ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 1.

УДК 517.518.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-52-61

Об оценке тригонометрических интегралов с квадратичной фазой[1]

И. А. Икромов, А. Р. Сафаров, А. Т. Абсаламов

Икромов Исроил Акрамович — Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан), Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).
e-mail: ikromov1@rambler.ru
Сафаров Акбар Рахманович — Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан), Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).
e-mail: safarov-akbar@mail.ru
Абсаламов Акмал Толлибоевич — Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).
e-mail: absalamov@samdu.uz

Аннотация

В статье рассматривается проблема суммируемости для тригонометрических интегралов с квадратичной фазой. Аналогичная задача рассмотрена в работах [2], [3], [4] в частных случаях. Наши результаты обобщают результаты этих работ на кратные тригонометрические интегралы.

Ключевые слова: тригонометрический интеграл, экспонент, сумма, фаза, многочлен.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
И. А. Икромов, А. Р. Сафаров, А. Т. Абсаламов. Об оценке тригонометрических интегралов с квадратичной фазой // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 52–61.

[1]Исследование выполнено с поддержкой гранта РУз (проект ОТ-Ф4-69).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 1.

UDC 517.518.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-52-61

On estimates for trigonometric integrals with quadratic phase

I. A. Ikromov, A. R. Safarov, A. T. Absalamov

Ikromov Isroil Akramovich — V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan), Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).
e-mail: ikromov1@rambler.ru
Safarov Akbar Rakhmanovich — V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan), Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).
e-mail: safarov-akbar@mail.ru
Absalamov Akmal Tolliboevich — Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).
e-mail: absalamov@mail.ru

Abstract

This paper is devoted to the summation problem for trigonometric integrals with quadratic phase. The particular cases of this problem were considered in [2],[3],[4]. We generalize the results of these papers to the multidimensional exponential integrals.

Keywords: trigonometrical integral, exponent, sums, phase, polynomial.

Bibliography: 14 titles.

For citation:
I. A. Ikromov, A. R. Safarov, A. T. Absalamov, 2024, "On estimates for trigonometric integrals with quadratic phase", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 52–61.

1. Введение

Пусть $P(x,s) \in \mathbb{R}[x]$ многочлен от $x \in \mathbb{R}^k$ с коэффициентами $s \in \mathbb{R}^N$. Через Q обозначается компактное множество в $\mathbb{R}^k$.

Рассмотрим тригонометрический интеграл

$$T(s) = \int\limits_Q \exp(iP(x,s))dx. \tag{1}$$

Постановка задачи: Найти точную нижнюю грань p_0 чисел p таких, что $T \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^N)$.

Эта задача впервые была рассмотрена И.М.Виноградовым [15] в связи с проблемой аналитической теории чисел и получена оценка сверху для p_0 в случае $k=1$. Позднее, оценка И.М.Виноградова была улучшена в работе [5]. В работе [1] указано точное значение p_0 в случае $k=1$ и доказана конечность этого числа в многомерных случаях. В работе [6] рассмотрены оценки снизу для числа p_0 и указано его точное значение когда коэффициенты многочлена меняются в некотором подпространстве пространства $\mathbb{R}^N$. Аналогичные задачи рассмотрены в работах [7]-[12].

Аналог этой проблемы рассмотрен в работе [13], для случая когда Q есть единичный шар с центром в начале координат и $P(x,s)$ квадратичный полином удовлетворяющий некоторому условию трансверсальности.

В работе [2] получена оценка снизу для p_0 в случае $k=2$.

В работах [2] и [4] рассмотрена аналогичная задача в случае $k=2$. Более того в [2], показано, что если P однородный квадратичный полином и $k=2$, то $p_0=4$ в случае когда $Q=[0,1]^2$ точнее при $p>4$ тригонометрический интеграл сходится и при $p\leq 4$ расходится.

В данной работе мы рассмотрим задачу суммируемости тригонометрических интегралов когда $k\geq 1$ и получим точный показатель сходимости p_0 в случае когда $Q=[0,1]^k$.

В случае когда P однородный многочлен степени два получим точное значение p_0.

