

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 517.518.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-42-51

О равномерных оценках осцилляторных интегралов с гладкой фазой

И. А. Икромов, А. Р. Сафаров

Икромов Исроил Акромович — Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан), Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).

e-mail: ikromov1@rambler.ru

Сафаров Акбар Рахманович — Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан), Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).

e-mail: safarov-akbar@mail.ru

Аннотация

Мы рассмотрим задачу о равномерных оценках осцилляторных интегралов с гладкой фазовой функцией, имеющей особенность типа D_∞ . Оценка является точной и является аналогом оценок результата В. Н. Карпушкина.

Ключевые слова: фаза, деформация, особенность.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

И. А. Икромов, А. Р. Сафаров. О равномерных оценках осцилляторных интегралов с гладкой фазой // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 42–51.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 517.518.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-42-51

Uniform estimates for oscillatory integrals with smooth phase

I. A. Ikromov, A. R. Safarov

Ikromov Isroil Akramovich — V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan), Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).

e-mail: ikromov1@rambler.ru

Safarov Akbar Rakhmanovich — V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan), Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).

e-mail: safarov-akbar@mail.ru

Abstract

We consider the problem on uniform estimates for an oscillatory integrals with the smooth phase functions having singularities D_∞ . The estimate is sharp and analogy to estimates of the work of V. N. Karpushkin.

Keywords: phase, deformation, singularity.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

I. A. Ikromov, A. R. Safarov, 2024, “Uniform estimates for oscillatory integrals with smooth phase”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 42–51.

1. Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Осцилляторным интегралом с гладкой вещественно-значной фазой f и амплитудой a называется интеграл вида:*

$$J(\lambda, f, a) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{i\lambda f(x)} dx$$

где $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть $U \subset V \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченные окрестности начала координат, $\overline{U}(\overline{V})$ замыкание $U(V)$. Допустим, что функция $f : \overline{V} \rightarrow \mathbb{R}$ (где $f \in C^N(\overline{V})$, $(N \geq 8)$) имеет следующий вид:

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + g(x_1, x_2), \quad (1)$$

где $g \in C^N(V)$, такая, что $D^\alpha g(0, 0) = 0$ для всех $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 3$, здесь D^α означает $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$, $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) \in Z_+^2$ — мультииндекс, $Z_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ неотрицательные целые числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $f \in C^N(\overline{V})$, где $N \geq 0$ некоторое неотрицательное целое число. Деформацией функции f называется $f + F$, где $F \in C^N(\overline{V})$ (см. [7]).

Пусть $\vartheta_{C^8(\overline{V})}(\varepsilon) := \{F \in C^8(\overline{V}), \|F\|_{C^8(\overline{V})} < \varepsilon\}$. Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in C^8(\overline{V})$ имеет вид (1). Тогда найдутся положительные числа ε, C и окрестность $U \subset V$ начала координат, такие, что для произвольных функций $a \in C_0^1(U)$ и $F \in \vartheta_{C^8(\overline{V})}(\varepsilon)$ справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_U e^{i\lambda(f+F)} a(x) dx \right| \leq \frac{C \|a\|_{C^1}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

1) Теорема является аналогом более общей теоремы В.Н.Карпушкина [7] (а также см. [2]) для достаточно гладких функций.

2) Если $g \equiv 0$, то оценка, полученная в теореме, неумлучшаема.

3) Для некоторых g функция f может иметь особенность типа D_k . В этом случае из результатов Дюстермаата [5] можно вывести более точную оценку.

4) Инвариантные оценки с полиномиальной фазой рассмотрены в работах [10]–[15].

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Сначала мы приведем несколько простых вспомогательных определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. [1] Рассмотрим арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированными координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Функция $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ называется квазиоднородной функцией степени d с показателями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, если при любом $\lambda > 0$ имеем $f(\lambda^{\alpha_1} x_1, \lambda^{\alpha_2} x_2, \dots, \lambda^{\alpha_n} x_n) = \lambda^d f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Показатели α_s называются весами переменных x_s .

Следующая лемма доказана в работе [6].

