

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-26-41

**Нелинейный метод угловых пограничных функций для
сингулярно возмущенных параболических задач с кубическими
нелинейностями**

А. И. Денисов, И. В. Денисов

Денисов Алексей Игоревич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Денисов Игорь Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Аннотация

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Исследования проводятся в предположении, что в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1 , функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ является кубической и имеет вид

$$F(u) = (u - \alpha(k))(u - \beta(k))(u - \bar{u}_0(k)), \quad \text{где } \alpha(k) \leq \beta(k) < \bar{u}_0(k).$$

Используется нелинейный метод угловых пограничных функций, который сочетает в себе (линейный) метод угловых пограничных функций, метод верхних и нижних решений (барьеров) и метод дифференциальных неравенств. При условии $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$ строится полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ и обосновывается его равномерность в замкнутом прямоугольнике.

Ранее были рассмотрены следующие случаи кубических нелинейностей:

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k) > 0,$$

в предположении, что граничное значение $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$, а также случай

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k) < 0,$$

в предположении, что граничное значение $\varphi(k)$ заключено в промежутке

$$\bar{u}_0 < \varphi(k) < \frac{\bar{u}_0}{2} < 0.$$

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. И. Денисов, И. В. Денисов. Нелинейный метод угловых пограничных функций для сингулярно возмущенных параболических задач с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 26–41.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-26-41

Nonlinear method of angular boundary functions for singularly perturbed parabolic problems with cubic nonlinearities

A. I. Denisov, I. V. Denisov

Denisov Alexey Igorevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Denisov Igor Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Abstract

In the rectangle $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ we consider an initial-boundary value problem for a singularly perturbed parabolic equation

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Research is carried out under the assumption that at the corner points $(k, 0)$ of the rectangle Ω , where $k = 0$ or 1 , the function $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ is cubic and has the form

$$F(u) = (u - \alpha(k))(u - \beta(k))(u - \bar{u}_0(k)), \quad \text{где} \quad \alpha(k) \leq \beta(k) < \bar{u}_0(k).$$

The nonlinear method of angular boundary functions is used, which combines the (linear) method of angular boundary functions, the method of upper and lower solutions (barriers), and the method of differential inequalities. Under the condition $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$, a complete asymptotic expansion of the solution for $\varepsilon \rightarrow 0$ is constructed and its uniformity in a closed rectangle is substantiated.

Previously, the following cases of cubic nonlinearities were considered:

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{where} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k) > 0,$$

under the assumption that the boundary value $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$, as well as the case

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{where} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k) < 0,$$

under the assumption that the boundary value $\varphi(k)$ is contained in the interval

$$\bar{u}_0 < \varphi(k) < \frac{\bar{u}_0}{2} < 0.$$

Keywords: boundary layer, asymptotic approximation, singularly perturbed equation.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. I. Denisov, I. V. Denisov, 2024, “Nonlinear method of angular boundary functions for singularly perturbed parabolic problems with cubic nonlinearities”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 26–41.

1. Введение

Нелинейный метод угловых пограничных функций сочетает в себе (линейный) метод угловых пограничных функций, метод верхних и нижних решений (барьеров) и метод дифференциальных неравенств.

Метод угловых пограничных функций работает, когда в угловых точках границы функция F является линейной по переменной u или ставятся краевые условия второго рода (задача Неймана), что позволяет описать угловой пограничный слой с помощью только линейных задач (см. [1]). Если функция F в угловых точках границы является нелинейной по переменной u и ставятся краевые условия первого рода (задача Дирихле), то метод угловых пограничных функций перестает работать. Поэтому этот метод естественно назвать линейным.

В случае первой краевой задачи с функцией F нелинейной по переменной u в угловых точках границы для доказательства существования подходящих решений нелинейных краевых задач приходится применять метод верхних и нижних решений (барьеров) (см. [2] – [4]). При этом основная трудность заключается в конструировании соответствующих барьеров. В некоторых случаях удастся построить гладкие барьеры, пригодные во всей рассматриваемой области. Если же гладкие барьеры не удастся построить сразу во всей рассматриваемой области, то приходится строить кусочно–гладкие барьеры, а затем их сглаживать.

Для обоснования построенной асимптотики решения удобно применять метод дифференциальных неравенств (см. [5]).

С помощью нелинейного метода угловых пограничных функций была решена первая краевая задача для различных нелинейных сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений (см. [6] – [15]). Полностью были исследованы задачи с квадратичными нелинейностями в угловых точках границы. Для таких задач пришлось учитывать всего два специфических поведения параболы: ветви вверх или вниз.

