

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 519.644

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-16-25

Квадратичные формы, соответствующие граням области Вороного совершенной формы от шести переменных

О. Х. Гуломов

Гуломов Отабек Худайбердиевич — кандидат физико-математических наук, Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан).

e-mail: otabek10@mail.ru

Аннотация

Задача классификации целочисленных квадратичных форм имеет долгую историю, на протяжении которой многие математики внесли свой вклад в ее решение. Бинарные формы были всесторонне изучены Гауссом. Он и позднейшие исследователи наметили также основные пути решения проблемы классификации тернарных форм и форм более высоких размерностей. Величайшими достижениями последующего периода явились глубокое развитие теории рациональных квадратичных форм проведенная Эйхлером полная классификация неопределенных форм в размерностях 3 и выше в терминах спинорных родов.

В работе предлагается алгоритм для вычисления неэквивалентных соответствующий квадратичные формы граням области Вороного второй совершенной формы от много переменных и с помощью этого алгоритма вычислено все соответствующий неэквивалентные квадратичные формы.

Ключевые слова: квадратичных форм, совершенных форм, область Вороного, окрестность Вороного, усовершенствованный алгоритм Вороного.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

О. Х. Гуломов. Квадратичные формы, соответствующие граням области Вороного совершенной формы от шести переменных // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 16–25.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 519.644

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-16-25

Quadratic forms corresponding to the faces of the Voronoi domain of perfect form in six variables

O. Kh. Gulomov

Gulomov Otabek Hudaiberdievich — candidate of physical and mathematical sciences, V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan).

e-mail: otabek10@mail.ru

Abstract

The problem of classifying integer quadratic forms has a long history, during which many mathematicians have contributed to its solution. Binary forms were comprehensively studied by Gauss. He and later researchers also outlined the main ways to solve the problem of classifying ternary forms and forms of higher dimensions. The greatest achievements of the subsequent period were the deep development of the theory of rational quadratic forms and the complete classification of indefinite forms in dimensions 3 and higher by Eichler in terms of spinor genera.

The paper proposes an algorithm for calculating non-equivalent quadratic forms corresponding to the faces of the Voronoi domain of the second perfect form in many variables, and using this algorithm, all corresponding non-equivalent quadratic forms are calculated.

Keywords: quadratic forms, perfect forms, Voronoi domain, Voronoi neighborhood, improved Voronoi algorithm.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

O. Kh. Gulomov, 2024, "Quadratic forms corresponding to the faces of the Voronoi domain of perfect form in six variables", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 16–25.

1. Введение: постановка задачи

Тематика работе относится к одному из современных разделов геометрической теории чисел – геометрии положительных квадратичных форм. Термин «геометрия положительных квадратичных форм» и выделение этого раздела из геометрии чисел впервые встречаются в фундаментальной работе Б.Н.Делоне [1]

В работе С.С.Рышков, Е.П.Барановский [2] перечислены основные в настоящее время задачи геометрии положительных квадратичных форм и классические методы подхода к этим задачам.

В работе речь идет о классической проблеме Вороного отыскания совершенных форм, тесно связанной с известной проблемой Эрмита арифметических минимумов положительных квадратичных форм.

Эти проблемы являются интересными и нетривиальными задачами геометрической теории чисел, которыми занимались многие математики (Эрмит, Гаусс, Коркин, Золотарев, Минковский, Вороной, Делоне, Рышков, Малышев, Барнс, Владимиров, Скотт, Лармоут, Стаси, Барановский, Шушбаев, Анзин, Умаров и др.). Они появились и в работах С.Л.Соболева [12] и Х.М. Шадиметова [13] в связи с построением решетчатых оптимальных кубатурных формул. Пусть

$$f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

положительно определенная квадратичная форма от n переменных ($n \geq 2$) с вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$), матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$ и определителем $d = d(f) = \det(a_{ij}) > 0$. Форму f можно интерпретировать точкой $f = (a_{11}, \dots, a_{nn}, a_{12}, \dots, a_{n-1n})$ в $N = \frac{n(n+1)}{2}$ - мерном евклидовом пространстве E^N . Множество всех положительно определенных квадратичных форм в E^N образует конус положительности K^N .