ЛЕММА 1. Пусть f — гладкая функция в окрестности начала координат, $\mathbb{R}^2$ с $c > 0$ и α_1, α_2 ($0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$) — фиксированные рациональные числа и $m \geq 1$ — натуральное число, причем $\alpha_1 m > c$. Тогда включение

$$M(f) \subset \{(t_1, t_2) : \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \geq c\}$$

справедливо тогда и только тогда, когда существует полином $f_\pi(x_1, x_2)$ удовлетворяющий условию

$$M(f_\pi) \subset \{(t_1, t_2) : \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \geq c\}$$

и гладкие функции $a_{jk}(x_1, x_2)$ такие, что справедливо равенство:

$$f(x_1, x_2) = f_\pi(x_1, x_2) + \sum_{j+k=m} x_1^j x_2^k a_{jk}(x_1, x_2),$$

здесь $f_\pi(x_1, x_2)$ — называется главной частью функции $f(x_1, x_2)$ относительно веса (α_1, α_2) и $M(\cdot)$ — называется носителем Тейлора разложения функции f в ряд в точке 0.

Пусть $C^\infty(V)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций, определенных в V , где V некоторая окрестность начала координат $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что это множество образует коммутативное кольцо относительно обычного умножения и сложения функций. Пусть $f \in C^\infty(V)$ данная функция с критической точкой в нуле, т.е. $\nabla f(0) = 0$. Рассмотрим подмножество

$$I_{\nabla f} := \{h \in C^\infty(V) : h(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} h_k(x), h_k \in C^\infty(V)\}.$$

Это множество является подкольцом $C^\infty(V)$. Причем очевидно, что для любого $g \in C^\infty(V)$ выполняется соотношение $gI_{\nabla f} \subset I_{\nabla f}$. Иными словами, $I_{\nabla f}$ является идеалом ("идеальным" подкольцом) кольца $C^\infty(V)$. Этот идеал называется идеалом порожденный частными производными $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}$, или градиентным идеалом кольца $C^\infty(V)$ и обозначается через $I_{\nabla f} = \langle \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \rangle$.

Пусть функция $f(x_1, x_2)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \frac{\partial^{|\alpha|} f(0, 0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} = 0, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2.$$

2) допустим, множество корней уравнения $f_3(x_1, x_2) = 0$ на S_1 (где f_3 отрезок Тейлора функции f порядка 3 и S_1 единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат) состоит из одного простого и двукратного корня.

Тогда функция f , линейным преобразованием, приводится к виду $f(x(u)) = u_1 u_2^2 + g_1(u_1, u_2)$, где $g_1(u_1, u_2)$ — некоторая функция удовлетворяющая условию $D^\alpha g_1(0, 0) = 0$,

при всех $|\alpha| \leq 3$, аналогичное утверждение доказано для однородных многочленов третьей степени в работе [1] (стр.147). Главная часть относительно веса $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ функции f обозначается через f_π . Таким образом, без ограничения общности, мы можем считать, что $f_\pi(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$.

Следуя [7] обозначим через E_d линейное пространство полиномов степени меньше d относительно веса $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ и $I_{\nabla f_\pi}$ градиентный идеал функции f_π .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Координатное подпространство $B \subset E_1$ называется *нижним версальным*, если $(I_{\nabla f_\pi} \cap E_1) \oplus B = E_1$ (т.е. $I_{\nabla f_\pi} \cap E_1 \cap B = 0$, $(I_{\nabla f_\pi} \cap E_1) + B = E_1$).

Легко показать, что $B = \langle 1, x_1, x_2, x_1^2 \rangle$ является версальным подпространством B для функции $f_\pi(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$.

Пусть $\sum_{\frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{3} < d} s_m x^m$ отрезок ряда Тейлора в точке 0 функции F . Положим $\pi_d(F) = \sum s_m x^m$, где $0 \leq \frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{3} < d$. Таким образом, π_1 определяет отображение пространства $C^N(V)$ на пространство E_d , где $d \leq \frac{N}{3}$.

Следующее предложение о возможности гладко выбрать замену координат является аналогом теоремы версальности. Аналогом деформации функции f является $f + F$, где $F \in \mathcal{V}_{C^8}(\bar{V})(\varepsilon)$ (деформация с бесконечным числом параметров). Аналогом версальной деформации f является $f + F$, где $F \in \mathcal{V}_{C^8}(\bar{V})(\varepsilon)$, $\pi_1 F \in B$. Здесь B — нижнее версальное подпространство [1].