Для задач с кубическими нелинейностями специфических случаев существенно больше, чем в случае квадратичных нелинейностей. Кроме возможной смены монотонности приходится учитывать и смену направления выпуклости. К настоящему моменту рассмотрены следующие случаи кубических нелинейностей. В работе [12] в угловых точках границы функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имела вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k) > 0,$$

и предполагалось, что граничное значение $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$.

В работе [13] в угловых точках границы функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имела вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k) < 0,$$

и предполагалось, что граничное значение $\varphi(k)$ заключено в промежутке

$$\bar{u}_0 < \varphi(k) < \frac{1 + \sqrt{274}}{21} \bar{u}_0 \approx 0,88 \dots \bar{u}_0 < 0.$$

В работе [15], в дополнение к работе [13], для главного члена угловой части асимптотики решения удалось построить барьерные функции другого типа, что позволило существенно усилить результат работы [13], допустив величину граничного значения до середины промежутка

$[u_0, 0]$, где 0 – точка перегиба:

$$\bar{u}_0 < \varphi(k) \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0.$$

В предлагаемой работе исследования проводятся в предположении, что в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1 , функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = (u - \alpha(k))(u - \beta(k))(u - \bar{u}_0(k)), \quad \text{где} \quad \alpha(k) \leq \beta(k) < \bar{u}_0(k),$$

и граничное значение $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$. Для построения асимптотики решения используется нелинейный метод угловых пограничных функций.

2. Постановка задачи

Обозначим через Ω прямоугольник $\{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где ε – малый положительный параметр. Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. *Функции $F(u, x, t, \varepsilon)$, $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений*

$$\varphi(0) = \psi_1(0), \quad \varphi(1) = \psi_2(0).$$

Условие 2. *Вырожденное уравнение $F(u, x, t, 0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$ имеет решение, которое обозначается как $u = \bar{u}_0(x, t)$.*

Заметим, что в силу нелинейности это уравнение может иметь и другие решения.

Условие 3. *Производная $F'_u(\bar{u}_0(x, t), x, t, 0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.*

Условие 4. *Начальная задача*

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0),$$

имеет решение $\Pi_0(x, \tau)$ при $\tau \geq 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x, \infty) = 0$ (здесь параметр $x \in [0, 1]$).

Условие 5. *Для систем*

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2 \frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k, t) + z_1, k, t, 0), \quad (4)$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k, t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1, z_2) = (0, 0)$ при $y \rightarrow \infty$ (здесь t – параметр, $k = 0$ или 1).

В силу условий 1–3 точка $(z_1, z_2) = (0, 0)$ является точкой покоя типа седла систем (4).

При сделанных предположениях нельзя гарантировать существование решения задачи (1)–(3). Кроме этого, даже если решение задачи существует, его явное представление, как правило, получить не удастся. Поэтому для доказательства существования решения задачи (1)–(3) требуются дополнительные условия, которые будут сформулированы ниже.

3. Алгоритм решения задачи

Сначала применяется (линейный) метод угловых пограничных функций, согласно которому решение задачи (1)–(3) ищется в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$, состоящего из шести частей:

$$u(x, t, \varepsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \quad (5)$$

Здесь $\bar{u}$ – регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω , Π , Q и Q^* – погранслойные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, P и P^* – угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

Формальная процедура построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций хорошо отработана (см. [1]) и мы приведем ее схематично. В уравнении (1) функция F заменяется выражением, аналогичным (5):

$$F(u, x, t, \varepsilon) = \bar{F} + (\Pi F + QF + Q^*F) + (PF + P^*F). \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) подставляются в уравнение (1), которое разделяется на части: регулярную, погранслойные и угловые. Регулярная часть асимптотики строится в виде ряда по степеням ε :

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(x, t).$$

Погранслойная часть асимптотики вводится для устранения невязок регулярной части с начальными и граничными условиями. Погранслойные функции Π , Q и Q^* ищутся в виде рядов

$$\Pi(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k(x, \tau), \quad Q(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k(\xi, t), \quad Q^*(\xi_*, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k^*(\xi_*, t),$$

где

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \xi_* = \frac{1-x}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$$

– растянутые переменные.