Пусть полином P имеет вид:

$$P(x,A,b)=(Ax,x)+(b,x),$$

где $A=(a_{lm})^k{}_{l,m=1}$ вещественная симметричная $k\times k$ матрица, $b:=(b_1,b_2,...,b_k)\in\mathbb{R}^k$ и $(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение векторов. Рассмотрим тригонометрический интеграл

$$T(A,b)=\int\limits_{\mathbb{R}^k}\exp\left(iP(x,A,b)\right)\chi_K(x)dx,$$

где $K-$компактное множество и $\chi_K(x)-$характеристическая функция множества K.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\theta=\int\limits_{\mathbb{R}^N}|T(A,b)|^p dbda,$$

где $db=db_1db_2...db_k$ и $da=\prod\limits_{1\leq l\leq m\leq k}da_{lm}$.
Справедлива следующая:

Теорема 1. *Пусть K компактное множество, тогда интеграл θ сходится при $p>2k+2$ и причем если K содержит внутреннюю точку x^0 и существует прямая l проходящая через точку x^0 такая, что множество $\{l\cap K\}$ содержит лишь конечное число точек, то при $p\leq 2k+2$ интеграл расходится. Таким образом, если K компактное множество с непустой внутренностью, то $p_0=2k+2$.*

Доказательство теоремы 1. Оценка сверху для p_0 непосредственно следует из теоремы 1 работы [16]. Рассмотрим следующее подмножество $\Omega(a_{11})$ пространства $\mathbb{R}^{N-1}$:

$$|a_{12}|+|a_{13}|+...+|a_{1k}|<c_1a_{11},\quad -\frac{1}{2}<\frac{b_1}{a_{11}}<-\frac{1}{4},\quad |a_{lj}-\frac{a_{1l}a_{1j}}{a_{11}}|\leq c_2,\quad |b_l-\frac{2b_la_{1l}}{a_{11}}|\leq c_2,$$

где $l=2,...,n$ и c_1, c_2 достаточно малые фиксированные положительные числа.

Лемма 1. Существует положительное число c такое, что для меры Лебега множества $\Omega(a_{11})$ справедливо следующее равенство:

$$\mu(\Omega(a_{11}))=c\cdot a_{11}^k.$$

Доказательство Берем следующее отображение

$$\xi_{1l}(A,b_1,...,b_k)=a_{1l},$$

$$\xi^1(A,b_1,...,b_k)=b_1,$$

$$\xi^l(A, b_1, ..., b_k) = b_l - \frac{2b_1 a_{1l}}{a_{11}},$$
$$\xi_{lj}(A, b_1, ..., b_k) = a_{lj} - \frac{a_{1l} a_{1j}}{a_{11}},$$
$$j \leq l = 2, 3, ..., k.$$

Оно отображает множество $\Omega(a_{11})$ на множество $\Omega(\xi)$ и Якобиан этого отбражения равен единице. Следовательно,

$$\mu(\Omega(a_{11})) = \mu(\Omega(\xi)).$$

Легко показать, что для множества $\Omega(\xi)$:

$$\mid \xi_{12} \mid + \mid \xi_{13} \mid +...+ \mid \xi_{1k} \mid < c_1 \cdot a_{11},$$
$$-\frac{1}{2} < \frac{\xi^1}{a_{11}} < -\frac{1}{4},$$
$$\mid \xi^l \mid \leq c_2, \quad \mid \xi_{lj} \mid \leq c_2, \quad j < l = 2, 3, ..., k,$$

получим

$$\mu(\Omega(\xi)) = c \cdot a_{11}^k.$$

Следовательно,

$$\mu(\Omega(a_{11})) = c \cdot a_{11}^k.$$

Лемма 2. Существует положительное число L такое, что для любого $a_{11} > L$ и $(A, b) \in \Omega(a_{11})$ для интеграла $T(A, b)$ справедливо следующее асимптотическое равенство

$$T(A, b) = \frac{c(A, b)}{a_{11}^{\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{a_{11}}\right)$$

при $a_{11} \to +\infty$, причем существует положительное число δ такое, что для любого $(A, b) \in \Omega(a_{11})$, выполняется неравенство

$$|c(A, b)| > \delta > 0.$$

Лемма 2 доказывается обычным методом стационарной фазы. Отметим, что для достаточно малых c_1, c_2 при $(A, b) \in \Omega(a_{11})$ и для достаточных больших L, фаза имеет осцилляции только в направлении x_1 по этому, при фиксированных значениях $x_2, ..., x_n \in [0, 1]$, невырожденная критическая точка $x_1(A, b, x_2, ..., x_n)$ лежит внутри $(0, 1)$.

