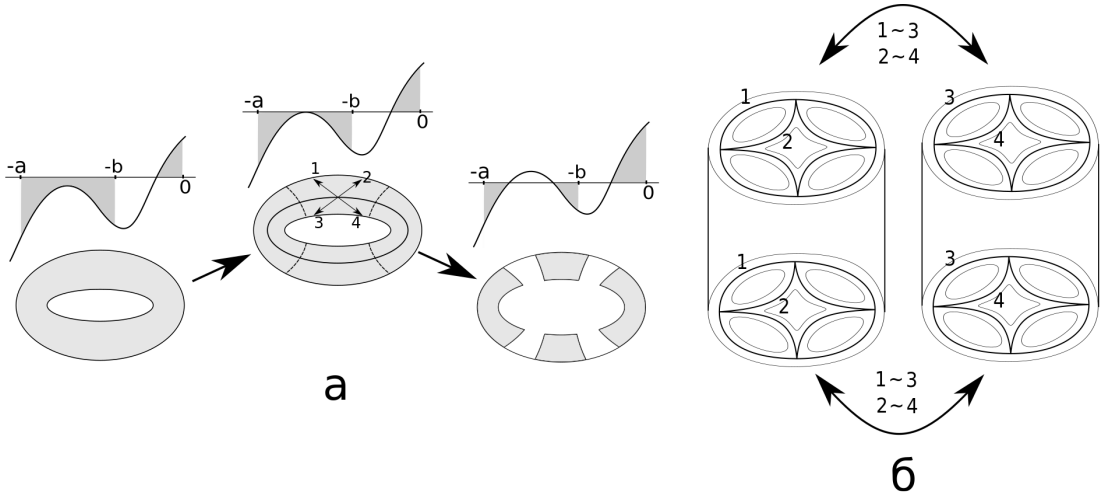


Рис. 8: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому C_4. На рис. а изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в Q^3, при этом цифрами 1-4 обозначены точки, соответствующие векторам скорости, а двусторонние стрелки обозначают склейки границ "цилиндров".

Предположим, что в k точках $z = e_i$ многочлен V достигает свои локальные максимумы. Пусть также он не имеет других корней на полуинтервале $[-a, -b)$ (в частности, из этого следует, что точка (h, f) не лежит на дуге $d4$). Согласно следствию 1 областью возможного движения для значений h и f является объединение неодносвязных (кольцевых) областей. Рассмотрим одну из компонент связности. Как и в доказательстве теоремы 3, разобьем ее софокусные эллипсы и оснастим их точки векторами скорости в соответствии с системой (21). Заметим, что прообраз каждого такого эллипса в Q^3 состоит из двух пар окружностей, соответствующих векторам скорости 1-2 и 3-4, и пересекающихся в $4k$ точках согласно тому, что вектора 1 и 2, а также вектора 3 и 4 склеиваются в точках гипербол $\lambda_1 = e_i$. Таким образом, получили два особых слоя 2-атома C_{4k}. Умножим эти два особых слоя на отрезок (дугу софокусной гиперболы) и склеим полученные "цилиндры" друг с другом по границам согласно тому, что вектора скорости 1-3 и 2-4 отождествляются на эллиптической границе области возможного движения (рис. 7, б). Таким образом, получили особый слой 3-атома C_{4k},

который и является прообразом рассматриваемоей компоненты связности области возможного движения. При этом аналогичными рассуждениями несложно показать, что слоение Лиувилля в окрестности этого слоя устроено как 3-атом C_{4k}. Заметим, что если $z = -a$ является корнем многочлена V (т.е точка (h, f) лежит на дуге $d4$), при этом он убывает в окрестности этого корня, то область возможного движения также является неодносвязной, при этом прообраз каждой компоненты связности гомеоморфен особому слою 3-атома C_{4k+2}.

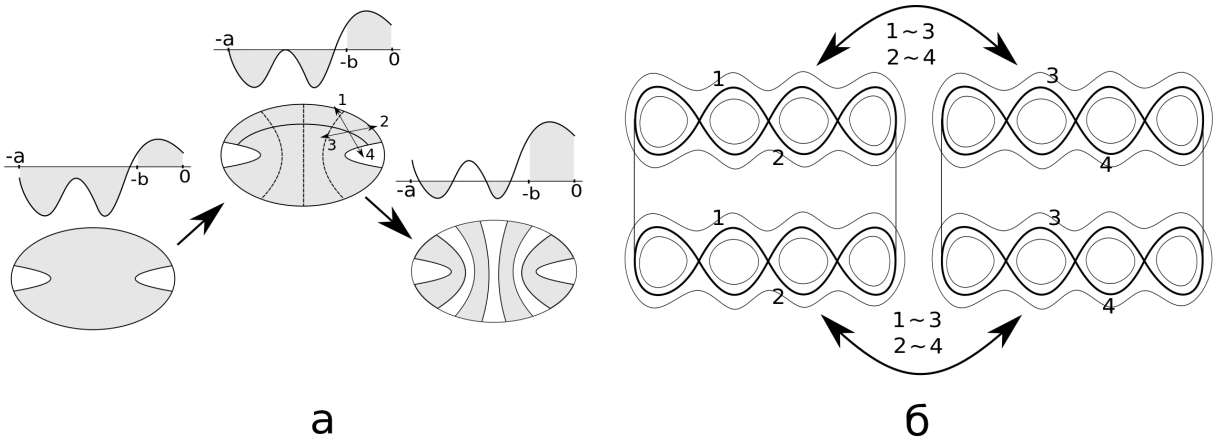


Рис. 9: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому B_3. На рис. а изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в Q^3, при этом цифрами 1-4 обозначены точки, соответствующие векторам скорости, а двусторонние стрелки обозначают склейки границ "цилиндров".

Предположим теперь, что на интервале $(-a, -b)$ есть другие корни многочлена V. В этом случае область возможного движения состоит из односвязных компонент, при этом, как и ранее, всем внутренним точкам этой области соответствуют четыре вектора скорости, кроме точек, лежащих на гиперболах $\lambda_1 = e_i$ и (возможно) оси $0y$, которым соответствуют только два вектора скорости (рис. 9, а). Заметим, что компоненты связности, которые не содержат точки этих гипербол, удовлетворяют теореме 3. Следовательно, прообразы таких компонент в Q^3 гомеоморфны двумерным торам. Рассмотрим одну из компонент связности, содержащую k критических дуг. Разобьем ее на дуги софокусных эллипсов и оснастим их точки векторами скорости. Заметим, что в прообразе каждой такой дуги лежат две окружности, соответствующие векторам скорости 1-2 и 3-4, стянутые по своим k хордам (особые слои 2-атома B_k). Следовательно, проведя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, прообраз всей области возможного движения гомеоморфен особому слою 3-атома B_k, и более того слоение Лиувилля в окрестности этого особого слоя устроено как 3-атом B_k (рис. 9, б).

Лемма доказана. □

Лемма 5. *Зафиксируем значение интегралов $H = h$ и $F = f$, причем точка (h, f) не является вырожденной или ранга 0. Пусть эта точка лежит на кривой $d2_i$, $d3$ или их пересечении. Тогда такому значению интеграла F соответствуют несколько седловых 3-атомов B_k или минимальных атомов A в изоэнергетическом многообразии $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$.*

Доказательство. Как и в прошлой лемме, из предположения того, что точка (h, f) не является вырожденной, следует, что фокусы граничного эллипса не лежат в области возможного движения. Пусть точка (h, f) лежит на пересечении дуг $d2_i$, которым соответствуют различные точки экстремумов e_i многочлена V. Тогда для этой точки выполнено условие $C2$, при

этом не выполнены $C1$, $C4$ и $C5$. Согласно замечанию 6, каждой внутренней точке области возможного движения соответствуют четыре вектора скорости, кроме точек дуг эллипсов $\lambda_2 = e_i$, которым соответствуют два вектора скорости. Если точка (h, f) также лежит на дуге $d3$, для нее выполнено условие $C3$.

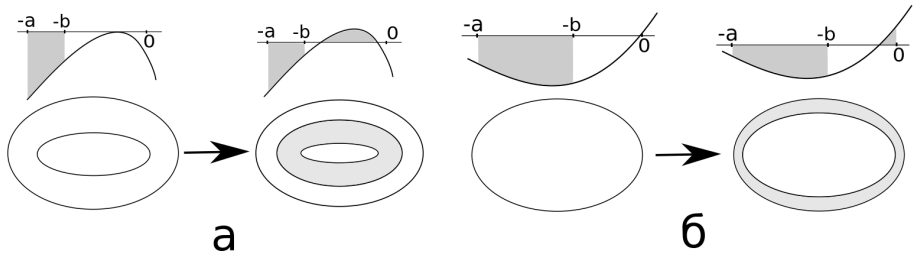


Рис. 10: Перестройки областей возможного движения, соответствующие минимальному атому A. Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения.

Пусть в точке $z = e_{i_1} =: e$ достигается локальный максимум многочлена $V(z)$. Аналогично соответствующему случаю из предыдущей леммы можно показать, что прообраз области возможного движения при $F \to f + 0$ является объединением двумерных торов (рис. 10, а). В пределе область возможного движения становится одномерной, а в ее прообразе лежат несколько критических окружностей. Таким образом, получили 3-атом A. Аналогично, если многочлен V в точке $z = 0$ обращается в ноль, при этом он возрастает в окрестности этого корня, область возможного движения при убывании значения интеграла F стягивается на границу биллиарда, чему также соответствует 3-атом A. Отметим, что если многочлен V убывает в окрестности точки $z = 0$, то такая точка (h, f) соответствует тому, что одна из граница области возможного движения вышла на границу биллиарда, при этом не происходит никакой качественной перестройки области возможного движения. Следовательно, такая точка (h, f) является регулярной, а луч $f = 0$ при $h < 0$ не принадлежит бифуркационной диаграмме.

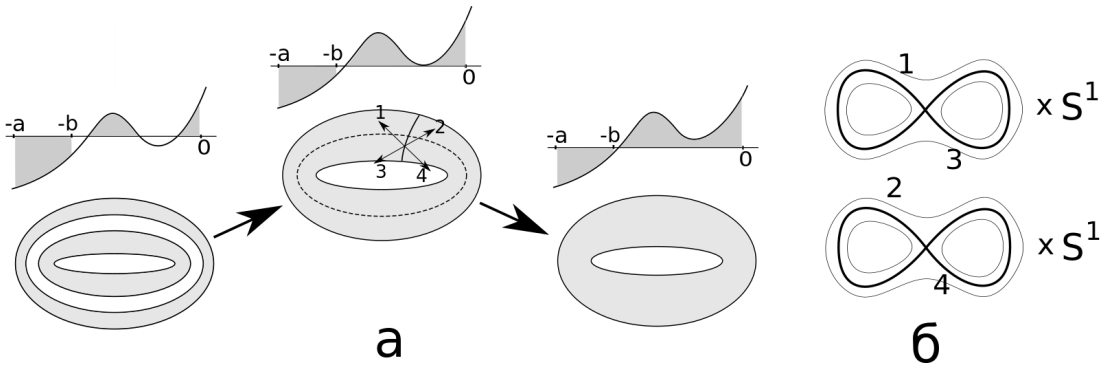


Рис. 11: Перестройка областей возможного движения, соответствующая двум 3-атомам B. На рис. а изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в Q^3.