Задача для $\Pi_0 = \Pi_0(x, \tau)$ имеет вид

$$-\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = F(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0).$$

Здесь x играет роль параметра. В силу условия 4 эта задача имеет решение, для которого в силу условия 3 справедлива экспоненциальная оценка убывания вида

$$|\Pi_0(x, \tau)| \leq C \exp(-\kappa \tau), \quad (7)$$

где C и κ – некоторые положительные постоянные. Задачи для определения функций $\Pi_k = \Pi_k(x, \tau)$, $k \geq 1$, получаются линейными:

$$-\frac{\partial \Pi_k}{\partial \tau} = F'_u(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0) \Pi_k + \pi_k, \quad \Pi_k(x, 0) = -\bar{u}_k(x, 0).$$

Функции π_k представляют собой линейные комбинации функций Π_j , $j < k$, и их производных с коэффициентами, являющимися многочленами от τ . Поэтому, если для функций Π_j , $j < k$, справедливы оценки вида (7), то для функций π_k справедливы оценки того же вида.

Если величина $\varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0)$ не равна тождественно нулю, то решения задач для Π_k имеют вид

$$\Pi_k(x, \tau) = -U(x, \tau)\bar{u}_k(x, 0) - U(x, \tau) \int_0^\tau (U(x, \sigma))^{-1} \pi_k(x, \sigma) d\sigma,$$

где

$$U(x, \tau) = \exp \left(- \int_0^\tau F'_u(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0(x, \lambda), x, 0, 0) d\lambda \right)$$

– фундаментальное решение $(U(x, 0) = 1)$ соответствующего однородного уравнения, и справедлива оценка вида

$$|U(x, \tau) (U(x, \sigma))^{-1}| \leq C \exp(-\kappa(\tau - \sigma)),$$

где переменные $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \sigma \leq \tau$, а постоянные C и κ – положительные числа. Эта оценка позволяет для функции $\Pi_k(x, \tau)$ получить оценку вида (7).

Если величина $\varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0) \equiv 0$, то $\Pi_0(x, \tau) \equiv 0$. Коэффициенты при Π_k оказываются постоянными и положительными, то есть задачи упрощаются.

Таким образом рекуррентно определяются коэффициенты ряда для $\Pi(x, \tau, \varepsilon)$.

Задача для $Q_0 = Q_0(\xi, t)$ имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} = F(\bar{u}_0(0, t) + Q_0(0, t, 0)), \quad Q_0(0, t) = \psi_1(t) - \bar{u}_0(0, t), \quad Q_0(\infty, t) = 0,$$

где t играет роль параметра. Это уравнение эквивалентно системе (4), в которой следует положить $z_1 = Q_0(\xi, t)$, $k = 0$, $y = \xi$. Условия затухания выделяют решения уравнения, для которых справедливы экспоненциальные оценки убывания вида

$$|Q_0(\xi, t)| \leq C \exp(-\kappa \xi), \quad (8)$$

где C и κ – некоторые положительные постоянные. Так как возможен переход с сепаратрисы на сепаратрису, то решение задачи не единственно. Однако, такие случаи мы исключаем и рассматриваем только монотонные решения.

Задачи для определения функций $Q_k(\xi, t)$, $k \geq 1$, линейны:

$$a^2 \frac{\partial^2 Q_k}{\partial \xi^2} = F'_u(\bar{u}_0(0, t) + Q_0(0, t, 0))Q_k + q_k, \quad Q_k(0, t) = -\bar{u}_k(0, t), \quad Q_k(\infty, t) = 0.$$

Функции q_k представляют собой линейные комбинации функций Q_j , $j < k$, и их производных с коэффициентами, являющимися многочленами от ξ . Поэтому, если для функций Q_j , $j < k$, справедливы экспоненциальные оценки вида (8), то для функций q_k справедливы оценки того же вида.

Если величина $\psi_1(t) - \bar{u}_0(0, t)$ не равна тождественно нулю, то решения задач имеют вид

$$Q_k(\xi, t) = -\frac{\Phi(\xi, t)}{\Phi(0, t)} \bar{u}_k(0, t) - \frac{\Phi(\xi, t)}{a(0, t)} \int_0^\xi \frac{d\lambda}{\Phi^2(\lambda, t)} \int_\lambda^\infty \Phi(\sigma, t) q_k(\sigma, t) d\sigma, \quad \Phi(\xi, t) = \frac{\partial Q_0(\xi, t)}{\partial \xi},$$

и для них справедливы оценки вида (8).

Если величина $\psi_1(t) - \bar{u}_0(0, t) \equiv 0$, то $Q_0(\xi, t) \equiv 0$, а коэффициент при Q_k оказывается постоянным и положительным, то есть задачи упрощаются.

Таким образом рекуррентно определяются коэффициенты ряда для $Q(\xi, t, \varepsilon)$.