Наконец, для интеграла θ, имеем оценку снизу

$$\theta \geq \int_L^\infty \int_{\Omega(a_{11})} |T(A, b)|^p db da \geq \delta c \int_L^\infty a_{11}^{k - \frac{p}{2}} da_{11}.$$

Таким образом при $p \leq 2k + 2$ последний интеграл расходится. Теорема 1 доказана.

2. Случай, когда P однородный многочлен второй степени

Теперь предположим, что $P(x, A) = (Ax, x)$. В работе [4] доказано, что если Q квадратичный полином в $\mathbb{R}^2$, то при $p > 4$ интеграл θ сходится и при $p_0 \leq 4$ интеграл θ расходится. В данной работе мы распространяем результаты И.Ш.Джаббарова на случай, когда Q многогранник в $\mathbb{R}^{2k}$.

Под многогранником мы подразумеваем конечное объединение невырожденных симплексов [18].

Теорема 2. *Если $P(x, A) = (Ax, x)$ и Q многогранник, то при $p > 2k$ интеграл θ сходится. Если $Q = [0, 1]^k$, то при $p \leq 2k$ интеграл θ расходится.*

Замечание 1. В этом случае мы не можем применить результаты работы [16], так как соответствующее множество $\{x_i x_j\}_{i \leq j=1}^n$ не является гладкой поверхностью.

Замечание 2. В зависимости от множества Q показатель p может быть меньше чем $2k$. Например, если $k = 2$ и Q достаточно малый квадрат с центром в точке $(1, 1)$, то можно доказать, что при $p > 3$ интеграл θ сходится.

3. Вспомогательные леммы

Сначала рассматривается следующий несобственный интеграл

$$T_\infty(A, b) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \exp\left(iP(x, A, b) - (x, x)\right) dx.$$

Очевидно, что последний интеграл абсолютно и равномерно сходится по параметрам и он явно вычисляется [13].

Лемма 3. *Справедливо следующее равенство*

$$T_\infty(A, b) = (2\pi)^{\frac{k}{2}} (det(I - iA))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{((I - iA)^{-1} b, b)}{4}\right),$$

где квадратный корень определится понимается следующим образом

$$(det(I - iA))^{-\frac{1}{2}} = (1 - i\lambda_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - i\lambda_2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \ldots \cdot (1 - i\lambda_k)^{-\frac{1}{2}}$$

здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ собственные значения матрицы A. $z^{-\frac{1}{2}}$ ветвь многозначной функции, определенной на комплексной плоскости с разрезом по нижней части мнимой оси и $1^{-\frac{1}{2}} = 1$.

Лемма 3 доказывается приведением A к диагональному виду. Таким образом вычисление интеграла сводится к одномерному интегралу и явно вычисляется (более подробно см.[14]).

Очевидно, что выполняются следующие равенства:

$$\left|\exp\left(-\frac{((I - iA)^{-1} b, b)}{4}\right)\right|^p = \exp\left(-\frac{((I + A^2)^{-1} b, b)p}{4}\right)$$

и

$$\int\limits_{R^k} \exp\left(-\frac{((I + A^2)^{-1} b, b)p}{4}\right) db = \frac{(8\pi)^{\frac{k}{2}} (det(I + A^2))^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{k}{2}}}.$$

Введем следующее обозначение:

$$\theta_\infty = \int\limits_{R^N} |T_\infty(A, b)|^p dbda,$$

где

$$N = \frac{k(k + 2)}{2}.$$

Предложение 1. *Интеграл θ_∞ сходится при $p > 2k + 2$ и расходится при $p \leq 2k + 2$.*

Заметим, что согласно лемме 3, доказательство предложения сводится к исследованию сходимости следующего интеграла

$$\theta_\infty = c(p) \int\limits_{\mathbb{R}^{N-k}} \frac{da}{(det(I + A^2))^{\frac{p-2}{4}}}, \tag{2}$$

где $c(p)$ некоторое положительное число, оно явно вычисляется.