ЛЕММА 2. Пусть $z \in C^8(\bar{V})$ некоторая вектор-функция. Функция $(f + F)(y + z(y))$ записывается в виде

$$(f + F)(y + z(y)) = f(0) + F(0) + \alpha_{10}(z)y_1 + \alpha_{01}(z)y_2 + \\ + \alpha_{20}(z)y_1^2 + \alpha_{11}(z)y_1 y_2 + \alpha_{02}(z)y_2^2 + \sum_{i_1+i_2=3} \alpha_{i_1 i_2}(z)y_1^{i_1} y_2^{i_2} + y_1 y_2^2,$$

где $\alpha_{10}, \alpha_{01}, \alpha_{20}$ — функционалы от F и $\alpha_{i_1 i_2} : C^3(U) \rightarrow C^3(V)$ операторы причем $2 \leq i_1 + i_2 = 3$, выполняется $\|\alpha_{i_1 i_2}\|_{C^2} \leq C\varepsilon$, при условии $F \in \mathcal{V}_{C^8}(\bar{V})(\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию $f + F$ в следующем виде:

$$f + F = s_{10}x_1 + s_{01}x_2 + s_{20}x_1^2 + 2s_{11}x_1x_2 + s_{02}x_2^2 + s_{30}(x_1, x_2)x_1^3 + \\ + s_{21}(x_1, x_2)x_1^2x_2 + (1 + s_{12}(x_1, x_2))x_1x_2^2 + s_{03}(x_1, x_2)x_2^3,$$

$$\text{где } s_{10} = \frac{\partial F(0,0)}{\partial x_1}, s_{01} = \frac{\partial F(0,0)}{\partial x_2}, s_{20} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial x_1^2}, s_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ s_{02} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial x_2^2}, s_{k_1 k_2}(x_1, x_2) := s_{k_1 k_2} = \frac{3!}{k_1! k_2!} \int_0^1 (1-u)^2 \frac{\partial^3 (F+g)(ux_1, ux_2)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} du, k_1 + k_2 = 3.$$

Сделаем замену $x_1 - z_1(y_1, y_2) = y_1, x_2 - z_2(y_1, y_2) = y_2$ и используем следующие разложения

$$z_1(y) = z_1^0 + a_{10}y_1 + a_{01}y_2 + a_{20}y_1^2 + a_{11}y_1 y_2 + a_{02}y_2^2 + r_1(y)$$

и

$$z_2(y) = z_2^0 + b_{10}y_1 + b_{01}y_2 + b_{20}y_1^2 + b_{11}y_1 y_2 + b_{02}y_2^2 + r_2(y),$$

$$\text{где } z_1^0 = z_1(0,0), a_{10} = \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial y_1}, a_{01} = \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial y_2}, a_{20} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1(0,0)}{\partial y_1^2}, a_{02} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1(0,0)}{\partial y_2^2}, a_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1(0,0)}{\partial y_1 \partial y_2}, \\ z_2^0 = z_2(0,0), b_{10} = \frac{\partial z_2(0,0)}{\partial y_1}, b_{01} = \frac{\partial z_2(0,0)}{\partial y_2}, b_{20} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_2(0,0)}{\partial y_1^2}, b_{02} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_2(0,0)}{\partial y_2^2}, b_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_2(0,0)}{\partial y_1 \partial y_2}, \\ r_i(y) := \frac{3!}{k_1! k_2!} \int_0^1 (1-u)^2 \frac{\partial^3 z_i(uy_1, uy_2)}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2}} du, k_1 + k_2 = 3, i = 1, 2.$$

Разложим функцию $(F + g)(y + z(y))$ по формуле Тейлора в точке $(y_1, y_2) = (0, 0)$

Тогда получим

$$(F + g)(y + z(y)) = \alpha_{00}(z) + \alpha_{10}(z)y_1 + \alpha_{01}(z)y_2 + \\ + \alpha_{20}(z)y_1^2 + \alpha_{11}(z)y_1y_2 + \alpha_{02}(z)y_2^2 + \sum_{i_1+i_2=3} \alpha_{i_1i_2}(z)y_1^{i_1}y_2^{i_2} + y_1y_2^2,$$

где $\alpha_{00}(z) = f(0) + F(0)$, $\alpha_{10}(z)$, $\alpha_{01}(z)$, $\alpha_{20}(z)$ некоторые функционалы от z и $\alpha_{02}(z)$, $\alpha_{11}(z) : C^3(U) \rightarrow C^3(V)$ операторы имеющие вид:

$$\alpha_{02}(z) = z_1 + \tilde{\Phi}_1(z, F), \quad \alpha_{11}(z) = 2z_2 + \tilde{\Phi}_2(z, F),$$