Пусть теперь в нескольких точках $z = e_i$ многочлен V достигает свои локальные минимумы. Предположим, что $V(z) < 0$ для любого $z \in [-a, -b]$. Таким образом, в силу следствия 1, область возможного движения для значений h и f является объединением неодносвязных (кольцевых) областей. Заметим, что компоненты связности, не содержащие точек эллипсов $\lambda_2 = e_i$, удовлетворяют теореме 3. Прообразы таких компонент в Q^3 гомеоморфны объединению двух торов Лиувилля. Рассмотрим теперь компоненту, содержащую в себе k эллипсов

$\lambda_2 = e_i$. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол и оснастим их точки векторами скорости (рис. 11, а). Прообраз такой дуги в Q^3 гомеоморфен двум окружностям, соответствующим векторам скорости 1-3 и 2-4, стянутым по своим k хордам в силу того, что вектора 1 и 3, а также 2 и 4 склеиваются в точках "критических" эллипсов. Получили два особых слоя 2-атома B_k. Следовательно, прообраз всей компоненты связности гомеоморфен этим двум слоям, умноженным на окружность (софокусный эллипс), т.е. двум особым слоям 3-атома B_k (рис. 11, б). Более того, в окрестности этого слоя слоение устроено как 3-атом B_k.

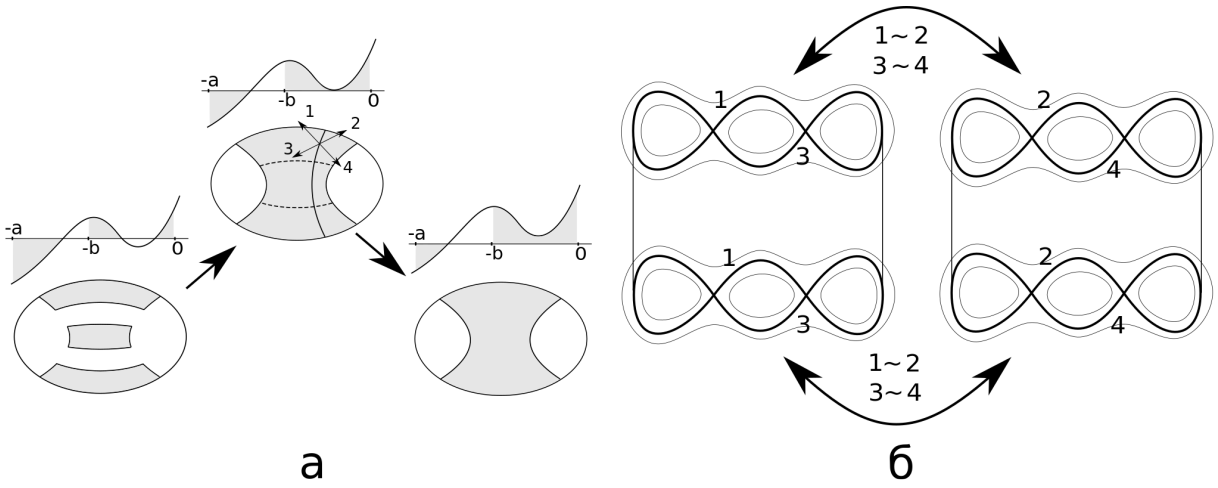


Рис. 12: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому B_2.На рис. а изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в Q^3, при этом цифрами 1-4 обозначены точки, соответствующие векторам скорости, а двусторонние стрелки обозначают склейки границ "цилиндров".

Предположим теперь, что на интервале $z \in (-a, -b)$ существуют корни многочлена V, т.е область возможного движения состоит из односвязных компонент. Опять, прообраз компоненты связности, не содержащей точек эллипсов $\lambda_2 = e_i$, гомеоморфен тору Лиувилля. Рассмотрим компоненту, содержащую k дуг этих эллипсов. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол и оснастим их точки векторами скорости (рис. 12, а). Заметим, что как и в аналогичном случае предыдущей леммы прообраз каждой такой дуги в Q^3 гомеоморфен двум особым слоям 2-атома B_k. Умножим эти особые слои на отрезок и склеим полученные "цилиндры" по границам в силу того, что на гиперболических границах вектора 1 склеивается с вектором 2, а вектор 3 – с вектором 4 (рис. 12, б). Таким образом, прообраз рассматриваемой компоненты в Q^3 гомеоморфен особому слою 3-атома B_k, при этом его окрестность также устроена, как 3-атом B_k.

Лемма доказана. □

Лемма 6. *Зафиксируем значение интегралов $H = h$ и $F = f$, причем точка (h, f) не является вырожденной или ранга 0. Пусть эта точка лежит на кривой $d5$. Если в окрестности точки $z = -b$ многочлен V возрастает, этому критическому значению соответствует несколько 3-атомов C_2, B или два атома A^* в изоэнергетическом многообразии Q^3. Если в окрестности точки $z = -b$ многочлен V убывает, то ему соответствуют несколько максимальных и минимальных 3-атома A.*

Доказательство. Согласно условию на невырожденность и ранг следует, что точка (h, f) не лежит на других дугах бифуркационной диаграммы, кроме дуги $d5$. Согласно замечанию 6, каждой внутренней точке области возможного движения соответствуют четыре вектора

скорости, кроме фокусов, которым соответствуют окружность векторов, и остальных точек фокальной оси $0x$, которым соответствуют два вектора скорости.

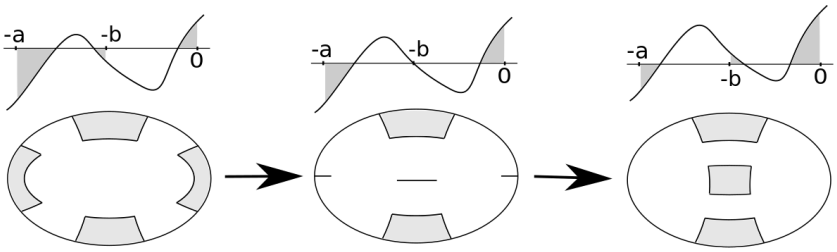


Рис. 13: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атомам A. Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения.

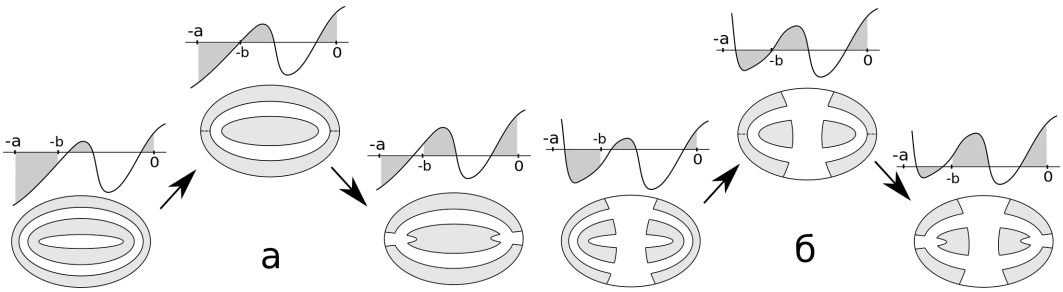


Рис. 14: Перестройка областей возможного движения, дающая 3-атомы C_2 и B.

Пусть в окрестности точки $z = -b$ многочлен V убывает. При $F \to f - 0$ область возможного движения ограничена дугами одной гиперболы, которая стремится к фокальной оси. В пределе область становится одномерной, а ее прообраз гомеоморфен объединению непересекающихся окружностей. С другой стороны, при $F \to f + 0$ область возможного движения ограничена дугами эллипса, который также стремится к фокальной оси (рис. 13). В итоге оба случая соответствуют 3-атомам A, при этом первый случай соответствует "исчезновению" торов Лиувилля, а второй – их "появлению"

Пусть теперь в окрестности точки $z = -a$ многочлен V возрастает. Если компонента связности области возможного движения не содержит точек фокальной прямой, она удовлетворяет теореме 3, и ее прообраз в Q^3 гомеоморфен тору. Рассмотрим компоненту связности, которая содержит точки фокальной прямой, но не содержит фокусы. Заметим, что если она содержит точки фокального отрезка $[F_1, F_2]$, такой случай эквивалентен случаю перестройки двух односвязных областей возможного движения в одну односвязную в лемме 5. Следовательно, прообраз такой компоненты в Q^3 гомеоморфен особому слою 3-атома B (рис. 15). Если же она содержит точки лучей $(-\infty, F_1]$ и $[F_2, +\infty)$, такой случай аналогичен случаям перестроек неодносвязных и односвязных областей возможного движения в лемме 4, и прообраз этой компоненты связности гомеоморфен особому слою 3-атома C_2 в неодносвязном случае и B в односвязном (рис. 14).

Предположим, что компонента связности содержит в себе только один фокус. Разобьем область возможного движения на дуги софокусных гипербол и отрезок s, лежащий на фокальной прямой между фокусом и границей биллиарда (рис. 16). Заметим, что прообраз каждой такой дуги гомеоморфен двум "восьмеркам" – особым слоям 2-атома B. Следовательно, прообраз всей области возможного движения без отрезка s гомеоморфен двум таким "восьмеркам", умноженным на отрезок и склеенным друг с другом по одной из границ полученных "цилиндров" (рис. 19, б). По замечанию 6 фокусу соответствует окружность векторов.

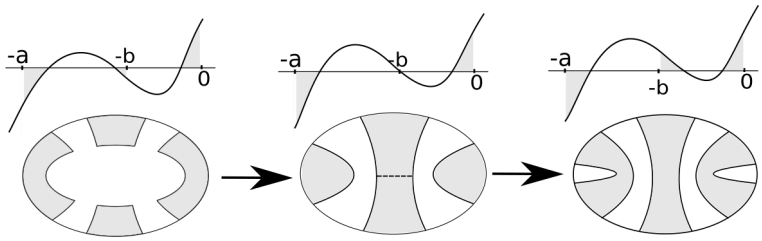


Рис. 15: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому B. Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения.