Регулярная часть асимптотики вносит невязки в граничные условия и на стороне $x = 1$. Эти невязки устраняет функция $Q^* = Q^*(\xi_*, t, \varepsilon)$. Коэффициенты ряда для $Q^* = Q^*(\xi_*, t, \varepsilon)$ определяются аналогично коэффициентам ряда для $Q(\xi, t, \varepsilon)$ и для этих коэффициентов справедливы экспоненциальные оценки убывания вида

$$|Q_k^*(\xi_*, t)| \leq C \exp(-\kappa \xi_*), \quad (9)$$

где C и κ – некоторые положительные постоянные.

Таким образом, погранслоиная часть асимптотики определяется полностью. Однако, каждая в отдельности погранслоиная функция, устраняя невязки на соответствующей стороне, в свою очередь вносит невязки на примыкающие стороны прямоугольника. Так погранслоиные функции $\Pi_k(x, \tau)$, устраняя невязки в начальном условии на стороне $t = 0$, вносят дополнительные невязки в граничные условия на сторонах $x = 0$ и $x = 1$. Эти невязки существенны только вблизи угловых точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$, а далее, с ростом t , они экспоненциально затухают. Аналогичное влияние функции $Q_k(\xi, t)$ и $Q_k^*(\xi_*, t)$ оказывают на начальное условие на стороне $x = 0$.

С целью устранения невязок с начальными и граничными условиями вблизи угловых точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$ прямоугольника Ω вводятся угловые пограничные функции $P(\xi, \tau, \varepsilon)$ и $P^*(\xi_*, \tau, \varepsilon)$. Эти функции ищутся в виде рядов

$$P(\xi, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k(\xi, \tau), \quad P^*(\xi_*, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k^*(\xi_*, \tau).$$

Задача для определения $P_0(\xi, \tau)$ ставится в первой четверти $\mathbb{R}_+^2$ плоскости растянутых переменных (ξ, τ) и имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_0}{\partial \tau} = F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) - F(\bar{u}_0 + \Pi_0) - F(\bar{u}_0 + Q_0), \quad (10)$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \quad (11)$$

$$P_0(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \rightarrow \infty, \quad (12)$$

где для краткости используются обозначения

$$F(u) = F(u, 0, 0, 0), \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0), \quad \Pi_k = \Pi_k(0, \tau), \quad Q_k = Q_k(\xi, 0), \quad P_k = P_k(\xi, \tau).$$

Для функций $P_k(\xi, \tau)$, $k \geq 1$, в области $\mathbb{R}_+^2$ получаются линейные задачи

$$a^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_k}{\partial \tau} = F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) P_k + h_k, \quad (13)$$

$$P_k(0, \tau) = -\Pi_k(0, \tau), \quad P_k(\xi, 0) = -Q_k(\xi, 0), \quad (14)$$

$$P_k(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \rightarrow \infty, \quad (15)$$

где неоднородности $h_k = h_k(\xi, \tau)$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида

$$|h_k(\xi, \tau)| \leq C \exp(-\kappa(\xi + \tau)), \quad (16)$$

если подобным оценкам удовлетворяют функции $P_0, \dots, P_{k-1}$. Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

Задачи для угловых погранфункций $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \geq 0$, ставятся аналогично.

В дальнейшем для определенности считается, что в каждой угловой точке граничное значение φ больше корня вырожденного уравнения $\bar{u}_0$. (Случай $\varphi < \bar{u}_0$ сводится к предыдущему с помощью замены u на $-u$.)

Задача (10)–(12) для определения $P_0(\xi, \tau)$ нелинейна и (линейный) метод угловых пограничных функций перестает работать. Для решения этой задачи удобно пользоваться обозначением

$$L(Z) := a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0).$$

Тогда задача (10)–(12) имеет вид

$$L(P_0) = 0 \quad \text{в области} \quad \mathbb{R}_+^2, \quad (17)$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \quad (18)$$

$$P_0(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Для доказательства существования решения этой задачи будет использован метод верхних и нижних решений (см. [2] – [4]), который заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области} \quad D,$$

$$Z = h \quad \text{на границе} \quad \partial D$$

имеет решение Z в границах

$$Z_- \leq Z \leq Z_+,$$

если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+) \leq 0, \quad L(Z_-) \geq 0, \quad Z_- \leq Z_+,$$

а на ее границе

$$Z_- \leq h \leq Z_+.$$

4. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = (u - \alpha)(u - \beta)(u - \bar{u}_0), \quad \text{где} \quad \alpha \leq \beta < \bar{u}_0,$$

и граничное значение $\varphi > \bar{u}_0$, то задача (17)–(19) имеет решение $P_0(\xi, \tau)$, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида

$$|P_0(\xi, \tau)| \leq C \exp(-\kappa(\xi + \tau)), \quad (20)$$

где C и κ – некоторые положительные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем метод верхних и нижних решений. Построим верхнее и нижнее решения задачи (17)–(19).