Как известно, определитель является инвариантом ортогональной группы. Поэтому естественно интегрировать сначала по орбитам ортогональной группы, затем интегрировать по фактор-пространству.

Пусть M множество вещественных симметричных матриц и SO_k группа специальных ортогональных матриц. Эта группа естественным образом действует в пространстве M, $g(A) = g^t Ag$, где $g\in SO_k$ и $A\in M$.

Известно, что для любой вещественной симметричной матрицы A, существует $g\in G$ такое, что $g(A) = diag(\lambda_1, ..., \lambda_k)$, где $diag(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ диагональная матрица с диагональными элементами $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Другими словами, для любой матрицы A существует $g\in SO_k$ такое, что $A = g^t\Lambda g$, где $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_k)-$некоторая диагональная матрица.

Таким образом, если рассмотреть многообразие $\mathbb{R}^k\times SO_k$, то естественно определяется гладкое сюръективное отображение

$$\Phi : \mathbb{R}^k\times SO_k\mapsto M$$

определенное по формуле $\Phi(\Lambda, g) = g^t\Lambda g$.

Пусть $da = da_{11}\wedge da_{12}\wedge ...\wedge da_{kk}$ естественная форма объема в пространстве M. Мы можем определить образ этой формы при отображении Φ, обозначаемый через $\Phi^* da\in\wedge^{N-k}(\mathbb{R}^k\times SO_k)$.

Лемма 4. *Справедливо следующее равенство*

$$\Phi^* da = \prod_{1\leq l<m\leq k}(\lambda_m - \lambda_l)d\lambda_1\wedge ...\wedge d\lambda_k\wedge\omega,$$

где $\omega-$форма объема на ортогональной группе SO_k.

Лемма 4 доказывается с использованием нулевого множества якобиана отображения Φ. Отметим, что справедливо равенство $\prod\limits_{1\leq l<m\leq k}(\lambda_m - \lambda_l)^2 = \rho_A(\lambda)$, где $\rho_A(\lambda)-$характеристический многочлен матрицы A.

Согласно лемме 3, интеграл (2) записывается в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{N-k}}\frac{da}{(det(I + A^2))^{\frac{p-2}{4}}} = \int\limits_{\mathbb{R}^k}\frac{\prod\limits_{1\leq l<m\leq k}|\lambda_m - \lambda_l|}{\prod\limits_{1\leq l\leq k}(1 + \lambda_l{}^2)^{\frac{p-2}{4}}}d\lambda_1\wedge ...\wedge d\lambda_k\int\limits_{SO_k}\omega$$

Из последнего равенства следует, что сходимость интеграла (2) сводится к исследованию сходимости интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k}\frac{\prod\limits_{1\leq l<m\leq k}|\lambda_m - \lambda_l|}{\prod\limits_{1\leq l\leq k}(1 + \lambda_l{}^2)^{\frac{p-2}{4}}}d\lambda_1\wedge ...\wedge d\lambda_k.$$

Легко видеть, что этот интеграл сходится при $p > 2k + 2$ и расходится при $p \leq 2k + 2$. Что и доказывает предложение 1.

Доказательство теоремы 2. При доказательстве используется классическое неравенство Юнга. Если $f\in L_p(\mathbb{R}^k)$ и $g\in L_r(\mathbb{R}^k)$ произвольные функции, то справедливо следующее неравенство

$$\|f*g\|_{L_q}\leq\|f\|_{L_p}\|g\|_{L_r},$$

где $f*g$ свертка функции f и g, причем постоянные $1\leq p, q, r\leq\infty$ связаны соотношением

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

Пусть K компактный многогранник в $\mathbb{R}^k$ и

$$h(b) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{|x|^2}\chi_K(x)e^{-2\pi i(b,x)}dx.$$

Лемма 5. *Для любого положительного числа ϵ, имеет место включение $h\in L_{1+\epsilon}(\mathbb{R}^k)$.*

Доказательство. Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ $\hat{\chi}_K \in \mathbb{L}_{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^k)$ (например, см.[17]). тогда утверждение леммы 3 легко следует из неравенства Юнга.