Пусть f – положительно определенная квадратичная форма вида (1). Точная нижняя граница

$$m = m(f) = \inf_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f(x), \quad (2)$$

взятая по всем целым точкам $x \neq 0$, называется арифметическим минимумом формы f . Эта точная нижняя граница достигается, ибо множество $f(x) \leq c$ ограничено для любого $c > 0$.

Пусть

$$\pm m_k = \pm (m_{1k}, \dots, m_{nk}) \quad (k = 1, \dots, s; \quad s = s(f)) \quad (3)$$

все представления минимума $m(f) = f(\pm m_1) = \dots = f(\pm m_s)$. Отсюда, в частности, следует, что $m(f) > 0$. Так как тело $f(x) = m(f)$ строго выпукло, то $1 \leq s \leq 2^n - 1$.

Точки в (3) мы иногда будем называть минимальными точками (векторами), а матрицу

$$M(f) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & \dots & m_{n1} \\ m_{12} & m_{22} & \dots & m_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{1s} & m_{2s} & \dots & m_{ns} \end{pmatrix} -$$

минимальной матрицей формы f .

Ввиду того, что $m(\lambda f) = \lambda m(f)$, $\lambda > 0$, естественно рассматривать нормированный арифметический минимум

$$\mu(f) = \frac{m(f)}{\sqrt[n]{d(f)}}.$$

Теперь $\mu(\lambda f) = \mu(f)$. Арифметический минимум $m(f)$ есть непрерывная функция от f , заданная на конусе положительности K^N А. Коркина, Г. Золотарева [3, 4], Г. Вороного [5]. Нормированный арифметический минимум $\mu(f)$ есть непрерывная функция от f , заданная на эквидискриминантной поверхности $\{f : d(f)=1\} \subset K^N$, то есть на множестве положительно определенные квадратичные формы. определителя, равного 1.

Две положительно определенных квадратичных форм $f_1(x)$ и $f_2(y)$ называются целочисленно эквивалентными (эквивалентными, $f_1 \sim f_2$) если существует целочисленная унимодулярная подстановка $x = yU$, переводящая форму $f_1(x)$ в $f_2(y)$, то есть $f_1(yU) = f_2(y)$ или $f_1U = f_2$. В частности, в случае $f_1 = f_2 = f$ U называется целочисленным автоморфизмом формы f т.е. $fU = f$.

Говорят, что положительно определенная квадратичная форма f – предельная (экстремальная) форма Коркина-Золотарева [3, 4], если f есть точка локального максимума функции $\mu(f)$, то есть если существует такая окрестность $v_f \subset \{f : d(f)=1\}$ точки f , что $\mu(f') \leq \mu(f)$, если $f' \in v_f$.

Говорят, что положительно определенная квадратичная форма f – оптимальная предельная форма Коркина-Золотарева [3, 4], если f есть точка абсолютного максимума функции $\mu(f)$, то есть если $\mu(f') \leq \mu(f)$ для всех $f' \in \{f : d(f)=1\}$.

Известно [3, 4], что число различных классов предельных форм от n переменных для данного n конечно. Отсюда вытекает проблема отыскания неэквивалентных предельных форм для фиксированного n . Это и есть проблема Эрмита арифметических минимумов положительных квадратичных форм. Следовательно, существует оптимальная предельная форма f_0 , для которой $\gamma_n = \sup_{f \in \{f: d(f)=1\}} \mu(f) = \mu(f_0)$. Число γ_n называется постоянной Эрмита. γ_n есть

наибольшее из чисел $\mu(f_1), \dots, \mu(f_t)$, где $f_1, \dots, f_t$ – суть представители всех лучей классов предельных форм. В работах Minkowski Н. [7], К. Роджерс [8], С.С. Рышков [9], задача вычисления постоянной Эрмита получила геометрическую интерпретацию как задача о плотнейшей решетчатой упаковке равных шаров в E^N .

2. Проблема Вороного отыскания совершенных форм и алгоритм Вороного

Отметим одно известное [3, 4] важное свойство предельных форм: представления (3) минимума (2) предельной формы f однозначно определяют форму, т.е. следующая система линейных уравнений

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} m_{ik} m_{jk} = m \quad (k = 1, \dots, s) \quad (4)$$

имеет относительно неизвестных a_{ij} единственное решение. На основе этого свойства Вороным создана теория совершенных форм.