ЛЕММА 1. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = (u - \alpha)(u - \beta)(u - \bar{u}_0), \quad \text{где} \quad \alpha \leq \beta < \bar{u}_0,$$

и граничное значение $\varphi > \bar{u}_0$, то функция вида

$$Z_+ \equiv 0$$

является верхним решением задачи (17)–(19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначаем

$$s = \Pi_0(0, \tau), \quad t = Q_0(\xi, 0). \quad (21)$$

Требуется доказать неравенство $L(0) \leq 0$. Имеем

$$L(0) = -F(\bar{u}_0 + s + t) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t).$$

Значения функций $s = \Pi_0(0, \tau)$ и $t = Q_0(\xi, 0)$ принадлежат промежутку $(0, \varphi - \bar{u}_0]$. Рассматриваемая функция $F(u)$ выпукла вниз на промежутке $[\bar{u}_0, \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0)]$. Поэтому для любых s и t из промежутка $(0, \varphi - \bar{u}_0]$ выполняется неравенство

$$F(\bar{u}_0 + s + t) \geq F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t).$$

Таким образом, $L(0) \leq 0$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = (u - \alpha)(u - \beta)(u - \bar{u}_0), \quad \text{где } \alpha \leq \beta < \bar{u}_0,$$

и граничное значение $\varphi > \bar{u}_0$, то функция вида

$$Z_-(\xi, \tau) = -2\sqrt{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}$$

является нижним решением задачи (17)–(19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать неравенство $L(Z_-) \geq 0$. Предполагаемый вид нижнего решения задачи (17)–(19) продиктован соотношением

$$\Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0} = \left(\sqrt{\Pi_0} - \sqrt{Q_0}\right)^2,$$

из которого следует, что величина

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z_- \in [\bar{u}_0; \varphi),$$

так как $\Pi_0, Q_0 \in (0; \varphi - \bar{u}_0]$.

На границе области $\mathbb{R}_+^2$ имеем

$$Z_-(0, \tau) = -2\sqrt{(\varphi - \bar{u}_0)\Pi_0} < -\Pi_0,$$

$$Z_-(\xi, 0) = -2\sqrt{(\varphi - \bar{u}_0)Q_0} < -Q_0,$$

$$Z_-(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi + \tau \rightarrow \infty,$$

поэтому Z_- может претендовать на роль нижнего барьера.

Внутри области $\mathbb{R}_+^2$ имеем

$$\begin{aligned} L\left(-2\sqrt{\Pi_0 Q_0}\right) &= -2a^2\sqrt{\Pi_0} \frac{d^2\sqrt{Q_0}}{d\xi^2} - 2\sqrt{Q_0} \frac{d\sqrt{\Pi_0}}{d\tau} - \\ &- F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0}\right) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0). \end{aligned}$$

Выразим производные:

$$-2a^2\sqrt{\Pi_0} \frac{d^2\sqrt{Q_0}}{d\xi^2} = -2a^2\sqrt{\Pi_0} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\sqrt{Q_0}}{d\xi} \right) = -2a^2\sqrt{\Pi_0} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{2\sqrt{Q_0}} \frac{dQ_0}{d\xi} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -2a^2 \sqrt{\Pi_0} \left(-\frac{1}{4Q_0 \sqrt{Q_0}} \left(\frac{dQ_0}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{Q_0}} \frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} \right) = \\
&= -2a^2 \sqrt{\Pi_0} \left(-\frac{1}{4Q_0 \sqrt{Q_0}} \frac{2}{a^2} \int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0 + u) du + \frac{1}{2\sqrt{Q_0}} \frac{1}{a^2} F(\bar{u}_0 + Q_0) \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\Pi_0}}{Q_0 \sqrt{Q_0}} \int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0 + u) du - \frac{\sqrt{\Pi_0}}{\sqrt{Q_0}} F(\bar{u}_0 + Q_0).
\end{aligned}$$

Другая производная

$$-2\sqrt{Q_0} \frac{d\sqrt{\Pi_0}}{d\tau} = -\frac{\sqrt{Q_0}}{\sqrt{\Pi_0}} \frac{d\Pi_0}{d\tau} = \frac{\sqrt{Q_0}}{\sqrt{\Pi_0}} F(\bar{u}_0 + \Pi_0).$$