здесь $\tilde{\Phi}_j : C^3(U) \rightarrow C^3(V)$ некоторые гладкие операторы, удовлетворяющие условиям $\tilde{\Phi}_j(z, 0) \equiv 0$, $(j = 1, 2)$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\|F\|_{C^4(\bar{V})} < \varepsilon$ найдется такое отображение $(z_1, z_2) := (z_1(F), z_2(F)) \in C^4(U \rightarrow \mathbb{R}^2)$, определенное в некоторой окрестности U , для которого справедливо следующее равенство*

$$\pi_1(f(y_1 + z_1, y_2 + z_2) + F(y_1 + z_1, y_2 + z_2)) = \tilde{c}_0(F) + \tilde{c}_1(F)y_1 + \tilde{c}_2(F)y_2 + \tilde{c}_3(F)y_1^2,$$

где $\pi_1(\cdot)$ — проектирование пространства $C^4(V)$ на пространство E_1 .

Теперь рассмотрим следующие функциональные уравнения относительно (z_1, z_2) :

$$\Phi_1(y, F, z) := \alpha_{11}(z) = 0, \quad \Phi_2(y, F, z) := \alpha_{02}(z) = 0. \quad (2)$$

Приведем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 3. *Для непрерывных операторов $\Phi_1(y, F, z)$, $\Phi_2(y, F, z)$ в пространстве $U_1 \times C^4(V_1) \times U_2$ существует частная производная по z и они дифференцируемы по Фреше в точке θ , где $U_1 \subset \mathbb{R}^2$, $U_2 \subset \mathbb{R}^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ради определенности, покажем существование частных производных по z и дифференцируемость оператора $\Phi_1(y, F, z)$, для функции $\Phi_2(y, F, z)$ доказательство совершенно аналогично.

Так как функция $F \in C^8(\bar{V})$ то отсюда вытекает дифференцируемость оператора $\Phi_1(y, F, z)$.

Существование производных отображения $\Phi_2(y, F, z)$ рассматривается аналогично. $\square$

ЛЕММА 4. *Операторы $\Phi_1(y, F, z)$, $\Phi_2(y, F, z)$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$1) \Phi_1(y, 0, 0) \equiv 0, \quad \Phi_2(y, 0, 0) \equiv 0. \quad 2) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из явного вида операторов Φ_1, Φ_2 вытекает выполнения соотношения $1) \Phi_1(y, 0, 0) \equiv 0, \quad \Phi_2(y, 0, 0) \equiv 0$. Очевидно, что $\left| \frac{\partial \Phi_1(0)}{\partial z_1} \frac{\partial \Phi_2(0)}{\partial z_2} - \frac{\partial \Phi_1(0)}{\partial z_2} \frac{\partial \Phi_2(0)}{\partial z_1} \right| = 2 \neq 0$ и следовательно выполнено второе утверждение. Лемма 4 доказана.

Перейдем к доказательству Предложения 1. Так как операторы $\Phi_1(y, F, z)$ и $\Phi_2(y, F, z)$, согласно лемм 2 и 3, удовлетворяют условиям теоремы о неявных отображениях, то, согласно этой теореме, найдется решение $z_1 = z_1(y_1, y_2, F(y))$, $z_2 = z_2(y_1, y_2, F(y))$ уравнения (2) и они являются гладкими функциями, в зависимости от гладкости отображения F . $\square$ **ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Отметим, что если $F \in C^{3+k}$ и $f \in C^{3+k}$ то $z(y) \in C^k$.

3. О разбиении единицы

Осцилляторный интеграл оценивается с помощью разбиения единицы.

Пусть $k = \left(\frac{k_1}{3}, \frac{k_2}{3}\right)$ и $\tau > 0$ фиксированное число. Рассмотрим отображение $\delta_\tau^k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ определенное формулой:

$$\delta_\tau(x) = (\tau x_1, \tau x_2).$$

Введем функцию $\beta(x)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$,
- 2) $0 \leq \beta(x) \leq 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$,
- 3) $\beta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |\delta_{2^{-1}}(x)| \geq 1 \end{cases}$

Существование такой функции доказано в [3] (а также [8]).

Пусть

$$\chi(x) = \beta(x) - \beta(\delta_2(x)).$$

Основные свойства функции $\chi(x)$ содержатся в следующей лемме.