Говорят, что положительно определенная квадратичная форма f является совершенной формой Вороного [5], если системой линейных уравнений (4) коэффициенты a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) формы f определяются однозначно.

Так как система (4) однозначно определяет N неизвестных коэффициентов (a_{ij}), то верны неравенства $\frac{n(n+1)}{2} \leq s \leq 2^n - 1$ для любой совершенной формы.

Таким образом, из вышеупомянутого свойства предельной формы и определения совершенной формы следует, что всякая предельная форма является совершенной. Обратное не верно. Начиная с $n=6$, существуют совершенные, но не предельные формы.

Известно [5], что число различных классов совершенных форм от n переменных при данном n конечно. Отсюда вытекает проблема отыскания неэквивалентных совершенных форм для фиксированного n . Это и есть проблема Вороного отыскания совершенных форм. Теперь ясно, что из постановок этих проблем (Эрмита, Вороного) следует, что проблема Эрмита содержится в проблеме Вороного, другими словами, проблема Эрмита сводится к проблеме Вороного.

Согласно теории Вороного [5], каждой совершенной форме f вида (1) ставится в соответствие область $V^N(f) \subset \bar{K}^N$ — N -мерная бесконечная пирамида с конечным числом $(N-1)$ -мерных граней и с вершиной в начале координат (совершенный гоноэдр [5, 9, 10, 11, 14, 15]) — совокупность всех неотрицательных квадратичных форм, представимых в виде

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{1 \leq k \leq s} \rho_k \lambda_k^2(x_1, \dots, x_n), \quad (5)$$

где $\bar{K}^N$ — замыкание конуса K^N , $\rho_k \geq 0$,

$$\lambda_k = \lambda_k(x) = \lambda_k(x_1, \dots, x_n) = m_{1k}x_1 + \dots + m_{nk}x_n \quad (k = 1, \dots, s).$$

В пространстве E^N область $V^N(f)$ есть множество решений некоторой системы однородных неравенств с неизвестными a_{ij} :

$$\Psi_k(a_{ij}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} P_{ij}^{(k)} a_{ij} \geq 0 \quad (k = 1, \dots, \sigma). \quad (6)$$

Тогда по алгоритму Вороного [5] совершенные формы f_k , смежные с совершенной формой f , строятся следующим образом:

$$f_k(x) = f(x) + r_k \Psi_k(x) \quad (k = 1, \dots, \sigma), \quad (7)$$

где

$$r_k = \min_{\{x \in Z^n / \{0\} : \Psi_k(x) < 0\}} \left\{ \frac{f(x) - m}{[-\Psi_k(x)]} \right\}, \quad (8)$$

$$\Psi_k(x) = \Psi_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} P_{ij}^{(k)} x_i x_j. \quad (9)$$

Выделив из совокупности $\{f, f_1, \dots, f_\sigma\}$ неэквивалентные относительно группы $G(n; Z)$ (группа целочисленных унимодулярных подстановок переменных $x_1, \dots, x_n$), получаем окрестность Вороного $\{f, f_1, \dots, f_\tau\}$ (см. [2, 5, 6, 9, 10, 11, 14]) совершенной формы f относительно группы $G(n; Z)$ (группа целочисленных унимодулярных подстановок переменных $x_1, \dots, x_n$), или просто окрестность Вороного, которую обозначают $VN(f; G(n; Z))$ или $VN(f)$.

Основные трудности в реализации алгоритма Вороного следующие: отыскание уравнений всех $(N-1)$ -мерных граней области $V^N(f)$; выделение среди всех $(N-1)$ -мерных граней неэквивалентных относительно группы $G(f)$ целочисленных автоморфизмов совершенной формы f ; нахождение числа n_i и вычисление $VN(f)$.

3. Алгоритм установления эквивалентности положительных квадратичных форм

Прямоугольная $(s \times n)$ матрица всех представлений минимума положительных квадратичных форм f называется минимальной матрицей формы f и обозначается через $M = M(f)$, а миноры n -го порядка этой матрицы называются минимальными определителями формы f (см. [2, 5]). Понятия «минимальная матрица», «минимальный определитель» введены в [2, 5] под другими названиями: соответственно «характеристическая матрица», «характеристический определитель». Минимальный определитель, абсолютная величина которого равна 1, называется базисным определителем формы f , а соответствующая матрица называется базисной подматрицей минимальной матрицы или просто базисной матрицей. В решетке, отвечающей положительным квадратичным форм f , базисной подматрице соответствует основной репер минимальных векторов этой решетки. По минимальной матрице $M(f)$ положительных квадратичных форм f вида (1) вычисляем матрицу $\Gamma = MAM^T$, т.е. симметричную $(s \times s)$ матрицу, составленную из скалярных произведений (m_k, m'_k) представлений минимума m в метрике формы f . При этом каждой базисной подматрице матрицы M будет отвечать подматрица Υ матрицы Γ , являющаяся матрицей Грама, соответствующей этой базисной матрице основного репера минимальных векторов.