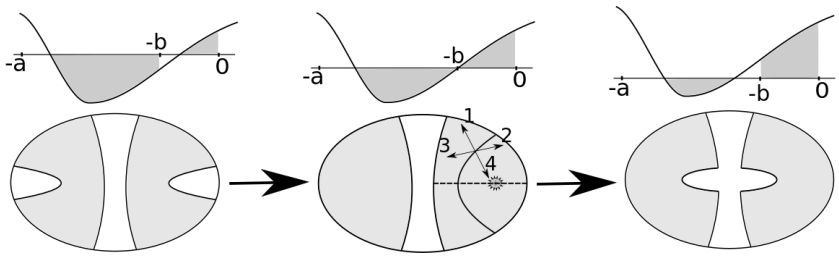


Рис. 16: Перестройка областей возможного движения при условии $C5$. Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения

Следовательно, прообраз отрезка s в Q^3 гомеоморфен окружности вместе со своей хордой, соединяющей две противоположные точки этой окружности (рис. 18). Рассмотрим "восьмер-

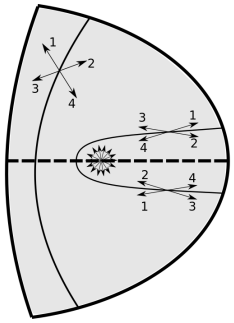


Рис. 17: Область возможного движения, содержащая фокус.

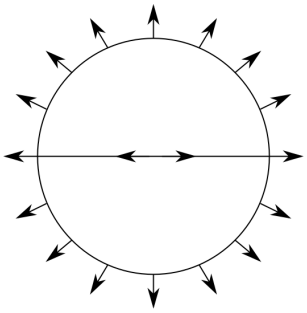


Рис. 18: Прообраз отрезка s в Q^3.

ку", соответствующую векторам 2 и 4, образ которой лежит на гиперболе, близкой к отрезку s (рис. 17). Заметим, что при обходе по гиперболе сверху вниз вектор 2 повернется против часовой стрелки, изменив свой угол от нуля до π. При этом вектор 4 повернется против часовой стрелки, изменив свой угол от π до 2π. Следовательно, в окрестности прообраза отрезка s эта " восьмерка" будет иметь вид, изображенный на рис. 19, а. Аналогичные рассуждения проведем для "восьмерки", соответствующей векторам 1 и 3 (рис. 19, в). Заметим, что в результате склейки границ полученного выше "цилиндра", изображенной на рис. 19, получим особый слой 3-атома A^* (т.е. особый слой 3-атома B с "перекруткой"). Более того, окрестность этого слоя устроена как 3-атом A^*. Если же область возможного движения содержит два фокуса, то такая "перекрутка" 3-атома B произойдет дважды, и в итоге получим опять 3-атом B.

Лемма доказана. □

В итоге, были описаны всевозможные 3-атомы, соответствующие нашей системе. Следующая теорема является обобщением полученных результатов.

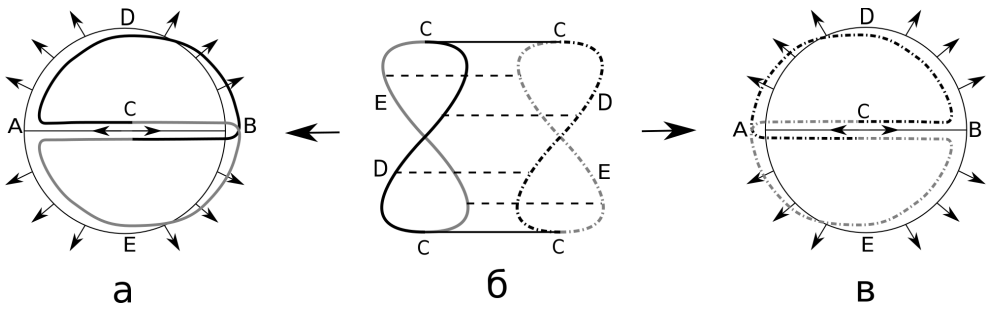


Рис. 19: Склейка границ "цилиндра" по прообразу отрезка s. Оранжевым цветом обозначены точки, соответствующие вектору 1, синим цветом – вектору 2, зеленым – вектору 3 и красным – вектору 4.

Теорема 5 (об атомах). *Существует всего девять типов бифуркаций регулярных областей возможного движения, соответствующих интегрируемому эллиптическому биллиарду с полиномиальным потенциалом:*

1) появление неодносвязной (кольцевой) компоненты связности из софокусного эллипса (соответствует двум минимальным 3-атомам A в изоэнергетическом многообразии Q^3);

2) появление односвязной компоненты связности из дуги софокусного эллипса или отрезка фокальной прямой (соответствует минимальному 3-атому A);

3) стягивание односвязной компоненты связности на дугу софокусной гиперболы, либо на отрезок вертикальной оси $0y$, либо на отрезок фокальной прямой (соответствует максимальному 3-атому A);

4) слияние k неодносвязных компонент связности в одну неодносвязную компоненту (соответствует двум 3-атомам B_{k-1});

5) разрыв неодносвязной компоненты связности на $2k$ односвязные компоненты (соответствует 3-атому C_{2k});

6) слияние k односвязных компонент связности в одну односвязную (соответствует 3-атому B_{k-1});

7) разрыв односвязной компоненты связности на k односвязных компонент (соответствует 3-атому B_{k-1});

8) перестройка неодносвязной компоненты связности в одну односвязную компоненту через два фокуса (соответствует 3-атому B);

9) перестройка односвязной компоненты связности в одну односвязную компоненту через один фокус (соответствует 3-атому A^*).

7. Грубые молекулы и метки

Зафиксируем уровень гамильтониана $H = h$ и вычислим соответствующую ему грубую молекулу. Напомним, что при вычислении 3-атомов мы следили за изменением многочлена V при локальном изменении значения f. Теперь проследим за его изменением при глобальном возрастании значения f от $-\infty$ до $+\infty$. Когда график многочлена V лежит ниже нуля на отрезке $[-b, 0]$, движения нет. Затем при значении $f = f_{min}$ несколько экстремумов (в количестве m), лежащих справа от точки $-b$, выходят на отрезок $[-a, 0]$. Если при этом график V лежит ниже нуля на отрезке $[-a, -b]$, этому соответствует появление m неодносвязных компонент области возможного движения, или же $2m$ минимальных атомов A согласно теореме 5. Если же график V имеет корни на отрезке $[-a, -b]$, происходит появление $2m(2k + l)$ односвязных компонент, где k – число подотрезков на отрезке $[-a, -b]$, не содержащих точки $-a$ и $-b$, на которых $V < 0$, а l – число таких же подотрезков, но содержащих одну из этих точек. При

дальнейшем росте значения f будем следить за последовательным выходом экстремумов многочлена V и значений $V(-a)$, $V(-b)$ и $V(0)$ на отрезок $[-a, 0]$. Этим выходам соответствуют перестройки области возможного движения, описанные в леммах 4-6 предыдущего раздела. Таким образом, будем строить грубую молекулу снизу, начиная с описанных выше атомов A, и на каждом критическом уровне интеграла f сопоставляя перестройкам области возможного движения атомы согласно теореме 5. При достижении значения $f = f_{max}$ многочлен V становится больше нуля на отрезке $[-a, -b]$, чему соответствует несколько максимальных атомов A, и затем движение снова перестает существовать. На этом заканчивается построение грубой молекулы. Пример вычисления приведен на рис 20.

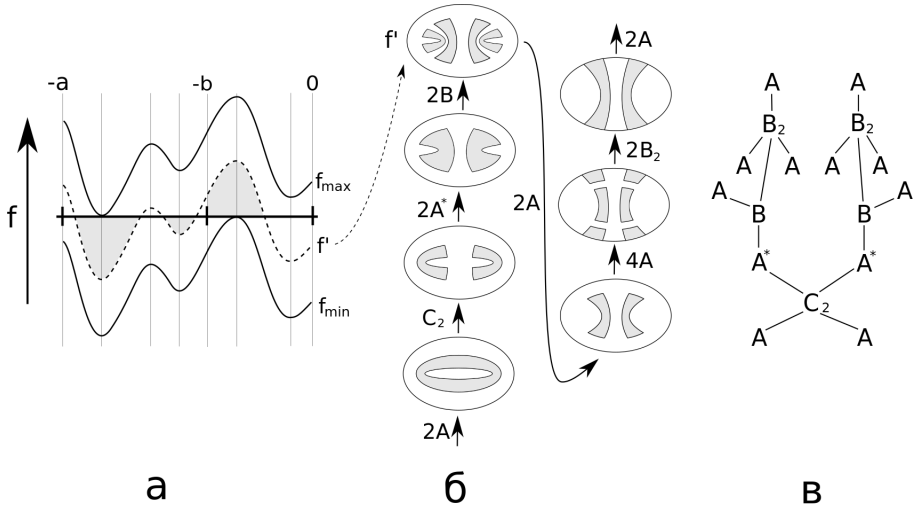


Рис. 20: Вычисление грубой молекулы с помощью графика многочлена V. На рис. а изображено поднятие графика с ростом значения f. На рис. б изображены области возможного движения и их перестройки. На рис. в изображена результирующая грубая молекула.

Таким способом был получен полный список молекул, встречающихся для (гуковского) потенциала второго порядка (работа [12]) и четвертого порядка (работа [13]). Однако, в общем случае возможных грубых молекул, соответствующих потенциалу большого порядка, необозримо много. Поэтому приведем несколько их общих свойств.

Утверждение 3. *Построенная выше грубая молекула удовлетворяет следующим свойствам:*

1) существует расположение молекулы в плоскости, при котором она является симметричной относительно некоторой оси, причем атомы, переходящие друг в друга под действием этой симметрии, соответствуют одинаковому уровню интеграла F;

2) все атомы вида C_{2k} лежат на некотором одном уровне интеграла F (обозначим его $F = f_C$), причем число k для всех них одинаковое;

3) ниже уровня атомов C_{2k} молекула является непересекающимся объединением нескольких симметричных деревьев с корнями в вершине C_{2k};

4) на фокальном уровне интеграла F, при котором $V(-b) = 0$ (обозначим его $F = f_F$), лежат либо несколько минимаксных атомов A, либо два атома A^* и несколько атомов B_k, либо один атом B и несколько атомов C_{2k};

5) в общем случае молекула не является деревом, т.е. могут существовать циклы;

6) молекула может содержать кратные ребра, причем они могут соединять только атомы C_{2k} с атомами B_k, расположенными не ниже фокального уровня;

7) если $V(z_1) < V(-b) < V(z_2)$ для любых $z_1 \in [-a, -b)$ и $z_2 \in (-b, 0]$, молекула является деревом.

Доказательство. Докажем сначала пункт 2. Заметим, что если регулярная область возможного движения содержит неодносвязную (кольцевую) компоненту связности, то все ее компоненты также будут кольцевыми (это связано с тем, что при таком условии выполнено неравенство $V(z) < 0$ для любого $z \in [-a, -b]$). Атомы C_{2k} соответствуют разрыву одной такой кольцевой компоненты на $2k$ односвязных компонент по дугам софокусных гипербол, причем такой разрыв одновременно происходит и для всех остальных кольцевых компонент. Из этого и следует пункт 2.

Докажем теперь пункт 3. Согласно предыдущему пункту, все области возможного движения, соответствующие значениям интеграла $F < f_C$ ниже уровня атомов C_{2k}, являются кольцевыми. Следовательно, всю молекулу можно разбить на два изоморфных (одинаковых) подграфа, соответствующих движениям по и против часовой стрелки. При этом каждый атом этих подграфов соответствует слиянию нескольких кольцевых компонент области возможного движения в одну (то есть является атомом B_k согласно теореме 5), что и гарантирует структуру дерева.