ЛЕММА 5. *Функция $\chi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Для произвольного фиксированного x справедливо равенство*

$$\beta(\delta_{2^{-\nu_0}}(x)) + \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \chi(\delta_{2^{-\nu}}(x)) = 1.$$

2. *Для произвольного $x \neq 0$ существует $\nu_0 = \nu_0(x)$ такое, что при любом $\nu \notin [\nu_0, \nu_0 + 4]$*

$$\chi(\delta_{2^\nu}(x)) = 0.$$

3. *Для произвольного ν_0 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\chi(\delta_{2^\nu}(x)) = 0$ при любом $\nu < \nu_0$ и $|x| \geq \varepsilon$.*

Лемма 5 доказана в работе [8].

ЛЕММА 6. *Функция $\chi(x)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) Для произвольного фиксированного $x \neq 0$ справедливо равенство*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \chi(\delta_{2^\nu}(x)) = 1.$$

- 2) *Существует $N = N(\tau)$ такое, что для произвольного $x \neq 0$ существует $\nu_0 = \nu_0(x)$ такое, что при любом $\nu \in [\nu_0, \nu_0 + N]$*

$$\chi(\delta_{2^\nu}(x)) = 0.$$

- 3) *Для произвольного ν_0 существует ε такое, что*

$$\chi(\delta_{2^\nu}(x)) = 0$$

при любом $\nu < \nu_0$ и $|x| \geq \varepsilon$.

4. Доказательство основного результата

Так как функция имеет вид $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + g(x_1, x_2)$, то применяя предложение 1 для $f + F$ и получим

$$f + F = s_{10}y_1 + s_{01}y_2 + s_{20}y_1^2 + y_1y_2^2 + s_{30}y_1^3 + s_{21}y_1^2y_2 + s_{12}y_1y_2^2 + s_{03}y_2^3 + R_4(y_1, y_2), \quad (3)$$

где $R_4(y_1, y_2)$ остаточный член. Теперь оценим интеграл J . Сначала введем «квазирасстояние» $\rho = |s_{10}|^{\frac{3}{2}} + |s_{01}|^{\frac{3}{2}} + |s_{20}|^3$ и в интеграле (1) с фазовой функцией (3) сделаем замену переменных $y_1 = \rho^{\frac{1}{3}}\tau_1$, $y_2 = \rho^{\frac{1}{3}}\tau_2$. Тогда получим:

$$J(\lambda) = \rho^{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1, \rho^{\frac{1}{3}}\tau_2\right) e^{i\lambda\rho\Phi} d\tau,$$

где $\Phi = \frac{s_{10}}{\rho^{\frac{2}{3}}}\tau_1 + \frac{s_{01}}{\rho^{\frac{2}{3}}}\tau_2 + \frac{s_{20}}{\rho^{\frac{2}{3}}}\tau_1^2 + \tau_1\tau_2^2 + s_{30}\tau_1^3 + s_{21}\tau_1^2\tau_2 + s_{12}\tau_1\tau_2^2 + s_{03}\tau_2^3 + \frac{1}{\rho}R_4\left(\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1, \rho^{\frac{1}{3}}\tau_2\right)$. Применим лемму 5, т.е. разбиение единицы, для интеграла $J(\lambda)$ и получим разложение в следующем виде:

$$J(\lambda) = J_0(\lambda) + \sum_{k=k_0}^{\infty} J_k(\lambda),$$

где

$$J_k(\lambda) = \rho^{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1, \rho^{\frac{1}{3}}\tau_2\right) \chi\left(2^{-\frac{k}{3}}\tau_1, 2^{-\frac{k}{3}}\tau_2\right) e^{i\lambda\rho\Phi} d\tau,$$

$$J_0(\lambda) = \rho^{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1, \rho^{\frac{1}{3}}\tau_2\right) \beta_0(\delta_{2^{-k_0}}(x)) e^{i\lambda\rho\Phi} d\tau.$$

Сначала оценим интеграл $J_k(\lambda)$. В этом интеграле $J_k(\lambda)$ сделаем замену переменных $2^{-\frac{k}{3}}\tau_1 = t_1$, $2^{-\frac{k}{3}}\tau_2 = t_2$ и получим

$$J_k(\lambda) = 2^{\frac{2k}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}^2} a\left(2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_1, 2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_2\right) \chi(t_1, t_2) e^{i\lambda 2^k \rho \Phi_k(t, s, \rho)} dt,$$