ЛЕММА 3. Пусть f_i , где $i = 1, 2$ - две такие п.к.ф. от n переменных с матрицами коэффициентов A_i , что матрица $M_i = M(f_i)$ для каждого $i = 1, 2$ имеет базисную подматрицу. Тогда для того, чтобы положительные квадратичные формы f_1 и f_2 были целочисленно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы в матрицах $M_i A_i M_i^T = \Gamma_i$ нашлись одинаковые подматрицы Υ_i , отвечающие базисным подматрицам минимальных матриц M_i , соответственно.

Лемма 3 содержит в себе алгоритм для отыскания целочисленной унимодулярной подстановки U , переводящей п.к.ф. f_1 в п.к.ф. f_2 , то есть

$f_1(yU) = f_2(y)$. Основой этого алгоритма является отыскание в матрице

$\Gamma_1 = M_1 A_1 M_1^T$ подматрицы Υ_2 , отвечающей какому ни будь базисному определителю матрицы $M_2 = M(f_2)$ поэлементно методом перебора.

4. Алгоритм для отыскания граней области Вороного совершенной формы $\varphi_1^n(x_1, \dots, x_n)$

В [5] доказывается, что квадратичные формы (9), соответствующие $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ -мерным граням $\Psi_k = \Psi_k(\varphi_1^n)$ области $V^{\frac{n(n+1)}{2}}(\varphi_1^n)$ совершенной формы

$$\varphi_1^n = \varphi_1^n(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \quad (10)$$

имеют вид:

$$-x_1x_3, \quad (11)$$

$$x_1x_2 - \delta_{34}x_3x_4 - \dots - \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n. \quad (12)$$

Следовательно, чтобы найти совершенной форма, смежные с φ_1^n , необходимо выделить среди форм

$$\delta_{34}x_3x_4 + \dots + \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n \quad (13)$$

неэквивалентные относительно группы $G(\varphi_1^n)$ целочисленных автоморфизмов формы φ_1^n , где $\delta_{ij} = 0$ или 1 ($3 \leq i < j \leq n$). Число форм (12) достаточно большое, и равно

$$2^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}. \quad (14)$$

После этого с помощью формулы (7) строятся совершенные формы, смежные с совершенной формой φ_1^n .

В связи с этим предлагается следующий алгоритм. Обозначим через q число членов формы (13) так, что $q \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Каждой переменной x_i ($i=3, \dots, n$) ставим в соответствие натуральное число l_i , равное фактическому количеству переменной x_i в сумме $\delta_{34}x_3x_4 + \dots + \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n$, то есть сколько раз переменная x_i фактически участвует в сумме.

Будем говорить, что два натуральных числа l_i, l_j соединены (этот факт будем обозначать через $l_i l_j$), если в сумме (13) есть произведение $x_i x_j$. Тогда форму (13) можно интерпретировать как представление числа $2q$ в виде суммы чисел l_i при условии, что каждое число данного представления имеет возможность для соединения с другими оставшимися числами. Такое ограничение представления числа $2q$ следует из самой природы формы $\delta_{34}x_3x_4 + \dots + \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n$. Число натуральных чисел, участвующих в сумме представления числа $2q$, не меньше 2 и не больше $n - 2$.

5. Основной результат

ТЕОРЕМА. Число 20-мерных граней области Вороного $V^{21}(\varphi_1^6)$ совершенной формы φ_1^6 , неэквивалентных относительно группы S_4 перестановок переменных $x_3, \dots, x_6$, равно 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, по алгоритму имеем $1 \leq q \leq 6$.