Докажем пункт 4. Согласно лемме 6, если многочлен V убывает в окрестности точки $-b$, фокальному уровню $F = f_F$ соответствует несколько минимаксных атомов A. Если же многочлен V возрастает в этой окрестности, обязательно найдутся регулярные компоненты области возможного движения, которые перестраиваются через фокусы. Если область возможного движения ниже фокального уровня состоит из кольцевых компонент, в силу леммы 6 одна из них перестраивается через два фокуса (что соответствует атому B), а все остальные разрываются на две односвязные компоненты (что соответствует атому C_2). Если же компоненты области возможного движения до перестройки являются односвязными, две из них перестраиваются через фокус (что соответствует двум атомам A^*), а оставшиеся либо разрываются, либо сливаются по отрезкам фокальной прямой (что соответствует атому B).

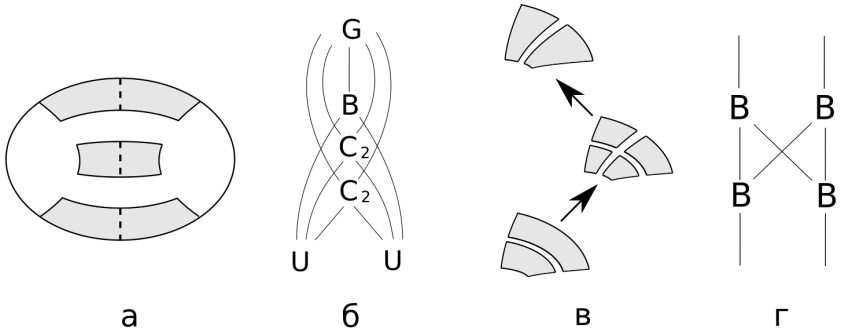


Рис. 21: Иллюстрации к пунктам 1 и 5. Здесь U – некоторое дерево, а G – симметричный граф.

Теперь докажем пункт 1. Согласно тому, что эллиптическая система координат симметрична относительно осей $0x$ и $0y$, а область возможного движения ограничена ее координатными линиями, следует, что эта область симметрична относительно осей $0x$ и $0y$, а также переходит в себя при повороте на угол π. Таким образом, зададим следующую инволюцию τ на вершинах грубой молекулы (атомах): если атом лежит выше уровня атомов C_{2k}, сопоставим ему атом, соответствующий перестройке диаметрально противоположной компоненты области возможного движения; если атом лежит ниже уровня атомов C_{2k}, сопоставим ему его парный атом, соответствующий движению в противоположном направлении, согласно пункту 3; атомы C_{2k} оставим на месте. Заметим, что такая инволюция сопоставляет два атома, лежащие на одном уровне интеграла F, при этом если атом перешел в себя, то это либо C_{2k}, либо он соответствует перестройке компоненты связности области возможного движения, содержащей центр биллиарда, и следовательно единственный на своем уровне (рис. 21, а). Инволюция τ задает

инволюцию ребер грубой молекулы. Также заметим, что если ребро перешло в себя при этой инволюции, оно такое единственное на своем уровне $f_i < F < f_{i+1}$ между двумя соседними критическими уровнями интеграла F. Несложно заметить, что построенная таким образом инволюция порождает необходимую симметрию молекулы в плоскости (пример изображен на рис. 21, б).

Для доказательства пункта 5 приведем пример появления цикла в грубой молекуле. На рис. 21, в, г изображена перестройка области возможного движения и соответствующий ей цикл. Пример перестройки области возможного движения, соответствующей кратному ребру в молекуле, изображен на рис. 22 . Рассмотрим теперь два атома R_1 и R_2, соединенные кратными ребрами. Если атом R_1 принадлежит серии B_k, он соответствует разрыву некоторой односвязной компоненты области возможного движения по дугам гипербол. В результате этого разрыва получим $k+1$ компонент связности, ограниченных дугами одних и тех же софокусных эллипсов. Следовательно, эти компоненты не могут сливаться друг с другом по своим эллиптическим границам (т.к. эти границы должны принадлежать разным эллипсам). Иными словами, такой атом R_1 не может быть соединен кратными ребрами. Если же атом R_1 принадлежит серии C_{2k}, он соответствует разрыву неодносвязной компоненты области возможного движения на $2k$ односвязных компонент. Рассмотрим две из них, образующих кратные ребра. Существует две возможности: 1. эти две компоненты слились в одну вдоль фокального отрезка; 2. они слились с некоторой третьей компонентой, содержащей точки фокального отрезка. В первом случае атом R_2 является атомом B, лежащем на фокальном уровне $F = f_F$, во втором он лежит выше фокального уровня, т.к. только для таких значений интеграла F область возможного движения может содержать точки фокального отрезка. Таким образом, был доказан пункт 6.

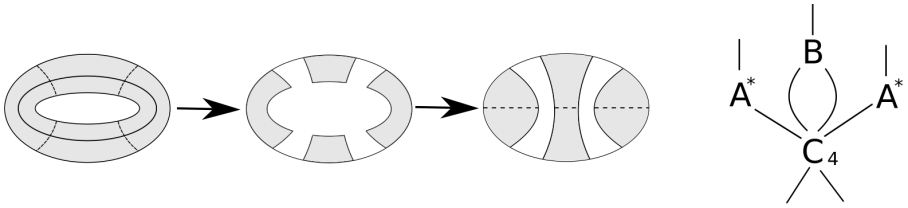


Рис. 22: Пример появления кратных ребер

Пункт 7 почти очевиден. Действительно, ниже фокального уровня $F = f_F$ молекула является деревом, согласно пункту 3. Выше этого уровня каждый атом является “разделяющим” атомом серии B_k, т.е. соответствует разделению области возможного движения по дугам софокусных гипербол. Граф, состоящий из таких разделяющих вершин, заведомо является деревом.

Утверждение доказано. □

Теперь вычислим метки, тем самым вычислив полные инварианты Фоменко-Цишанга. Для этого разобьем атомы на шесть групп в соответствии с теоремой 5:

1) минимальные 3-атомы A из групп 1, 2;

2) максимальные 3-атомы A из группы 3;

3) седловые 3-атомы из групп 4, 6, соответствующие бифуркациям области возможного движения типа “слияние”;

4) седловые 3-атомы из групп 5, 7, соответствующие бифуркациям типа “разрыв”;

5) 3-атомы A^* из группы 8;

6) 3-атом B из группы 9, соответствующий бифуркации через два фокуса;

Теорема 6 (о метках). *Рассмотрим интегрируемый плоский биллиард, ограниченный эллипсом, в поле полиномиального потенциала. Зафиксируем ориентацию изоэнергетического*

многообразия Q^3 таким образом, чтобы все циклы λ на минимальных атомах A стали согласованными. Таблица на рис. 23 полностью описывает метки, соответствующие ребрам построенной выше грубой молекулы.

Нижний атом \ Верхний атом	2	3	4	5	6
1	r=0 ε=1	r=0 ε=1 Θ=0	r=∞ ε=1	r=0 ε=1 Θ'=0	r=0 ε=1 Θ'=0
3	r=∞ ε=1	r=∞ ε=1 Θ=0	r=0 ε=-1 Θ=0	r=0.5 ε=-1 Θ=-1 Θ'=-1	r=0.5 ε=-1 Θ=-1 Θ'=-1
4	r=0 ε=1 Θ=0	r=0 ε=1 Θ=0	r=∞ ε=1 Θ=0	r=0 ε=1 Θ=2 Θ'=0	———
5	r=0 ε=1 Θ'=0	r=0 ε=1 Θ=2 Θ'=0	r=0.5 ε=-1 Θ=-1 Θ'=-1	———	———
6	r=0 ε=1 Θ'=1	r=0 ε=1 Θ=1 Θ'=1	r=0 ε=-1 Θ=-1 Θ'=0	———	———

Рис. 23: Таблица меток. Ячейка таблицы соответствует ребру, соединяющего атомы из обозначенных групп, причем атом из первого столбца всегда стоит на уровень ниже атома из первой строки в грубой молекуле. Здесь Θ обозначает вклад ребра в метку n семьи, не содержащей атомов 5 и 6, а Θ' обозначает вклад в метку n семьи атома 5 или 6.

Доказательство. Используя леммы 4 - 6 и замечание 6, заметим, что образы критических окружностей при проекции p на биллиард являются дугами софокусного эллипса (в том числе и вырожденного $\lambda_2 = -b$) для атомов из групп 1 и 3, или дугами софокусной гиперболы (в том числе и вырожденной $\lambda_1 = -b$) в случае атомов из групп 2 и 4. Следовательно, согласно правилам выбора допустимого базиса на границах 3-атомов, изложенных в [14], выберем циклы λ и μ следующим образом: образ цикла λ атомов 1 и 4 при проекции на биллиард является дугой софокусной гиперболы, а образ цикла μ – дугой эллипса (рис. 24, а, г); для атомов 2 и 3, наоборот, образ цикла λ является дугой софокусного эллипса, а образ цикла μ – дугой гиперболы (рис. 24, б, в). В качестве циклов λ на границах атомов 5 и 6 выберем такие, образы которых изображены на рис. 24, д, е соответственно (такие циклы, очевидно, стягиваются к критическим), а образы циклов μ (или $\hat{\mu}$ для атома A^*) выберем лежащими на дугах софокусных гипербол. При этом ориентация всех циклов λ седловых атомов и циклов μ атомов A, а также циклов λ минимальных атомов A объявляется согласованной.

Одновременно с доказательством теоремы докажем следующую лемму с помощью индукции по высоте грубой молекулы.

Лемма 7. *Пусть атом R принадлежит группе 4. Тогда ориентация цикла μ на его верхней границе (то есть на границе, соответствующей максимальному значению интеграла f) является согласованной. Если же этот атом принадлежит группе 3, ориентация цикла μ на его верхней границе является несогласованной.*

Итак, пусть ребро грубой молекулы связывает атомы из групп 1 и 2 (ребро $A - A$). Согласно выбору базисных циклов, с точностью до ориентации цикл λ_1 атома 1 переходит в цикл μ_2 атома 2 и наоборот (рис. 25, а). Согласно тому, что циклы λ_1 и μ_2 согласованные, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = 0$, а метка $\varepsilon = 1$.