Собирая все вместе, с учетом замены (21) получаем

$$\begin{aligned}
L(-2\sqrt{st}) &= \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}} \int_0^t F(\bar{u}_0 + u) du - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}} F(\bar{u}_0 + t) - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}} F(\bar{u}_0 + s) - \\
&\quad - F(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t) = \\
&= \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F(\bar{u}_0 + s) - F(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}) + \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}} \int_0^t F(\bar{u}_0 + u) du.
\end{aligned}$$

Таким образом, функция

$$Z_- = -2\sqrt{\Pi_0 Q_0}$$

будет нижним барьером для решения $P_0 = P_0(\xi, \tau)$ задачи (17)–(19), если при любых значениях s и t из промежутка $(0, \varphi - \bar{u}_0]$ величина

$$\begin{aligned}
L(Z_-) &= \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F(\bar{u}_0 + s) - \\
&\quad - F(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}) + \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}} \int_0^t F(\bar{u}_0 + u) du \geq 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь

$$\frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}} \int_0^t F(\bar{u}_0 + u) du \geq 0,$$

поэтому достаточно доказать более сильное неравенство

$$\left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F(\bar{u}_0 + s) - F(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}) \geq 0,$$

которое эквивалентно неравенству

$$\sqrt{st} \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \sqrt{st} \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F(\bar{u}_0 + s) - \sqrt{st} F(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}) \geq 0,$$

или

$$(\sqrt{t} - \sqrt{s}) \sqrt{s} F(\bar{u}_0 + t) + (\sqrt{s} - \sqrt{t}) \sqrt{t} F(\bar{u}_0 + s) - \sqrt{st} F(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}) \geq 0,$$

или

$$-\sqrt{st} F(\bar{u}_0 + (\sqrt{s} - \sqrt{t})^2) - (\sqrt{s} - \sqrt{t}) (\sqrt{s} F(\bar{u}_0 + t) - \sqrt{t} F(\bar{u}_0 + s)) \geq 0. \tag{23}$$

Обозначаем

$$x = \sqrt{s}, \quad y = \sqrt{t}.$$

Изменение переменных x, y ограничивается промежутком $(0; \sqrt{\varphi - \bar{u}_0}]$. Неравенство (23) в переменных x, y имеет вид

$$-xyF(\bar{u}_0 + (x - y)^2) - (x - y)(xF(\bar{u}_0 + y^2) - yF(\bar{u}_0 + x^2)) \geq 0. \quad (24)$$

Используем конкретный вид функции $F(u)$:

$$F(u) = (u - \alpha)(u - \beta)(u - \bar{u}_0), \quad \text{где } \alpha \leq \beta < \bar{u}_0.$$

Имеем

$$F(\bar{u}_0 + (x - y)^2) = (\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta)(x - y)^2,$$

$$F(\bar{u}_0 + y^2) = (\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta)y^2,$$

$$F(\bar{u}_0 + x^2) = (\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta)x^2,$$

и неравенство (24) принимает вид

$$\begin{aligned} & -xy(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta)(x - y)^2 - \\ & - (x - y)[y(\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta)y^2 - y(\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta)x^2] \geq 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & -xy(x - y)^2(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - \\ & - xy(x - y)[y(\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta) - x(\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta)] \geq 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & -xy(x - y)[(x - y)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) + \\ & + y(\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta) - x(\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta)] \geq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Область изменения $D = (0; \sqrt{\varphi - \bar{u}_0}] \times (0; \sqrt{\varphi - \bar{u}_0}]$ переменных s, t диагональю $y = x$ делится на две части D_1 и D_2 :

$$D_1 : 0 < y \leq x \leq \sqrt{\varphi - \bar{u}_0}, \quad D_2 : 0 < x \leq y \leq \sqrt{\varphi - \bar{u}_0}.$$

Неравенство (25) проверим сначала в подобласти D_1 . В этой подобласти значения $-xy(x - y) \leq 0$, поэтому неравенство (25) эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} & (x - y)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) + \\ & + y(\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta) - x(\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta) \leq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Последнее неравенство запишем в виде

$$\begin{aligned} & x[(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta)] - \\ & - y[(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta)] \leq 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{x}{y}[(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta)] - \\ & - [(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta)] \leq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