I. Если $q = 1$, то 2 представляется в виде: $1100 \rightarrow 0000$ и получаем форму x_3x_4 . Число возможных перестановок 1100 равно $6 \left(\frac{4!}{2!2!} = 6 \right)$, т.е. 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011. Все они эквивалентны между собой, так как форма φ_1^6 имеет автоморфизмы, состоящие из перестановок переменных x_3, x_4, x_5, x_6 . Поэтому оставляем только одну $1100(x_3x_4)$.

II. Если $q=2$, то 4 представляется в виде $2110 \rightarrow 0000$, и получаем форму $x_3(x_4 + x_5)$. Число всевозможных перестановок 2110 равно $12 \left(\frac{4!}{1!2!1!} = 12 \right)$, т.е.

$$2110, 2101, 2011, 1210, 1201, 1021, 1120, 1102, 1012, 0112, 0211, 0121. \quad (15)$$

Остальные представления числа 4 (см. (15)) эквивалентны 2110, так как форма φ_1^6 имеет автоморфизмы, состоящие из перестановок переменных x_3, x_4, x_5, x_6 . Здесь всего форм 12, и все они эквивалентны между собой. Пусть $q = 2$, тогда 4 представляется также в виде: 1) $1111 \rightarrow 0000$ ($x_3x_4 + x_5x_6$); 2) $1111 \rightarrow 0000$ ($x_3x_5 + x_4x_6$); 3) $1111 \rightarrow 0000$ ($x_3x_6 + x_4x_5$) – это всевозможные соединения. Их всего три. Они эквивалентны между собой, так как 1111 имеет группу перестановок переменных x_4, x_5, x_6 . Таким образом, при $q=2$ из 15 возможных случаев неэквивалентными оказываются только два: $x_3(x_4+x_5)$, $x_3x_4 + x_5x_6$.

III. Пусть $q=3$, тогда 6 представляется в виде: 1) $3111 \rightarrow 0000$, и получаем форму $x_3(x_4 + x_5 + x_6)$. Число всевозможных перестановок 3111 равно 4 ($\frac{4!}{1!3!} = 4$), т.е. 3111, 1311, 1131, 1113. Остальные представления числа 6 эквивалентны 3111, так как форма φ_1^6 имеет автоморфизмы, состоящие из перестановок переменных x_3, x_4, x_5, x_6 . Всего их 4, и все они эквивалентны между собой. Поэтому остается 1: $3111(x_3(x_4 + x_5 + x_6))$. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

2) $2220 \rightarrow 0110 \rightarrow 0000$, и получаем форму $x_3(x_4 + x_5) + x_4x_5$. Число всевозможных перестановок равно 4 ($\frac{4!}{1!3!} = 4$), т.е. 2220, 2202, 2022, 0222. Другие (2202, 2022, 0222) представления числа 6 эквивалентны 2220. Всего форм 4, и все они эквивалентны между собой.

3) $2211 \rightarrow 0101 \rightarrow 0000$, и получаем форму $x_3(x_4 + x_5) + x_4x_6$. Число всевозможных перестановок равно 6 ($\frac{4!}{2!2!} = 6$). Остальные представления числа 6 (2121, 2112, 1221, 1212, 1122) эквивалентны 2211. Получается 6 форм, и они эквивалентны между собой. У 2211 есть еще одно соединение $2211 \rightarrow 0110 \rightarrow 0000$: $x_3(x_4 + x_6) + x_4x_5$, оно эквивалентно 2211 (так как 2211 имеет $x_5 \rightarrow x_6, x_6 \rightarrow x_5$ в качестве автоморфизма). И здесь получается 6 форм, эквивалентных между собой. Таким образом, при $q=3$ из 20 возможных случаев неэквивалентными представлениями оказались только 3: 3111, 2220, 2211.

IV. Пусть $q=4$, тогда 8 представляется в виде: 1) $3221 \rightarrow 0110 \rightarrow 0000$; $x_3(x_4+x_5+x_6) + x_4x_5$. Число всевозможных перестановок равно 12 ($\frac{4!}{1!2!1!} = 12$). Остальные представления числа 8 (их 11) эквивалентны 3221. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

2) $2222 \rightarrow 0112 \rightarrow 0000$; $x_3(x_4 + x_5) + x_6(x_4 + x_5)$. У 2222 есть еще другие соединения, но все они эквивалентны 2222, так как 2222 имеет группу перестановок переменных x_4, x_5, x_6 ; $2222 \rightarrow 0112 \rightarrow 0000$; $2222 \rightarrow 0121 \rightarrow 0000$; $2222 \rightarrow 0211 \rightarrow 0000$. При $q=4$ из 15 возможных случаев неэквивалентными оказались только 2 представления: 3221, 2222.