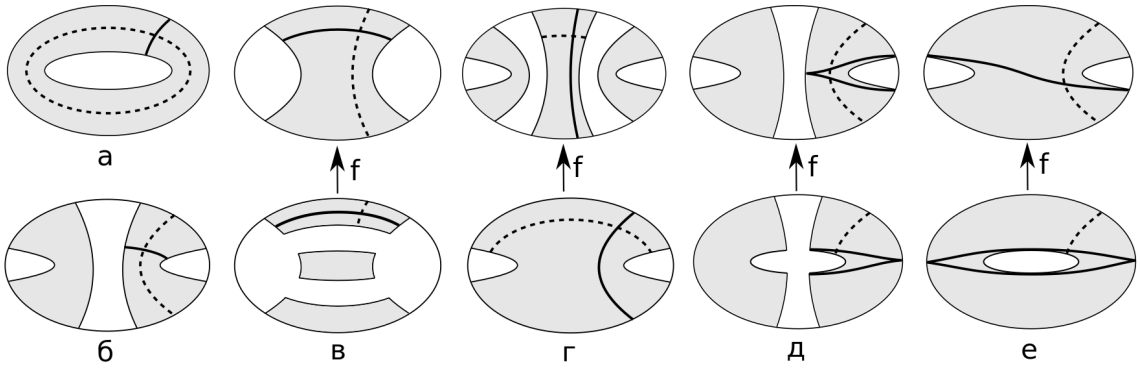


Рис. 24: Примеры выбора допустимого базиса на границах атомов. Красным цветом изображены образы циклов λ при проекции на биллиард, синим цветом изображены образы циклов μ (или $\hat{\mu}$ на рис. д). При этом на рис. в, г, д, е изображены две области – образы двух границ атома, соответствующих минимальному и максимальному значению интеграла F.

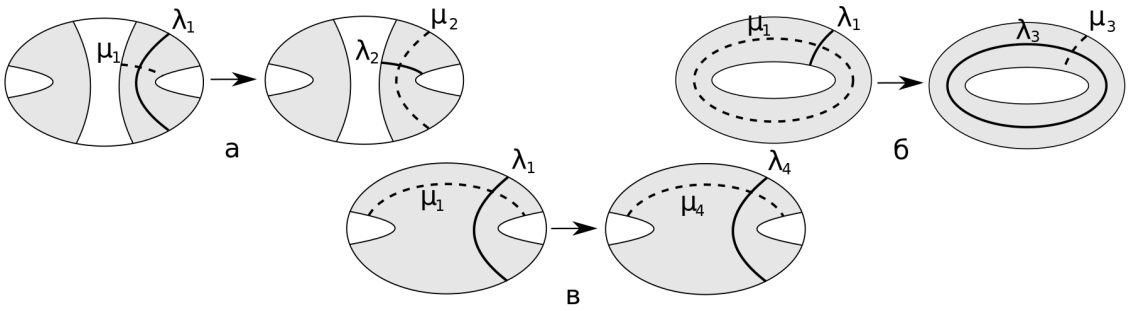


Рис. 25: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $A - A$ (рис. а), $A - R_3$ (рис. б) и $A - R_4$ (рис. в)

Пусть теперь ребро связывает атомы из групп 1 и 3 (ребро $A - R_3$). Аналогично, цикл λ_1 атома A переходит в цикл μ_3 атома R_3 и наоборот с точностью до ориентации (рис. 25, б). Заметим, что циклы λ_3 и μ_1 согласованные. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n равен 0. Цикл μ_3 обязан быть согласованным. Следовательно, на другой (верхней) границе атома R_3 он станет несогласованным. Этот факт является базой индукции в доказательстве леммы 7.

Пусть ребро связывает атомы из групп 1 и 4 (ребро $A - R_4$). Согласно выбору базисных циклов, с точностью до ориентации цикл λ_1 атома A переходит в цикл λ_4 атома R_4, а цикл μ_1 переходит в μ_4 (рис. 25, в). Согласно тому, что циклы λ_1 и λ_4 согласованные, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = \infty$, а метка $\varepsilon = 1$. Цикл μ_4 при этом несогласованный. Следовательно, на другой (верхней) границе атома R_4 он станет согласованным. Этот факт также является базой индукции в доказательстве леммы 7.

Рассмотрим теперь ребра, соединяющие два атома из группы 3 или 4 (ребра $R_3 - R_3$ и $R_4 - R_4$). Заметим, что в обоих случаях цикл λ_- одного атома переходит в цикл λ_+ другого атома, и то же для циклов μ. При этом оба цикла λ согласованные. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Метка $r = \infty$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n нулевой. При этом на верхней границе обоих атомов циклы μ сохранят согласованность (на верхнем атоме R_3 он по прежнему несогласованный, а на верхнем атоме R_4 – согласованный).

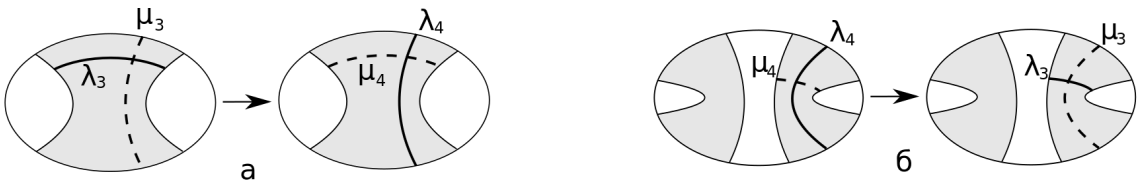


Рис. 26: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $R_3 - R_4$ (рис. а) и $R_4 - R_3$ (рис. б)

Рассмотрим ребро, связывающее атомы из групп 3 и 4 (ребро $R_3 - R_4$). С точностью до ориентации цикл λ_3 атома R_3 переходит в цикл μ_4 атома R_4 и наоборот (рис. 26, а). По лемме 7 цикл μ_3 несогласованный. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Метка $r = 0$, а метка $\varepsilon = -1$. Это ребро может быть как входящим, так и выходящим для двух семей, причем вклад в метку n каждой из них нулевой. Заметим, что цикл μ_4 имеет несогласованную ориентацию. Следовательно, на верхней границе атома R_4 она станет согласованной.

Аналогично, рассмотрим ребро $R_4 - R_3$. Как и раньше, цикл λ_3 атома R_3 переходит в цикл μ_4 атома R_4 и наоборот (рис. 26, б). Но, согласно лемме 7, цикл μ_4 согласованный. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n для каждой из двух возможных семей нулевой. Заметим, что цикл μ_3 имеет согласованную ориентацию. Следовательно, на верхней границе атома R_3 она станет несогласованной.

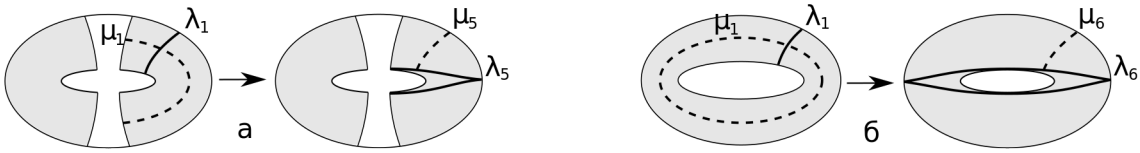


Рис. 27: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $A - A^*$ (рис. а) и $A - B$ (рис. б)

Пусть теперь ребро соединяет атомы из групп 1 и 5 (ребро $A - A^*$). Заметим, что $\lambda_5 = 2\lambda_1 + \mu_1$ в силу согласованности циклов λ_1 и μ_1, а циклы λ_1 и μ_5 совпадают с точностью до ориентации (рис. 27, а). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n семьи атома A^* нулевой. При этом, ориентация цикла μ_5 согласованная. Следовательно, на верхней границе атома A^* ориентация цикла $\hat{\mu}$ является несогласованной.

Аналогичные соотношения на базисные циклы, и, следовательно, аналогичные метки соответствуют ребру $A - B$, соединяющему атомы из групп 1 и 6 (рис. 27, б). Отметим, что на верхней границе атома B ориентация цикла μ, как и в прошлом случае, является несогласованной.

Рассмотрим ребро, соединяющее атомы из 3 и 5 группы (ребро $R_3 - A^*$). В силу леммы 7 соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = \lambda_3 - 2\mu_3$, при этом циклы μ_3 и μ_5 совпадают с точностью до ориентации (рис. 28, а). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0.5$, метка $\varepsilon = -1$. Вклад в метку n семьи атома A^*, а также возможной другой семьи, для которой ребро $R_3 - A^*$ является выходящим, равен -1. При этом заметим, что ориентация цикла μ_5 согласованная. Следовательно, на верхней границе атома A^* ориентация цикла $\hat{\mu}$ также является несогласованной.

И опять, аналогичные соотношения на базисные циклы и метки соответствуют ребру $R_3 -$

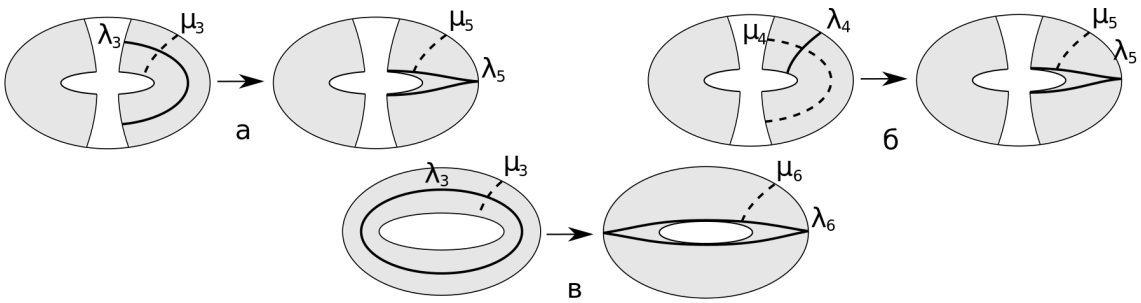


Рис. 28: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $R_3 - A^*$ (рис. а), $R_3 - B$ (рис. б) и $R_4 - A^*$ (рис. в)

B, соединяющему атомы из групп 3 и 6 (рис. 28, б). Отметим, что на верхней границе атома B ориентация цикла μ, как и в прошлом случае, является несогласованной.

Пусть теперь ребро соединяет атомы из групп 4 и 5 (ребро $R_4 - A^*$). В силу леммы 7 соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = 2\lambda_4 + \mu_4$, при этом циклы λ_4 и μ_5 совпадают с точностью до ориентации (рис. 28, в). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$. Вклад в метку n семьи атома A^* нулевой, а вклад в метку возможной другой семьи, для которой ребро $R_3 - A^*$ является выходящим, равен 2. И опять, ориентация цикла μ_5 согласованная. Следовательно, на верхней границе атома A^* ориентация цикла $\hat{\mu}$ также является несогласованной.

Заметим, что не существует ребер типа $R_4 - B$, соединяющих атомы из 4 и 6 группы. Действительно, атом B из 6 группы предполагает перестройку неодносвязной области возможного движения в односвязную. Но атом R_4 из 4 группы соответствует "разрыву" области вдоль дуг софокусных гипербол. После такого "разрыва" область возможного движения в любом случае станет объединением односвязных областей. Также невозможны ребра, соединяющие два атома из группы 5 или 6, или же два атома из групп 5 и 6, так как эти атомы лежат на одном уровне интеграла F.