В последнем неравенстве значения дроби

$$\frac{x}{y} \geq 1,$$

а выражение в квадратных скобках после этой дроби

$$\begin{aligned} & (\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha) (\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + x^2 - \alpha) (\bar{u}_0 + x^2 - \beta) = \\ & = -(2x - y)y (2\bar{u}_0 - \alpha - \beta + (x - y)^2 + x^2) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в подобласти D_1 неравенство (27) будет верным, если будет установлена справедливость более сильного неравенства

$$\begin{aligned} & [(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha) (\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + x^2 - \alpha) (\bar{u}_0 + x^2 - \beta)] - \\ & - [(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha) (\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + y^2 - \alpha) (\bar{u}_0 + y^2 - \beta)] \leq 0, \end{aligned}$$

которое после преобразований левой части имеет вид

$$-(x^2 - y^2) [2\bar{u}_0 - \alpha - \beta + (x - y)^2 + 2xy] \leq 0,$$

и оказывается верным. Вместе с этим неравенством верными в подобласти D_1 будут неравенства (23) и (22). Из-за симметрии подобластей D_1 и D_2 относительно линии $y = x$ и симметричного вхождения переменных x, y неравенства (23) и (22) будут верными и в подобласти D_2 .

Таким образом, функция

$$Z_- = -2\sqrt{\Pi_0 Q_0}$$

является нижним барьером для решения $P_0 = P_0(\xi, \tau)$ задачи (17)–(19). *Лемма 2 доказана.*

Согласно методу верхних и нижних решений задача (17)–(19) имеет решение P_0 , заключенное между барьерами

$$-2\sqrt{\Pi_0 Q_0} \leq P_0 \leq 0.$$

Оба барьера удовлетворяют экспоненциальной оценке убывания вида (20). Поэтому такой же оценке удовлетворяет и решение $P_0 = P_0(\xi, \tau)$ задачи (17)–(19). **Теорема 1 доказана.**

ТЕОРЕМА 2. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = (u - \alpha)(u - \beta)(u - \bar{u}_0), \quad \text{где } \alpha \leq \beta < \bar{u}_0,$$

и граничное значение $\varphi > \bar{u}_0$, то задачи (13)–(15) имеют решения $P_k(\xi, \tau)$, удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида (20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем положительность коэффициента $F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)$ в уравнениях (13). Значения $\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0$ расположены в промежутке

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0} \leq \bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0 \leq \bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0.$$

Левый барьер

$$\Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0} = \left(\sqrt{\Pi_0} - \sqrt{Q_0} \right)^2,$$

и потому его величина

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0} \in [\bar{u}_0; \varphi),$$

так как $\Pi_0, Q_0 \in (0; \varphi - \bar{u}_0]$. Производная $F'(u)$ положительна на промежутке $[\bar{u}_0; \varphi)$ и ее значения на этом промежутке

$$F'(u) \geq F'(\bar{u}_0) > 0.$$

Величина правого барьера

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 \in [\bar{u}_0, \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0)].$$

Производная $F'(u)$ положительна и на промежутке $[\bar{u}_0, \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0)]$ и ее значения

$$F'(u) \geq F'(\bar{u}_0) > 0.$$

Таким образом, коэффициент $F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)$ в уравнениях (13) положителен и его значения

$$F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) \geq F'(\bar{u}_0) > 0.$$

Вследствие этого задачи (13)–(15) имеют решения $P_k(\xi, \tau)$, удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида (20). **Теорема 2 доказана.**

Задачи для угловых погранфункций $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \geq 0$, ставятся и решаются аналогично. Асимптотический ряд (5) оказывается полностью построенным. Остается обосновать асимптотическую сходимость этого ряда к решению задачи (1)–(3).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия 1–5 и в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1 , функция $F(u, k, 0, 0)$ является кубической и имеет вид

$$F(u, k, 0, 0) = (u - \alpha(k))(u - \beta(k))(u - \bar{u}_0(k)), \quad \text{где } \alpha(k) \leq \beta(k) < \bar{u}_0(k),$$

Если граничные значения $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$, то для достаточно малых ε задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t, \varepsilon)$, для которого ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, \tau) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi_*, t) + P_k(\xi, \tau) + P_k^*(\xi_*, \tau) \right)$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon \rightarrow 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Доказательство теоремы основано на разрешимости задач для пограничных функций Π_k , Q_k , Q_k^* , P_k и P_k^* при $k \geq 1$ и повторяет доказательство соответствующей теоремы из работы [7]. При этом используется метод дифференциальных неравенств (см. [5]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция F в различных угловых точках не обязательно должна иметь один и тот же вид. Все результаты работ [6] – [15] сохраняются, если в каждой угловой точке функция F имеет один из рассмотренных в этих работах вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.
2. Amann H. On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1971. Vol.21, №2. P. 125-146.
3. Sattinger D.H. Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21, №11. P. 979-1000.
4. Amann H. // Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E. H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al. - New York etc: Acad press, cop. 1978. - XIII. P. 1-29.
5. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, №4. С. 719–723. (English transl.: Nefedov N.N. The Method of Differential Inequalities for Some Singularly Perturbed Partial Differential Equations // Differential Equations. 1995. Vol. 31, №4. pp. 668–671.)