где фазовая функция имеет вид

$$\Phi_k(t, s, \rho) = 2^{-\frac{2k}{3}}\sigma_{10}t_1 + 2^{-\frac{2k}{3}}\sigma_{01}t_2 + 2^{-\frac{k}{3}}\sigma_{20}t_1^2 + t_1t_2^2 + s_{30}t_1^3 + s_{21}t_1^2t_2 + s_{12}t_1t_2^2 + s_{03}t_2^3 + 2^{-k}\frac{1}{\rho}R_4\left(2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_1, 2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_2\right),$$

здесь $\sigma_{10} = \frac{s_{10}}{\rho^{\frac{2}{3}}}$, $\sigma_{01} = \frac{s_{01}}{\rho^{\frac{2}{3}}}$, $\sigma_{20} = \frac{s_{20}}{\rho^{\frac{2}{3}}}$, $R_4\left(2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_1, 2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_2\right) = \frac{2^{\frac{4k}{3}}\rho^{\frac{4}{3}}}{6}(s_{40}t_1^4 + s_{31}t_1^3t_2 + s_{22}t_1^2t_2^2 + s_{13}t_1t_2^3 + s_{04}t_2^4)$,

где $s_{40}(t, s, \rho) = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)^3 \frac{\partial^4 \Phi_k(ut, s, \rho)}{\partial t_1^4} du$, $s_{31}(t, s, \rho) = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)^3 \frac{\partial^4 \Phi_k(ut, s, \rho)}{\partial t_1^3 \partial t_2} du$, $s_{22}(t, s, \rho) = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)^3 \frac{\partial^4 \Phi_k(ut, s, \rho)}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} du$, $s_{13}(t, s, \rho) = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)^3 \frac{\partial^4 \Phi_k(ut, s, \rho)}{\partial t_1 \partial t_2^3} du$, $s_{04}(t, s, \rho) = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)^3 \frac{\partial^4 \Phi_k(ut, s, \rho)}{\partial t_2^4} du$.

Мы можем считать (в зависимости от носителя амплитуды χ_0 , по лемме 5), что число k_0 достаточно большое.

Сначала рассмотрим случай, когда нет осцилляции. Пусть $|2^k \lambda \rho| \leq L$, где L большое фиксированное число. Тогда из тривиальной оценки интеграла получим:

$$|J_k| \leq \frac{2^{\frac{2k}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} A}{|2^k \lambda \rho|^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{k}{6}} \rho^{\frac{1}{6}} A}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}. \quad (4)$$

Пусть теперь $|2^k \lambda \rho| > L$ и $k > k_0$ достаточно большое число. Тогда, по условию, Φ_k может быть рассмотрена как малая деформация функции $\tau_1 \tau_2^2$, причем $(\tau_1, \tau_2) \in D := \text{supp}(\chi) = \{\frac{1}{2} \leq |\tau| \leq 2\}$. Очевидно, что если $\tau^0 \in D$ фиксированная точка и $\tau_2^0 \neq 0$, то эта точка не является критической. Если χ^0 срезающая функция (т.е. функция носитель которой находится в достаточно малой окрестности этой точки), то интеграл

$$J_k^{\chi^0}(\lambda) := 2^{\frac{2k}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} \int_{R^2} a\left(2^{\frac{k}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} t_1, 2^{\frac{k}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} t_2\right) \chi(t_1, t_2) e^{i\lambda 2^k \rho \Phi_k(t, s, \rho)} \chi^0(t) dt,$$

тривиально оценивается интегрированием по частям и имеет место неравенство (4).

Если $\tau_2^0 = 0$, то $\tau_1^0 \neq 0$. В этом случае, используя лемму Ван дер Корпута [4] (более общее утверждение содержится в [9]), снова имеем оценку вида (4).

Так как на носителе амплитуды $2^{\frac{k}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} < 1$, то

$$\frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \sum_{|2^k \lambda \rho| \leq 1} |J_k| \leq \frac{c}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \sum_{2^k \rho \leq 1} 2^{\frac{k}{6}} \rho^{\frac{1}{6}} \leq \frac{c}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

Теперь рассмотрим оценку интеграла $J_0(\lambda)$. Рассмотрим следующие случаи для параметров σ .