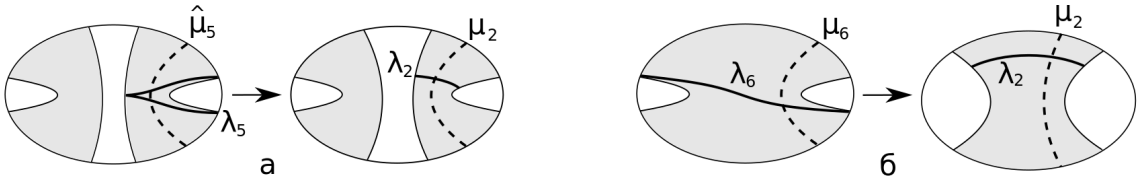


Рис. 29: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $A^* - A$ (рис. а) и $B - A$ (рис. б)

Также отметим, что во всех разобранных случаях на верхней границе атомов из групп 5 и 6 циклы μ (или $\hat{\mu}$) ориентированы несогласованно. Рассмотрим теперь ребро A^*—A, соединяющее атомы из групп 2 и 5. В силу согласованности цикла μ_2, соотношение на цикл λ_5 имеет вид $\lambda_5 = \pm 2\lambda_2 + \mu_2$, при этом $\hat{\mu}_5 = -\mu_2$ (рис. 29, а). Воспользуемся правилом выбора цикла μ на атоме со звездой: $\mu_5 = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \hat{\mu}_5) = \pm\lambda_2$. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n семьи атома A^* нулевой.

Теперь предположим, что ребро связывает атомы из 2 и 6 группы (ребро $B - A$). В силу несогласованности цикла μ_6, а также соотношения $\lambda_5 = \pm\lambda_2 + \mu_2$ (рис. 29, б), матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n семьи атома

A^* равен 1.

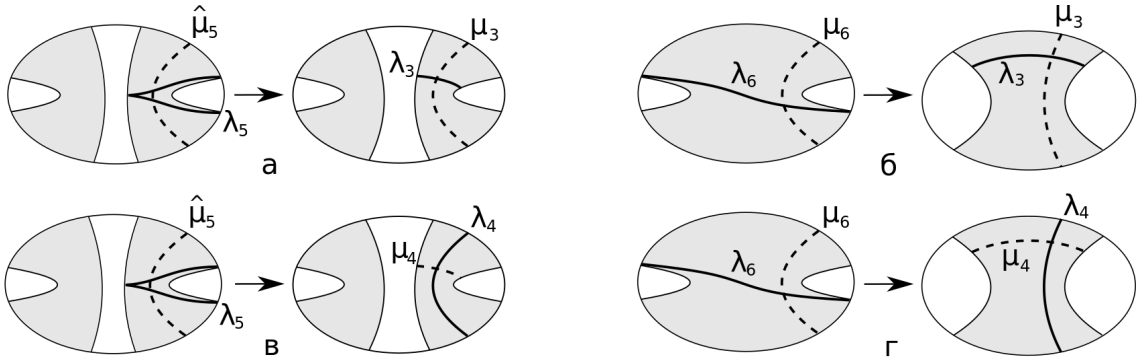


Рис. 30: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $A^* - R_3$ (рис. а), $B - R_3$ (рис. б), $A^* - R_4$ (рис. в) и $B - R_4$ (рис. г)

Рассмотрим ребро вида A^*—R_3, соединяющее атомы из 5 и 3 группы. Соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = 2\lambda_3 \pm \mu_3$, при этом $\hat{\mu}_5 = \mp\mu_3$ в силу несогласованности цикла $\hat{\mu}_5$ (рис. 30, а). Следовательно, цикл μ_5 имеет вид $\mu_5 = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \hat{\mu}_5) = \lambda_3$, а матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$. Вклад в метку n семьи атома A^* нулевой, а вклад в метку возможной другой семьи, для которой ребро $R_3 - A^*$ является выходящим, равен 2. Заметим, что выбор положительного знака означает согласованности цикла μ_3. Следовательно, на верхней границе атома R_3 цикл μ несогласованный.

Аналогично рассмотрим ребро B—R_3, соединяющее атомы из 6 и 3 группы. Соотношения на циклы имеют вид $\lambda_6 = \lambda_3 \pm \mu_3$, при этом $\mu_5 = \mp\mu_3$ в силу несогласованности (рис. 30, б). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$. Вклад в метку n семьи атома B, как и вклад в метку возможной другой семьи, равен 1. Как и в прошлом случае, выбор положительного знака означает согласованности цикла μ_3. Следовательно, на верхней границе атома R_3 цикл μ также является несогласованным.

Рассмотрим теперь ребро, соединяющее атомы из групп 5 и 4 (ребро $A^* - R_4$). Соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = \lambda_4 \pm 2\mu_4$, при этом $\hat{\mu}_5 = -\lambda_4$ в силу несогласованности цикла $\hat{\mu}_5$ (рис. 30, в). Следовательно, цикл μ_5 имеет вид $\mu_5 = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \hat{\mu}_5) = \pm 2\mu_4$, а матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0.5$, метка $\varepsilon = -1$. Вклад в метку n семьи атома A^*, как и вклад в метку возможной другой семьи, равен -1. Заметим, что выбор отрицательного знака означает несогласованности цикла μ_3. Следовательно, на верхней границе атома R_4 цикл μ согласованный.

Наконец, рассмотрим ребро, соединяющее атомы из групп 6 и 4 (ребро $B - R_4$). Соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = \lambda_4 \pm \mu_4$, при этом $\mu_5 = -\lambda_4$ в силу несогласованности цикла μ_5 (рис. 30, г). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = -1$. Вклад в метку n семьи атома A^* нулевой, а вклад в метку возможной другой семьи равен -1. Заметим, что выбор отрицательного знака означает несогласованности цикла μ_3. Следовательно, на верхней границе атома R_4 цикл μ также является согласованным.

Заметим, что во всех рассмотренных случаях цикл μ на верхней границе атома R_4 является согласованным, а на верхней границе атома R_3 – несогласованным. С учетом базы лемма 7 была доказана с помощью индукции по высоте критических уровней интеграла F.

Пусть теперь ребро соединяет атомы из групп 2 и 3 ($R_3 - A$). Заметим, что циклы λ_2 и λ_3,

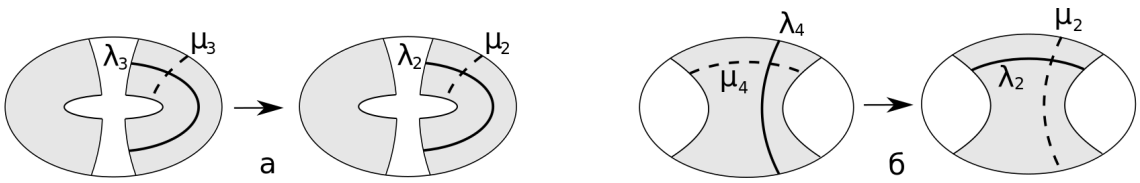


Рис. 31: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $R_3 - A$ (рис. а) и $R_4 - A$ (рис. б)

а также μ_2 и μ_3 совпадают с точностью до ориентации (рис. 31, а). В силу леммы 7 матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = \infty$, а метка $\varepsilon = 1$.

И наконец, пусть ребро имеет вид $R_4 - A$, соединяющее атомы из групп 2 и 4. Цикл λ_4 переходит в цикл μ_2 и наоборот (рис. 31, б). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n возможной семьи нулевой.

Теорема доказана. □

Замечание 9. *Заметим, что при выбранной ориентации Q^3 циклы λ на максимальных атомах A также будут ориентированны согласованно.*

Также заметим, что каждый атом из групп 5 и 6 (A^* и B) образует семью. В зависимости от соседних атомов, метка n атома A^* может равняться -2, -1 или 0, а метка n атома B может равняться -2, -1, 0 или 1.

Таким образом, были построены всевозможные инварианты Фоменко-Цишанга, соответствующие эллиптическому биллиарду с потенциалом.

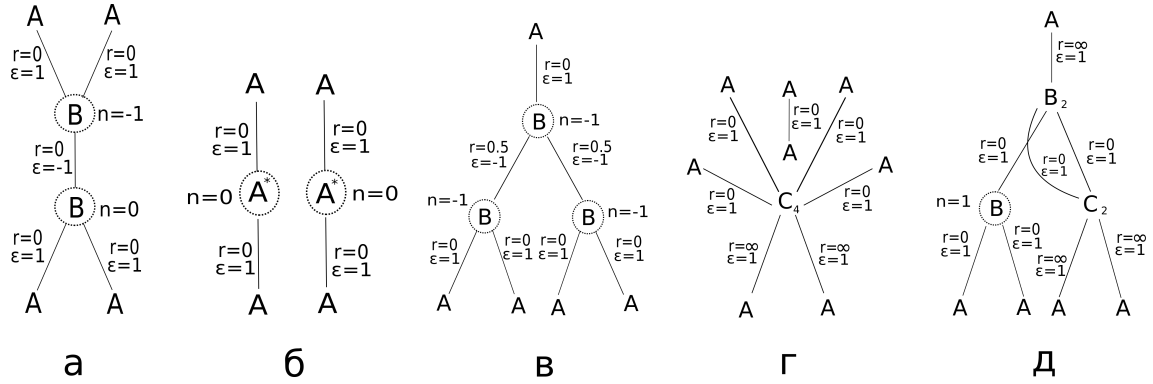


Рис. 32: Примеры меченых молекул с малым количеством критических значений интеграла F (не больше четырех)

8. Изоэнергетическое многообразие Q^3

Определим теперь, чему гомеоморфно изоэнергетическое многообразие $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$. Отметим, что единственное ограничение на вектор скорости задает следующая формула:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(h - W(x, y)),$$

где W является потенциалом. Таким образом, если в точке (x, y) имеем $W(x, y) < h$, то этой точке соответствует целая окружность векторов скорости, если $W(x, y) = h$, ей соответствует

один нулевой вектор, если $W(x,y) > h$, в этой точке не происходит движение. Следовательно, образ изоэнергетического многообразия Q^3 при проекции p на биллиард задается неравенством

$$W(x,y) \le h \tag{23}$$

Лемма 8. *Все точки, для которых выражение (23) обращается в равенство, являются граничными точками образа изоэнергетического многообразия $p(Q^3)$.*

Доказательство. Отметим, что по замечанию 6 и замечанию к теореме 4 фокусам всегда соответствует окружность векторов. Следовательно, если фокусы лежат в образе $p(Q^3)$, они удовлетворяют строгому неравенству (23) и являются внутренними точками.

Используя формулу (13) из леммы 2, приведем неравенство (23) к следующему виду:

$$h\lambda_1 - P(\lambda_1) \le h\lambda_2 - P(\lambda_2).$$

Напомним, что $V(z) = f + hz - P(z)$. Согласно замечанию к теореме 4 о точках ранга 0, не существуют таких двух точек $z = e_1 \in [-a,-b]$ и $z = e_2 \in [-b,0]$, которые являются локальными экстремумами многочлена $V(z)$ на своих отрезках (либо точками $-a$, $-b$ или 0) и $V(e_1) = V(e_2) = 0$. Следовательно, для любой точки (λ_1,λ_2), удовлетворяющей равенству (23), для одной из координат λ_i многочлен V является монотонным в окрестности точки $z = \lambda_i$, при этом λ_i не равняется $-a$, $-b$ или 0. Пусть без ограничения общности такой координатой является λ_1. Тогда в окрестности этой координаты существует значение λ_1', для которого $h\lambda_1' - P(\lambda_1') > h\lambda_1 - P(\lambda_1) = \lambda_2 - P(\lambda_2)$. Следовательно, точка (λ_1',λ_2) не принадлежит образу Q^3, а точка (λ_1,λ_2) является граничной.