V. Пусть $q=5$, тогда 10 представляется в виде: $3322 \rightarrow 0211 \rightarrow 0000$; $x_3(x_4 + x_5 + x_6) + x_4(x_5 + x_6)$. Число всевозможных перестановок равно 6 ($\frac{4!}{2!2!} = 6$). Остальные представления числа 10 (их 5) эквивалентны 3322.

Поэтому, при $q=5$ из 6 представлений остается только 1: 3322.

VI. Если $q=6$, то 12 представляется в виде: $3333 \rightarrow 0222 \rightarrow 0011 \rightarrow 0000$; $x_3(x_4+x_5+x_6) + x_4(x_5+x_6) + x_5x_6$.

VII. В случае, когда $\delta_{34}, \delta_{35}, \delta_{36}, \delta_{45}, \delta_{46}, \delta_{56}$ все одновременно равны нулю, имеем одну форму x_1x_2 .

В силу (14) число всевозможных форм

$$x_1x_2 - \delta_{34}x_3x_4 - \delta_{35}x_3x_5 - \delta_{36}x_3x_6 - \delta_{45}x_4x_5 - \delta_{46}x_4x_6 - \delta_{56}x_5x_6 \quad (16)$$

равно $2^6=64$. С одной стороны, наши приведенные выше рассуждения показывают, что число всевозможных представлений числа $2q$ для $1 \leq q \leq 6$ с учетом соответствующих перестановок чисел и их различных всевозможных соединений также равно $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 + 1 = 64$. Число всевозможных форм вида (16) и число всевозможных представлений числа $2q$ в виду суммы чисел l_i (при условии, что каждое натуральное число l_i имеет возможность для соединения с другими числами этого представления) совпадают. С другой стороны, как видно из вышеприведенных рассуждений, с помощью алгоритма, приведенного в пункта 2, число

64 значительно сокращается: форм вида (16), неэквивалентных относительно перестановок переменных $x_3, \dots, x_6$, будет только 11 ($1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1$).

Таким образом, в случае $n=6$ число различных неэквивалентных форм вида (15) и (16) равно 12:

- 1) x_1x_2 , 3) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5)$
- 2) $x_1x_2 - x_3x_4$, 4) $x_1x_2 - x_3x_4 - x_5x_6$,
- 5) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5 + x_6)$, 9) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5) - x_6(x_4 + x_5)$,
- 6) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5) - x_4x_5$, 10) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5 + x_6) - x_4(x_5 + x_6)$,
- 7) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5) - x_4x_6$, 11) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5 + x_6) - x_4(x_5 + x_6) - x_5x_6$,
- 8) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5 + x_6) - x_4x_5$, 12) $-x_1x_3$.

Каждая из этих форм, в силу теории Вороного [5], определяет 20-мерную грань области Вороного $V^{21}(\varphi_1^6)$ совершенной формы φ_1^6 .

Теорема доказано.

6. Заключение

В работе речь идет о классической проблеме Вороного отыскания совершенных форм, тесно связанной с известной проблемой Эрмита арифметических минимумов положительных квадратичных форм.

В работе предложен алгоритм для вычисления неэквивалентных соответствующих квадратичных форм граням области Вороного второй совершенной формы от много переменных и с помощью этого алгоритма вычислены все соответствующий неэквивалентные квадратичные формы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Н. Делоне, Геометрия положительных квадратичных форм. Часть II // УМН, 1938, № 4, 102–164
2. Рышков С. С., Барановский Е. П. Классические методы теории решетчатых упаковок // Успехи математических наук. 1979. Т. 34, № 4(202). С. 3-63.
3. Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques // Math. Ann. 1873, С.366-389, Полное собр. соч. Е.И.Золотарева. Вып.1 Изд-во АН СССР. 1931.
4. Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques positives // Math. Ann. 1877. Bd. 11. 242-292. Полное собр. соч. Е.И.Золотарева. Вып.1. Изд-во АН СССР. С.375-434.
5. Вороного Г. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм // Собр. соч. Т. II. 1952. Изд-во АН УССР. С.171-238.
6. Barnes E. S. The complete enumeration of extreme senary forms // Philos. Trans Roy. Soc. London. 1957. V. A249, № A969. P.461-506.
7. Minkowski H. Diskontinuierliche Bereiche für Arithmetische Äquivalenz // J. reine und angew. Math. 129. 1905. P.220-284.
8. Rogers C. A. Packing and covering. Cambridge. 1964. Русск. пер.: Роджерс К. Укладки и покрытия. Москва. 1968. 134 с.
9. Рышков С. С. Основные экстремальные задачи геометрии положительных квадратичных форм. // Докторская диссертация. М. 1970. 171 с.