Теперь вернемся к доказательству теоремы 2. Согласно тождеству Планшареля имеем:

$$T(A) = \int_K e^{i(Ax,x)}dx = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(Ax,x)}\chi_K(x)dx = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(Ax,x)-|x|^2}e^{|x|^2}\chi_K(x)dx = \int_{\mathbb{R}^k} \widehat{f}(A,b)\overline{g}(b)db,$$

где $\widehat{f}(A,b) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(Ax,x)-|x|^2-2\pi i(x,b)}dx$ и $\widehat{g}(b) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{|x|^2}e^{-2\pi i(x,b)}dx$.

Пусть $q > 1$ фиксированное число. Тогда, применяя неравенство Гёльдера, имеем:

$$|T(A)| \leq \|\widehat{f}(A,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{q'}(\mathbb{R}^k)}\|g\|_{\mathbb{L}^q(\mathbb{R}^k)},$$

где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Согласно лемме 3 имеем:

$$|T(A)| \leq \frac{c_q}{(det(I+A^2))^{\frac{p}{4}-\frac{1}{2q'}}}.$$

Таким образом, если $p > 2k$, то мы можем выбрать $q' > 1$ так, что $\frac{p}{4} - \frac{1}{2q'} > \frac{k}{2}$.

Отсюда следует, что если $\frac{p}{4} - \frac{1}{2q'} > \frac{k}{2}$, то $T \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^k)$.

Осталось доказать точность результата. Рассмотрим следующее подмножество $\Omega^+(a_{11})$ пространства $\mathbb{R}^{N-1}$, где $N = \frac{k(k+1)}{2}$.

$$a_{11} > 0, |a_{12}| + |a_{13}| + ... + |a_{1k}| < c_1 a_{11}, \quad \left|a_{lj} - \frac{a_{1l}a_{1j}}{a_{11}}\right| \leq c_2, a_{1l} < 0$$

где $l \leq j = \overline{2,n}$,$l = 2, ..., n$ и c_1, c_2 достаточно малые фиксированные положительные числа.

Согласно лемме 1 существуют положительные числа c_1 и c_2 такие, что для меры Лебега множества $\Omega^+(a_{11})$ справедливо следующее равенство:

$$\mu(\Omega^+(a_{11})) = c \cdot a_{11}^{k-1}.$$

Лемма 6. *Существуют положительное число L такое, что для любого $a_{11} > L$ и $A\in \Omega^+(a_{11})$ для интеграла $T(A)$ справедливо следующее асимптотическое равенство*

$$T(A) = \frac{c(A)}{a_{11}^{\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{a_{11}}\right)$$

при $a_{11}\to+\infty$, причем существует положительное число δ такое, что для любого $(A,b) \in$ $\in \Omega^+(a_{11})$ выполняется неравенство

$$|c(A)| > \delta > 0.$$

Лемма 6 доказывается обычным методом стационарной фазы. Заметим, что если $\delta_2 > \frac{1}{2}$ и $\delta_1 < 0$ то справедливо следующее соотношение

$$\left|\int_{\delta_1\sqrt{\lambda}}^{\delta_2\sqrt{\lambda}} \cos y^2 dy\right| = c(\delta_1, \delta_2, \lambda)$$

причем, существуют $\lambda_0, \varepsilon > 0$ такие, что выполняется неравенство $c(\delta_1, \delta_2, \lambda) \geq \varepsilon > 0$ при всех $\lambda \geq \lambda_0$.

Отметим, что для достаточно малых c_1, c_2 при $A \in \Omega^+(a_{11})$ и для достаточных больших L фаза имеет осцилляции только в направлении x_1 по этому, при фиксированных значениях $x_2, ..., x_n \in [0, 1]$ невырожденная критическая точка $x_1(A, b, x_2, ..., x_n)$ лежит внутри $(0, 1)$.