Лемма доказана. □ Напомним, что многочлен V не имеет кратных корней по замечанию к теореме 4 о вырожденных орбитах. Следовательно, условие того, что точка $z = e$ является экстремумом, эквивалентно условию $V'(e) = 0$.

Лемма 9. *Любая компонента края образа $p(Q^3)$ гомеоморфна окружности.*

Доказательство. Для доказательства нужно показать, что множество $(x,y) : W = h$ не имеет самопересечений и точек касания с граничным эллипсом. Докажем, что нет самопересечений. Достаточно показать, что для любой точки границы либо $W_x' \ne 0$, либо $W_y' \ne 0$. Вычислим полный дифференциал W в граничной точке (λ_1,λ_2):

$$dW = \frac{d\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}(P'(\lambda_1)-h) - \frac{d\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(P'(\lambda_2)-h) = \frac{V'(\lambda_2)d\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{V'(\lambda_1)d\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Если точка (λ_1,λ_2) не принадлежит осям $0x$ и $0y$, условие $W_x' = W_y' = 0$ эквивалентно условию $V'(\lambda_1) = V'(\lambda_2) = 0$. Однако, последнее означает, что выполнены условия $C1$ и $C2$, что запрещено замечанием к теореме 4 о точках ранга 0.

Пусть теперь точка (λ_1,λ_2) принадлежит оси $0y$. Тогда $W_x' = 0$ в силу того, что каждый моном многочлена W имеет четную степень по переменной x. При этом

$$W_y' = \frac{2}{\lambda_1-\lambda_2} y V'(\lambda_2).$$

То, что $V'(\lambda_2) = 0$ и $V(-a) = V(\lambda_2)$, означает, что выполнены условия $C2$ и C_4, что запрещено замечанием к теореме 4 о точках ранга 0. Если $y = 0$, то точка с координатами $\lambda_1 = -a$ и $\lambda_2 = -b$ принадлежит границе и $V(-a) = V(-b)$. Следовательно, выполнены условия $C4$ и $C5$, что запрещено тем же замечанием. Аналогично рассматривается случай, когда точка (λ_1,λ_2) принадлежит оси $0x$.

Докажем теперь, что нет точек касания с граничным эллипсом. Достаточно показать, что вектора (W_x', W_y') и $(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$ линейно независимы. Если точка (λ_1,λ_2) не лежит на осях $0x$ и $0y$, из

условия линейной зависимости вытекает, что $V'(\lambda_1) = 0$. Следовательно, выполнены условия $C1$ и $C3$, что запрещено. Если же точка касания лежит на осях $0y$ или $0x$, то автоматически выполнены условия $C3$ и $C4$ или условия $C3$ и $C5$ соответственно, что также запрещено.

Лемма доказана. □

В итоге имеем, что образ изоэнергетического многообразия $p(Q^3)$ при проекции p на биллиард ограничен контурами, гомеоморфными окружности, и всем внутренним точкам этого образа соответствует окружность векторов скорости. Компоненты связности этого образа могут быть как односвязным, так и представлять собой "дырявые" диски со сколь угодно большим числом дырок.

Теорема 7. *Изоэнергетическое многообразие Q^3 интегрируемого плоского биллиарда в поле полиномиального потенциала состоит из нескольких компонент связности, каждая из которых гомеоморфна либо трехмерной сфере S^3, либо связной сумме $(S^1 \times S^2)\#...\#(S^1 \times S^2)$ нескольких многообразий $S^1 \times S^2$.*

Доказательство. Рассмотрим односвязную компоненту связности образа $p(Q^3)$ (обозначим ее K). Разобьем ее по некоторому внутреннему контуру на две области: дисковую K_1 и кольцевую K_2 (рис. 33, а). По замеченному ранее, каждой точке области K_1 соответствует окружность векторов. Следовательно, прообраз $p^{-1}(K_1)$ в Q^3 гомеоморфен полноторию. На его границе выберем базисные циклы λ_1 и μ_1 так, что цикл $\lambda_1 = p^{-1}(x, y)$, т.е. окружность векторов, соответствующая одной точке (x, y) области Π_1, а $\mu_1 = \{(x, y, \dot{x}, 0) : (x, y) \in \partial\Pi_1\}$, то есть прообраз границы области Π_1, каждой точке которой сопоставлен вектор скорости с компонентой $\dot{y} = 0$. Заметим, что цикл λ_1 задает образующую фундаментальной группы полнотория $p^{-1}(\Pi_1)$ (является его параллелью), а μ_1 стягивается в точку (является меридианом).

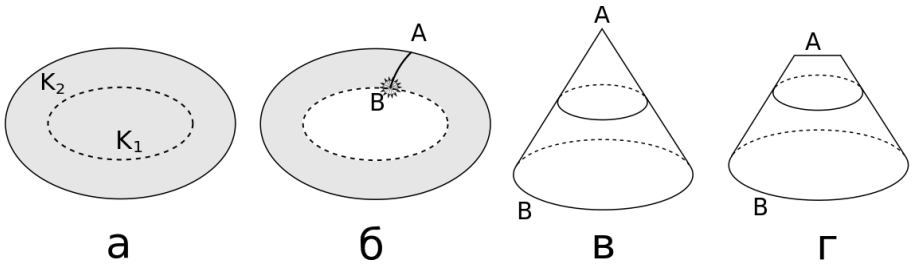


Рис. 33: Случай многообразия S^3

Докажем теперь, что прообраз области K_2 также гомеоморфен полноторию. Действительно, разобьем ее на стягиваемые отрезки, трансверсальные ее границе, начало которых лежит на границе области K (точка A), а конец – на внутренней границе области K_2 (точка B), как изображено на рис. 33, б. Заметим, что если точка A не лежит на границе биллиарда, ей соответствует нулевой вектор скорости. Следовательно, в прообразе отрезка AB лежит конус (рис. 33, в), т.е. он гомеоморфен двумерному диску. Если же точка A принадлежит граничному эллипсу, в прообразе отрезка AB лежит цилиндр, одна граница которого стянута на отрезок согласно отождествлению векторов скорости на границе биллиарда (рис. 33, г). Таким образом, прообраз отрезка AB опять гомеоморфен двумерному диску. Следовательно, прообраз всей области Π_2 гомеоморфен полноторию. На его границе выберем базисные циклы $\lambda_2 = \mu_1$ и $\mu_2 = \lambda_1$. Заметим, что цикл λ_2 задает образующую фундаментальной группы полнотория $p^{-1}(K_2)$ (является его параллелью), а μ_2 стягивается в точку (является меридианом).

Таким образом, прообраз K состоит из двух полноторий, склеенных по граничному тору по правилу $\lambda_2 = \mu_1$ и $\mu_2 = \lambda_1$. Итоговое трехмерное многообразие гомеоморфно S^3 (см., например, [14], т. I, стр. 201).

Теперь рассмотрим неодносвязную компоненту связности образа $p(Q^3)$, гомеоморфную кольцу (обозначим ее U). Как и в случае области K_2, разобьем ее на стягиваемые отрезки,

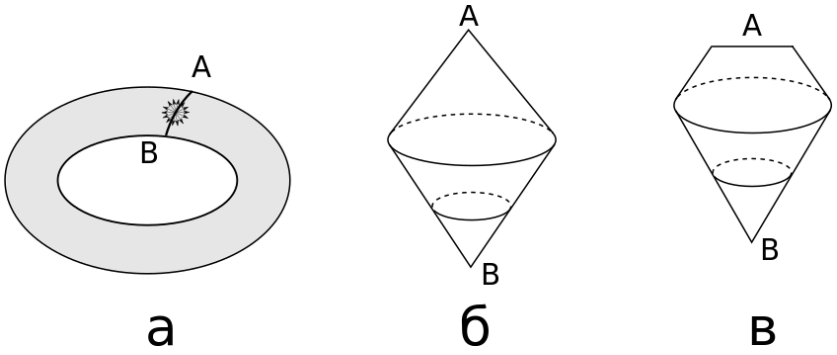


Рис. 34: Случай многообразия $S^1 \times S^2$

трансверсальные ее границе, начало которых лежит на внешней границе области U (точка A), а конец – на внутренней границе (точка B), как изображено на рис. 34, а. Заметим, что если точка A не принадлежит границе биллиарда, ей соответствует нулевой вектор скорости, прообраз отрезка AB гомеоморфен цилиндру, границы которого стянуты в точку (рис. 34, б). Если же точка A принадлежит границе биллиарда, прообраз отрезка AB гомеоморфен цилиндру, одна граница которого стянута в точку, а вторая – на отрезок согласно отождествлению векторов скорости на границе биллиарда (рис. 34, в). Таким образом, прообраз отрезка AB всегда гомеоморфен двумерной окружности S^2. Следовательно, прообраз всей области U гомеоморфен прямому произведению $S^2 \times S^1$.