10. Гуломов О. Окрестность Вороного главной совершенной формы от пяти переменных // Чебышевский сборник, 2023, 24(1), с. 219–227
11. Gulomov O. Kh., Khudayarov B. A., Ruzmetov K. Sh., Turaev F. Zh. Quadratic forms related to the voronoi's domain faces of the second perfect form in seven variables // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms this link is disabled, 2021, 28(1), pp. 15–23
12. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул // Москва: Наука, 1974, 808 с.
13. Шадиметов Х. М. Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурная формулы в пространствах Соболева // –Ташкент: Фан ва технология, 2019, -224 с.
14. Shadimetov Kh. M., Gulomov O. Kh. Computing Perfect Forms in Five Variables Using the Improved Voronoi Algorithm // AIP Conference Proceedings, 2023, 2781, 020047
15. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Karimov R. S. Optimization of Explicit Difference Methods in the Hilbert Space $W_2^{(2,1)}$ // AIP Conference Proceedings, 2023, 2781, 00054

REFERENCES

1. Delone, B. N., 1938. “Geometry of positive quadratic forms. Part II”, *Uspekhi Mat. Nauk*, no. 4, pp. 102–164.
2. Ryshkov S. S., Baranovskii E. P., 1979. “Classical methods of the theory of lattice packings”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 34, no. 4(208), pp. 3–63, 256.
3. Korkine, A., Zolotareff, G., 1873. “Sur les formes quadratiques”, *Math. Ann.*, 6, pp.366–389.
4. Korkine, A., Zolotareff, G., 1877. “Sur les formes quadratiques positives”, *Math. Ann.*, 11. pp. 242–292.
5. Voronoi, G., 1907. “Sur quelques proprietes des formes quadratiques positives parfaites”, *J.reine und angew. Math.*, Bd. 133, pp.97–178.
6. Barnes E. S., 1957. “The complete enumeration of extreme senary forms”, *Philos. Trans Roy. Soc., London*, V. A249, no. A969, P.461-506.
7. Minkowski H., 1905. “Diskontinui tatsbereich fur Arithmetische Aquivalenz”, *J.reine and angew. Math.*, 129, pp.220–284.
8. Rogers, C. A., 1964. “Packing and Covering”, *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 54*, Cambridge University Press, viii + 109 pp., 30s.
9. Ryshkov S. S., 1970. Basic extremal problems in the geometry of positive quadratic forms. Doctoral dissertation. M. 171 p.
10. Gulomov O. Kh., 2023. “The neighborhood of the Voronoi main perfect form from five variables, Chebyshevskii Sbornik, 241, pp. 219–227.
11. Gulomov O. Kh., Khudayarov B. A., Ruzmetov K. Sh., Turaev F. Zh., 2021. “Quadratic forms related to the voronoi's domain faces of the second perfect form in seven variables”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms* this link is disabled, Vol. 28, Iss. 1, pp. 15–23.

12. Sobolev S. L., 1974. "Introduction to the Theory of Cubature Formulas", *Moscow, Nauka*, 808 p. (in Russian).
13. Shadimetov Kh. M., 2019. "Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces", *Tashkent: Fan technology*, 224 p.
14. Shadimetov Kh. M., Gulomov O. Kh., 2023. "Computing Perfect Forms in Five Variables Using the Improved Voronoi Algorithm", *AIP Conference Proceedings*, 2781, 020047.
15. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Karimov R. S., 2023. "Optimization of Explicit Difference Methods in the Hilbert Space $W_2^{(2,1)}$ ", *AIP Conference Proceedings*, 2781, 00054.

Получено: 12.10.2023

Принято в печать: 21.03.2024