Введем квазисферу $\rho(\sigma) := \{|\sigma_{10}|^{\frac{2}{3}} + |\sigma_{01}|^{\frac{2}{3}} + |\sigma_{20}|^{\frac{1}{3}} = 1\}$ и рассмотрим фазовую функцию

$$\begin{aligned} \Phi_0(\tau, \sigma, \rho) &= \sigma_{10} \tau_1 + \sigma_{01} \tau_2 + \sigma_{20} \tau_1^2 + \tau_1 \tau_2^2 + s_{30} \tau_1^3 + s_{21} \tau_1^2 \tau_2 + s_{12} \tau_1 \tau_2^2 \\ &+ s_{03} \tau_2^3 + \frac{1}{\rho} \frac{\rho^{\frac{4}{3}}}{6} (s_{40} \tau_1^4 + s_{31} \tau_1^3 \tau_2 + s_{22} \tau_1^2 \tau_2^2 + s_{13} \tau_1 \tau_2^3 + s_{04} \tau_2^4). \end{aligned}$$

Отметим, что на квазисфере $c_1 \leq |\sigma| \leq c_2$, где c_1, c_2 — фиксированные положительные числа. Таким образом пространство параметров и $\text{supp}(\beta(\delta_{2^{-k_0}}(\cdot)))$ компактные множества. Пусть, $\sigma = \sigma^0$, $|\sigma^0| = c$ фиксированный вектор и $\tau = \tau^0$ фиксированная точка. Тогда $\Phi_0(\tau, \sigma, \rho)$ — достаточно малая гладкая деформация следующей функции

$$\Phi = \sigma_{10}^0 \tau_1 + \sigma_{01}^0 \tau_2 + \sigma_{20}^0 \tau_1^2 + \tau_1 \tau_2^2.$$

Если $\frac{\partial \Phi(\tau_1^0, \tau_2^0)}{\partial \tau_1} \neq 0$ или $\frac{\partial \Phi(\tau_1^0, \tau_2^0)}{\partial \tau_2} \neq 0$, то при $|\sigma - \sigma_0| < \varepsilon$ $|s_{30}| + |s_{21}| + |s_{12}| + |s_{03}| < \varepsilon$ справедлива следующая оценка: $|\nabla \Phi_0(\tau, \sigma, s)| > \delta > 0$

для некоторого положительного числа δ .

Применяя формулу интегрирования по частям для интеграла J_0^χ , получим:

$$|J_0^\chi| \leq \frac{c \|a\|_{C^1}}{|\lambda|^{\frac{2}{3}}}, \quad (5)$$

где

$$J_0^\chi(\lambda) = \int_{R^2} \chi(\tau) a(\tau_1, \tau_2) \chi_0(\tau_1, \tau_2) e^{i\lambda \rho \Phi_0(\tau, \sigma, s)} d\tau \quad (6)$$

и χ — гладкая функция сосредоточенная в достаточно малой окрестности точки τ^0 . Достаточно рассмотреть случай когда τ^0 — критическая точка.

Так как τ^0 — критическая точка, то справедливо следующее равенство:

$$\sigma_{10}^0 + 2\sigma_{20}^0 \tau_1^0 + 2(\tau_2^0)^2 = 0, \sigma_{01}^0 + 2\tau_1^0 \tau_2^0 = 0.$$

Для функции Φ в точке (τ_1^0, τ_2^0) матрица Гессе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_{20}^0 & 2\tau_2^0 \\ 2\tau_2^0 & 2\tau_1^0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что это ненулевая матрица, так как если $\sigma_{20}^0 = 0$, то либо $\sigma_{10}^0 \neq 0$, либо $\sigma_{01}^0 \neq 0$, следовательно $\tau_1^0 \neq 0$ или $\tau_2^0 \neq 0$.