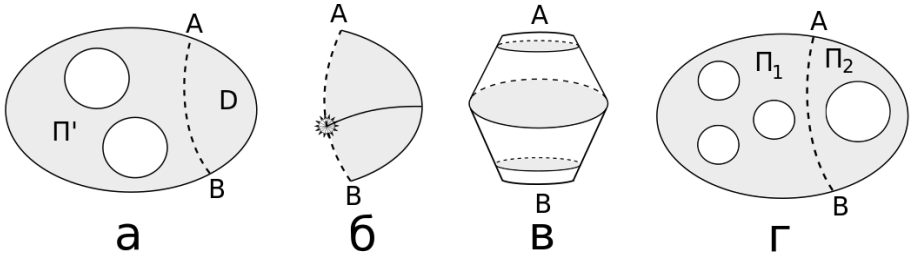


Рис. 35: Случай многообразия $S^2 \times S^1 \# ... \# S^2 \times S^1$

Наконец, рассмотрим общий случай, при котором компонента связности образа $p(Q^3)$ (обозначим ее Π) содержит произвольное количество компонент края («дырок»). Покажем по индукции, что если Π содержит n «дырок», ее прообраз гомеоморфен связной сумме n пространств $S^2 \times S^1$. Шаг индукции при $n = 1$ был доказан ранее. Предположим, что утверждение доказано для значения $n = k$. Пусть области Π соответствует $k' \leq k$ дырок. Выберем на ее внешней границе точки A и B и разобьем ее на две области Π' и D стягиваемым отрезком AB так, чтобы область D не содержала "дырок" (рис. 35, а). Докажем, что прообраз области D гомеоморфен трехмерному диску. Действительно, ее граница разбивается на два отрезка точками A и B, причем один из них лежит на границе области Π, а каждой точке второго соответствует окружность векторов скорости. Разобьем область $D \setminus \{A, B\}$ на отрезки, начала которых лежат на одной границе, а концы – на другой (рис. 35, б). Как и в случае области K_2, прообраз каждого такого отрезка разбиения гомеоморфен двумерному диску D^2. Следовательно, прообраз области D гомеоморфен $D^2 \times [A, B]$, где границы $D^2 \times \{A\}$ и $D^2 \times \{B\}$ стянуты в точку или на отрезок, т.е. трехмерному диску (рис. 35, в). Таким образом, по предположению индукции, прообраз области Π' гомеоморфен

$$\underbrace{S^2 \times S^1 \# ... \# S^2 \times S^1}_{k'} \setminus D^3.$$

Пусть теперь области Π соответствует $k+1$ дырка. Выберем на ее внешней границе точки A и B и разобьем ее на две области Π_1 и Π_2 стягиваемым отрезком AB так, чтобы область Π_1 содержала k "дырок", а область Π_2 – одну "дырку" (рис. 35, г). Согласно доказанному выше, прообразы этих областей гомеоморфны

$$\underbrace{S^2 \times S^1 \# ... \# S^2 \times S^1}_{k} \setminus D^3$$

и

$$S^2 \times S^1 \setminus \ D^3$$

соответственно. Следовательно, прообразом области Π является склейка этих двух пространств по граничной сфере, что гомеоморфно связной сумме $\underbrace{S^2 \times S^1 \# ... \# S^2 \times S^1}_{k+1}$.

Теорема доказана. □

Замечание 10. *Эта теорема схожа с теоремой Смейла из динамики твердого тела. Она гласит следующее: рассмотрим образ изоэнергетического многообразия Q^3 при его проекции на сферу Пуассона. Если этот образ покрывает всю сферу, то Q^3 гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{R}P^3$; если образ гомеоморфен сфере с одной дыркой, то Q^3 гомеоморфно сфере S^3; если образ содержит $m > 1$ дырок, то Q^3 гомеоморфно связной сумме* $\underbrace{S^2 \times S^1 \# ... \# S^2 \times S^1}_{m-1}$

Замечание 11. *Заметим, что в каждом конкретном случае конфигурации многочлена V мы независимо строим инвариант Фоменко-Цишанга и определяем тип многообразия Q^3, который в частности и определяется этим инвариантом. Иными словами, мы получили наглядный способ определения типа Q^3, соответствующего некоторой меченой молекуле (определенного вида), с помощью биллиарда в эллипсе.*

9. Лиувиллево эквивалентные системы

Определим теперь, какие известные интегрируемые системы с двумя степенями свободы лиувиллево эквивалентны нашей биллиардной системе на некотором значении гамильтониана H. Согласно теореме Фоменко-Цишанга достаточно сравнить меченые молекулы этих двух систем. Таблица 1 сопоставляет меченую молекулу, появляющуюся в нашей биллиардной системе, со случаями систем динамики твердого тела, имеющими эту же молекулу (список меченых молекул для случаев динамики твердого тела был приведен в [14], глава 5). Отметим, что все инварианты Фоменко-Цишанга, встречающиеся в динамике твердого тела, имеют не слишком большое число атомов. Следовательно, эквивалентные им случаи нашего биллиарда нужно искать для потенциалов достаточно малого порядка. И действительно, все приведенные инварианты в таблице 1 встречаются уже для потенциалов второй и четвертой степени.

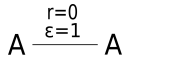
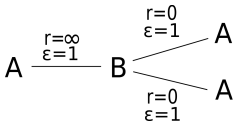
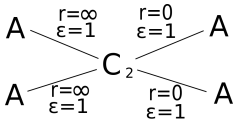
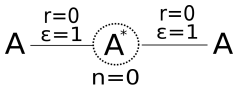
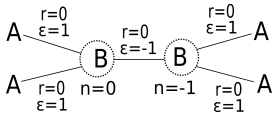
№	Молекула	Случаи динамики твердого тела
1		Лагранж (1), Ковалевская (1), Жуковский (7) Эйлер (1), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (1)
2		Жуковский (8)
3		Эйлер (2), Клебш (5)
4		Горячев-Чаплыгин-Сретенский (2)
5		Ковалевская (3)

Таблица 1: Эквивалентные системы динамики твердого тела

10. Заключение

Таким образом, был проведен топологический анализ интегрируемого биллиарда в эллипсе, снабженного полиномиальным потенциалом произвольного порядка. В разделе 3 был приведен общий вид интегрируемого потенциала W и его взаимосвязь с первыми интегралами нашей системы. В разделе 5 была построена бифуркационная диаграмма и описаны ее свойства. В разделе 6 были вычислены бифуркации торов Лиувилля (3-атомы), соответствующие точкам дуг бифуркационной диаграммы. В разделах 7 и 8 был вычислен инвариант Фоменко-Цишанга, соответствующий невырожденному изоэнергетическому многообразию Q^3, а также вид самого Q^3. Наконец, в разделе 9 был приведен список систем динамики твердого тела, лиувиллево эквивалентного некоторым случаям нашего биллиарда.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Дж. Динамические системы М.;Л.; Гостехиздат, 1941.

2. Якоби К. Лекции по динамике. М.; Гостехиздат, 1936.

3. V. Kaloshin, A. Sorrentino, On the local Birkhoff conjecture for convex billiards, Ann. of Math. 2018. 188, No1. 315–380.

4. A. A. Glutsyuk, On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature, Journal of the European Mathematical Society, 2021. 23, No 3. 995–1049.

5. Фокичева В. В., Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176.

6. В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем, Матем. сб., 209:12 (2018), 17-56

7. В. А. Кибкало, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева, Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками, Тр. ММО, 82:1 (2021), 45–78

8. M. Bialy, A. E. Mironov, Algebraic non-integrability of magnetic billiards / J. Phys. A, 49:45 (2016), 455101, 18 pp.

9. В. В. Ведюшкина, С. Е. Пустовойтов, “Классификация слоений Лиувилля интегрируемых топологических биллиардов в магнитном поле”, Матем. сб., 214:2 (2023), 23–57

10. Козлов В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде.//Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.

11. V. I. Dragovich, Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse, J. Appl. Maths Mechs, Vol. 62, No. 1, pp. 159-162, 1998

12. И. Ф. Кобцев, Эллиптический биллиард в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ, Матем. сб., 211:7 (2020), 93–120

13. Пустовойтов С. Е. Топологический анализ эллиптического биллиарда в потенциальном поле четвертого порядка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2021.

14. Болсинов А. В., Фоменко А. Т., Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I, II— Ижевск: РХД, 1999.

15. В. В. Козлов, Д. В. Трещев, Генетическое введение в динамику систем с ударами, М.: Изд-во МГУ, 1991.

16. Харламов М. П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приближения к классическим системам //Нелинейная динамика, 2010, том 6, №4, с.769-805.

17. Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости. - Известия АН СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с.1276-1307.

18. Фоменко А.Т. "Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем". - Успехи математических наук, 1989, т.44, вып.1 (265), с.145-173.

19. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. - Известия АН СССР. 1990, т.54, No.3, с.546-575.

20. Фоменко А.Т. "Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем". - Известия АН СССР. серия матем. т.55, No.4, 1991, с.747-779.

REFERENCES

1. Birkhoff, G., 1966. “Dynamical systems”, *American Mathematical Society. Colloquium publications*. Vol. IX, 305 pp.

2. Edited by Clebsch, A., 2009. "Jacobi's lectures on dynamics", *Hindustan book agency, New Delhi*, 2nd edition, 339 pp.

3. Kaloshin, V., Sorrentino, A., 2018. "On the local Birkhoff conjecture for convex billiards", *Ann. of Math.*. 188, No 1. pp. 315–380.

4. Glutsyuk, A. A., 2021. "On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature", *Journal of the European Mathematical Society*, 23, No 3. pp. 995–1049.

5. Fokicheva, V. V., "A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics", *Sb. Math.*, 206:10 (2015), pp. 1463–1507.

6. Vedyushkina, V. V., Kharcheva, I. S., 2021. "Billiard books realize all bases of Liouville foliations of integrable Hamiltonian systems", *Mat. Sb.*, 212:8, pp. 89-–150; *Sb. Math.*, 212:8, pp. 1122-–1179.

7. Kibkalo V. A., Fomenko A. T., Kharcheva I. S., 2021. "Realization of integrable Hamiltonial systems by billiard books", *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, **80**.

8. Bialy, M., Mironov, A. E., 2016. "Algebraic non-integrability of magnetic billiards", *J. Phys. A*, 49:45, 455101, 18 pp.

9. Vedyushkina V. V., Pustovoitov S. E., 2023. "Classification of liouville foliations of integrable topological billiards in magnetic fields", *Sbornik Mathematics*, Vol. 214, no. 2. pp. 166—196.

10. Kozlov, V. V., 1995. "Some integrable extensions of Jacobi's problem of geodesics on an ellipsoid", *Prikl. Mat. Mekh.*, 59:1, pp. 3-–9; English transl. in *J. Appl. Math. Mech.*, 59:1, pp. 1—7.

11. Dragovich, V. I., 1998. "Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse", *J. Appl. Maths Mechs*, Vol. 62, No. 1, pp. 159–162.

12. Kobtsev, I. F., 2020. "An elliptic billiard in a potential force field: classification of motions, topological analysis", *Sb. Math.*, 211:7, pp. 987-–1013.

13. Pustovoitov, S. E., 2021. "Topological Analysis of an Elliptic Billiard in a Fourth-Order Potential Field", *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol. 76, Iss. 5, pp. 193—205.

14. Bolsinov, A. V., Fomenko, A. T., 2004. "Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification", *Chapman & Hall/CRC, Boca Raton*.

15. Kozlov, V. V., Treshchev, D. V., 1991. "Billiards: A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts", *American Mathematical Society. Translations of Mathematical Monographs*. Vol: 89; 171 pp.

16. Kharlamov M.P., 2010. "Topological analysis and Boolean function: I. Methods and applications to the classical systems", *Non-lineal dynamics*, 6:4, pp. 769–805.

17. Fomenko, A. T., 1987. "The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions of integrability", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, Vol. 29, Iss. 3, pp. 629—658.

18. Fomenko, A. T., 1989. "The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems", *Russian Mathematical Surveys*, 44(1): 181.

19. Fomenko, A. T., Zieschang, H., 1990. “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 54:3, pp. 546-–575; *Math. USSR-Izv.*, 36:3 (1991), pp. 567—596.

20. Fomenko, A. T., 1992. “A bordism theory for integrable nondegenerate Hamiltonian systems with two degrees of freedom. A new topological invariant of higherdimensional integrable systems”, *Math. USSR-Izv.*, 39:1 (1992), pp. 731-–759.

Получено: 16.11.2023
Принято в печать: 21.03.2024