Наконец, для интеграла θ, имеем оценку снизу

$$\theta \geq \int_L^\infty \int_{\Omega(a_{11})} |T(A)|^p da \geq \delta c \int_L^\infty a_{11}^{k-\frac{p}{2}-1} da_{11}.$$

Таким образом при $p \leq 2k$ последний интеграл расходится. Основная теорема 2 доказана.

4. Двумерный случай

Отметим, что в однородном случае результаты [16] неприменимы. При доказательстве теоремы 2 существенно используется свойство $\widehat{\chi}_Q \in \mathbb{L}_{1+0}(\mathbb{R}^k)$.

В работе В.В.Лебедева приведен пример области $\partial D \in C^{1,\omega}$, где ω модуль непрерывности градиента φ, определяющей ∂D, такое что $\widehat{\chi}_Q \in \mathbb{L}_{1+0}(\mathbb{R}^k)$. Поэтому, мы можем считать, что D компактная область с достаточно гладкой границей.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть D компактная область такая, что $\widehat{\chi}_D \in \mathbb{L}_q(\mathbb{R}^2)$ и $T(A) = = \int_D e^{i(Ax,x)} dx$. Тогда $T \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^3)$ при $p > 6 - \frac{2}{q}$. Более того, если $\widehat{\chi}_D \in \mathbb{L}_{1+0}(\mathbb{R}^2)$, то, при любом $p > 4$, справедливо включение $T \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^3)$.*

Замечание 3. Из результатов В.В.Лебедева [17] следует, что существует множество D отличное от многоугольника, такое, что $\widehat{\chi}_Q \in \mathbb{L}_{1+0}(\mathbb{R}^2)$.

Следствие. Если $D \subset \mathbb{R}^2$ компактное множество, такое, что $\partial D \subset C^1$, то при $p > 4,5$ справедливо соотношение $T \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^3)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов, Г. И., Карацуба, А. А., Чубариков, В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм // М:Наука, 1987, 357 с.

2. Архипова, Л. Г., Чубариков, В. Н. О показателях сходимости особого интеграла и особого ряда одной многомерной проблемы // Чебышевский сборник, 2019, вып.20, том 4, С.46–57.

3. Чахкиев, М. А. Оценка показателя сходимости особого интеграла проблемы Терри для однородного многочлена степени N от двух переменных // LXI Международные научные чтения (памяти А.Н.Колмогорова) Международной научно-практической конференции 16 декабря, 2019, С.18–21.

4. Джаббаров, И. Ш. Показатель сходимости особого интеграла двумерной проблемы Терри с однородным многочленом степени 2 // Матем. заметки, 2019, том 105, вып. 3, С. 375—382.

5. Hua, Loo-keng. On the number of solutions of Tarry's problem // Acta Sci. Sinica, 1952, vol.1, № 1, pp. 1–76.

6. Ikromov, I. A. On the convergence exponent of trigonometric integrals // Proceedings, MIRAN, 1997, vol, 218, pp.179–189.

7. Safarov, A. On the L^p-bound for trigonometric integrals // Analysis mathematica, 2019, **45**, pp.153–176.

8. Сафаров, А. О суммируемости двукратных осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой третьей степени // Узбекский математический журнал, 2015, **4**, С.108–117.

9. Safarov, A. Invariant estimates of two-dimensional oscillatory integrals // Math. Notes, 2018, 104, pp.293–302.

10. Safarov, A. On invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phase, // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2016, **9**, pp.102–107.

11. Safarov, A. On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface // Russian Mathematics, 2019, 63(4), pp.57–63.

12. Safarov, A. R. Estimates for Mittag-–Leffler functions with smooth phase depending on twovariables // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2022, **15(4)**, pp.459-–466.

13. Makenhaupt, G. Bounds in Lebesgue Spaces of Oscillatory Integral Operators // Habilitationsschift zur Erlangung der Lehrbefugnis im Fach Matematik der Gesamthochschule, Siegen, 1996.

14. Stein, E. M. Harmonic Analysis: real-valued methods, orthogonality and Oscillatory Integrals // Princeton, 1993.

15. Виноградов, И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // М:Наука, 1980, 158 С.