Таким образом, ранг матрицы Гессе $\begin{pmatrix} 2\sigma_{20}^0 & 2\tau_2^0 \\ 2\tau_2^0 & 2\tau_1^0 \end{pmatrix}$ не меньше единицы. Если ранг матрицы равен единице, то, применяя лемму Морса по параметрам, для интеграла J_0 получим следующую оценку

$$|J_0| \leq \frac{c \|a\|_{C^1} \rho^{\frac{1}{6}}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

Наконец, суммируя полученные оценки приходим к доказательству теоремы 1. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и вольновых фронтов // М.:Наука. 1982.
2. Варченко А.Н. Многогранник Ньютона и оценки осциллирующих интегралов // Функц. анализ и его прил., Т.10, вып 5. 1976. С. 13-38.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики // М.:Наука. 1981.
4. Van der Korput. K.G. Zur Methode der stationaren phase// Compositio Math. V.1. 1934. P. 15-38.
5. Duistermaat J. Oscillatory integrals Lagrange immersions and unfoldings of singularities // Comm. Pure.Appl.Math. - 1974. - V.27, № 2. - P.207-281.
6. Ikromov I.A., Muller D. On adapted coordinate systems // Trans. Amer. Math. Soc., 363(2011), no. 6, P. 2821-2848.
7. В.Н.Карпушкин. Равномерные оценки осциллирующих интегралов с параболической или гиперболической фазой // Труды Семинара имени И.Г.Петровского. вып.9. 1983. С. 3-39.
8. Sogge C.D., Fourier integrals in Classical Analysis // Cambridge university press, Cambridge, 1993. P.105.
9. Carbery A., Christ M., and Wright J. Multidimensional Van der Korput lemma and sublevel set estimates // Journal of AMS, V.12. 1999. P.981-1015.
10. Ruzhansky M., Safarov A. R., Khasanov G. A. Uniform estimates for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phases of degree 4 // Analysis and Mathematical Physics, **12(130)**, (2022).
11. Сафаров А. Инвариантные оценки двумерных осцилляторных интегралов // Математические заметки. Т.104, вып 2. 2018. С. 289-300.
12. Safarov A. On the L^p -bound for trigonometric integrals // Analysis mathematica **45**, 2019,153-176 p.
13. Safarov A. On invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phase // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. **9** (2016), P.102–107.

14. Safarov A. On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface // Russian Mathematics, 63 (4), 2019, P.57-63.
15. Safarov A. R. Estimates for Mittag–Leffler Functions with Smooth Phase Depending on Two Variables // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **15(4)** (2022), P.459–466.

REFERENCES

1. Arnold, V.I. & Gusein-Zade, S.M.& Varchenko, A.N. 1985. “Singularities of Differentiable Maps”, *Birkhauser, Boston Basel, Stuttgart*.
2. Varchenko, A.N. 1976. “Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals”, *Functional Analysis and Its Applications* vol. 10, pp. 175–196.
3. Vladimirov, V.S. 1981. “Mathematic physics equation”, *M.:Nauka*. (Russian).
4. Van der Korput, 1934. “K.G. Zur Methode der stationaren phase”, *Compositio Math.* V.1., pp. 15–38.
5. Duistermaat, J., 1974. “Oscillatory integrals Lagrange immersions and unfoldings of singularities”, *Comm. Pure.Appl.Math.*, Vol. 27, № 2, pp. 207–281.
6. Ikromov, I.A. & Muller, D. 2011. “On adapted coordinate systems”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol.363, no. 6, pp. 2821-2848.
7. Karpushkin, V.N. 1983, “Uniform estimates for oscillatory integrals with parabolic or hyperbolic phase”, *Proceedings of the I.G.Petrovsky Seminar*. Vol.9. pp. 3-39.(Russian)
8. Sogge, C.D. 1993. “Fourier integrals in Classical Analysis”, *Cambridge, Cambridge university press*, P. 105.
9. Carbery, A., Christ, M., and Wright, J., 1999. “ Multidimensional Van der Korput lemma and sublevel set estimates”, *Journal of AMS*, V.12. pp. 981–1015.
10. Ruzhansky, M., Safarov, A. R., Khasanov, G. A., 2022. “Uniform estimates for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phases of degree 4”, *Analysis and Mathematical Physics*, **12(130)**.
11. Safarov, A., 2018. “Invariant estimates for double oscillatory integrals”, *Mathematical Notes*, 104:2, pp. 293–302.
12. Safarov, A., 2019. On the L^p -bound for trigonometric integrals. *Analysis mathematica*, **45**, pp. 153–176.
13. Safarov, A., 2016. “On invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phase”, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* **9** (2016), pp. 102–107.
14. Safarov, A., 2019. “On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface”, *Russian Mathematics*, 63 (4), pp. 57–63.
15. Safarov, A. R., 2022. “Estimates for Mittag–Leffler Functions with Smooth Phase Depending on Two Variables, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **15(4)**, pp. 459–466.

Получено: 26.07.2023

Принято в печать: 21.03.2024