6. Денисов И. В. Об асимптотическом разложении решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения в прямоугольнике // Асимптотические методы теории сингулярно - возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: Сб. научн. тр. - Бишкек: Илим, 1991, с. 37.
7. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2017. Т. 57, №2. С. 255-274. (English transl.: Denisov I. V. Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57, №2. pp. 253-271.)
8. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2018. Т. 58, №4. С. 575-585. (English transl.: Denisov I. V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Monotonic Nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. Vol. 58, №4. pp. 562-571.)
9. Денисов И. В. О некоторых классах функций // Чебышевский сборник. 2009. Т. X, вып. 2 (30). Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. С. 79-108.
10. Денисов А. И., Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59, №1. С. 102-117. (English transl.: Denisov I. V., Denisov A. I. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59, №1. pp. 96-111.)
11. Денисов А. И., Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59, №9. С. 1581-1590. (English transl.: Denisov I. V., Denisov A. I. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonmonotonic Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59, №9. pp. 1518-1527.)
12. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2021. Т. 61, №2. С. 256-267. (English transl.: Denisov I. V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61, №2. pp. 242-253.)
13. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2021. Т. 61, №11. С. 1894-1903. (English transl.: Denisov I. V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61, №11. pp. 1855-1863.)
14. Денисов А. И., Денисов И. В. Математические модели процессов горения // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 185. ВИНТИ РАН, М., - С. 50-57.

15. Денисов А. И., Денисов И. В. Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, Вып. 1 (88). - Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, – С. 27-39.

REFERENCES

1. Vasilyeva, A. B., Butuzov, V. F. 1990, "Asymptotic methods in the theory of singular perturbations", *M.: Higher school*.
2. Amann, H. 1971, "On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems", *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 21, no. 2, pp. 125-146.
3. Sattinger, D. H. 1972, "Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems", *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 21, no. 11, pp. 979-1000.
4. Amann, H. 1978, "Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al.", - New York etc: Acad press, cop. – XIII. pp. 1-29.
5. Nefedov, N. N. 1995, "The Method of Differential Inequalities for Some Singularly Perturbed Partial Differential Equations", *Differential Equations*, vol. 31, no. 4, pp. 668–671.
6. Denisov, I. V. 1991, "On the asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed elliptic equation in a rectangle", *Asymptotic methods of the theory of singularly perturbed equations and ill-posed problems: Collection of articles*, scientific. tr. - Bishkek: Ilim, p. 37.
7. Denisov, I. V. 2017, "Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 57, no. 2, pp. 253-271.
8. Denisov, I. V. 2018, "Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Monotonic Nonlinearity", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 58, no. 4, pp. 562-571.
9. Denisov, I. V. 2009, "On some classes of functions", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. X, no. 2 (30). - *Tula: Publishing house Tul. state ped. un-ta them. L. N. Tolstoy*, pp. 79-108.
10. Denisov, A. I., Denisov, I. V. 2019, "Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonlinearities", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 59, no. 1, pp. 96-111.
11. Denisov, A. I., Denisov, I. V. 2019, "Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonmonotonic Nonlinearities", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 59, no. 9, pp. 1518–1527.
12. Denisov, I. V. 2021, "Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic Nonlinearities", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 61, no. 2, pp. 242–253.
13. Denisov, I. V. 2021, "Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 61, no. 11, pp. 1855-1863.
14. Denisov, A. I., Denisov, I. V. 2020, "Mathematical models of combustion processes", *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, vol. 185. VINITI RAN, Moscow, pp. 82–88.

-
15. Denisov, A.I., Denisov, I.V. 2023, “Nonlinear method of angular boundary functions in problems with cubic nonlinearities”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. XXIV, no. 1 (88). - Tula: Publishing house Tul. state ped. un-ta them. L.N. Tolstoy, pp. 27-39.

Получено: 19.12.2023

Принято в печать: 21.03.2024