16. Jong-Guk, Bak, Sanghyuk, Lee. Restriction of the Fourier transform to a quadratic surface in $\mathbb{R}^n$ // Mathematische Zeitschrift, 2004, No.247, pp.409–422.

17. Лебедев, В.В. О преобразовании Фурье характеристических функций областей с C^1−гладкой функцией // Функц. анал. и его прил., 2013, вып.47, том 1. С. 33–46.

18. Лебедев, В.В. Операторы суперпозиции в некоторых пространствах гармонического анализа // Диссертация на соискание учёной степени физико-математическим наукам. URL: https://www.dissercat.com/content/operatory-superpozitsii-v-nekotorykh-prostranstvakh-garmonicheskogo-analiza

REFERENCES

1. Arkhipov, G. I., Karatsuba, A.A.& Chubarikov, V.N., 1987. “Theory of multiple trigonometric sums”, *Moscow. Nauka*, p. 357.

2. Arkhipov, L. G., & Chubarikov, V.N, 2019. “Chebyshevskiy sbornik”, *On the exponents of the convergence of singular integrals and singular series of a multivariate problem*, vol. 20, no. 4, pp.46–57.

3. Chahkiev, M. A., 2019. “Estimation of the convergence index of a singular integral Terry problems for a homogeneous polynomial degree n of two variables”, *LXI International Scientific Readings (in memory of A.N.Kolmogorov) International Scientific and Practical Conference December 16*, pp.18–21.

4. Jabbarov, I. Sh., 2019. “Mathematical Notes”, *Exponent of a special integral in the two-dimensional Tarry problem with homogeneous of degree 2*, vol. 105, no. 3, pp. 375—382.

5. Hua Loo-keng, 1952. “On the number of solutions of Tarry’s problem”, *Acta Sci. Sinica*, vol.1, No. 1, pp. 1–76.

6. Ikromov, I. A., 1997. “On the convergence exponent of trigonometric integrals”, *Proceedings, MIRAN*, vol.218, pp.179–189.

7. Safarov, A., 2019. “On the L^p-bound for trigonometric integrals”, *Analysis mathematica* no. 45, pp. 153–176.

8. Safarov, A., 2015. “About summation of oscillatory integrals with homogeneous polynomial of third degree”, *Uzbek Mathematical journal* no.4 , pp.108–117.

9. Safarov, A., 2018. “Invariant estimates of two-dimensional oscillatory integrals”, *Math. Notes*, 104, pp.293–302.

10. Safarov, A., 2016. “On invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phase”, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **9**, pp.102–107.

11. Safarov, A., 2019. “On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface”, *Russian Mathematics*, 63 (4), pp.57–63.

12. Safarov, A. R., 2022. “Estimates for Mittag-–Leffler Functions with Smooth Phase Depending on Two Variables”, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **15(4)**, pp.459-–466.

13. Makenhaupt, G., 1996. “Bounds in Lebesgue Spaces of Oscillatory Integral Operators”, *Habilitationsschift zur Erlangung der Lehrbefugnis im Fach Matematik der Gesamthochschule*, Siegen.

14. Stein, E. M., 1993. “Harmonic Analysis: real-valued methods, orthogonality and Oscillatory Integrals”, *Princeton.*

15. Vinogradov, I. M., 1980. “Method trigonometric sums in number theory”, *Moscow, Nauka*, pp. 158.

16. Jong-Guk Bak, Sanghyuk Lee, 2004. “Restriction of the Fourier transform to a quadratic surface in $\mathbb{R}^n$”, *Mathematische Zeitschrift* № 247, pp.409–422.

17. Lebedev, V. V., 2013. “On the Fourier transform of the characteristic functions of domains with C^1 boundary”, *Func. anal. and its appl.* Vol. 47, no. 1. pp. 33–46.

18. Lebedev, V. V., 2013. “Superposition operators in some spaces of the harmonic analyzer the translator”, *Dissertation to take The dissertation on competition of a scientific degree of physical and mathematical sciences.* URL: https://www.dissercat.com/content/operatory-superpozitsii-v-nekotorykh-prostranstvakh-garmonicheskogo-analiza

Получено: 23.07.2023
Принято в печать: 21.03.2024