ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 1.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-5-15

О некоторых методах оценки показателя иррациональности значений функции $\arctan x$

М. Г. Башмакова, Н. В. Сычёва

Башмакова Мария Геннадьевна —кандидат физико-математических наук, Брянский государственный технический университет (г.Брянск).
e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru
Сычёва Надежда Васильевна —кандидат педагогических наук, Брянский государственный технический университет (г.Брянск).
e-mail: nadegda-P-11@mail.ru

Аннотация

Оценивание качества приближения иррационального или трансцендентного числа рациональными дробями является одним из направлений теории диофантовых приближений. Количественная характеристика такого приближения называется мерой иррациональности числа. С конца 19 века учёными разрабатывались методы оценки меры иррациональности и были получены её значения для огромного количества иррациональных и трансцендентных чисел. Наиболее часто используемый метод получения таких оценок – построение линейных форм с целыми коэффициентами, приближающих данную величину и исследование их асимптотического поведения. Приближающие линейные формы конструируется на основе цепных дробей, аппроксимаций Паде, бесконечных рядов, вещественных и комплексных интегралов. Способы исследования асимптотики таких форм в настоящее время достаточно стандартны, но построение линейной формы, обладающей хорошими приближающими свойствами, и есть главная задача.

Первые оценки значений функции $\arctan x$ были получены М.Хуттнером (1987) на основе интегрального представления гипергеометрической функции Гаусса. В 1993 г. А.Хеймонен, Т.Матала-Ахо, К. Ваананен, доказали общую теорему об оценках мер иррациональности логарифмов рациональных чисел, а позже с помощью приближающей конструкции, использующей полиномы Якоби, получили новые оценки, в частности для значений функции $\arctan x$. В дальнейшем на основе различных интегралов строились как общие методы оценивания значений $\arctan x$, так и специализированные методы для конкретных значений. В работах Е.Б.Томашевской, получившей в 2008 общую оценку для значений $\arctan \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, был использован комплексный интеграл, имеющий симметричную подынтегральную функцию. Свойство симметричности сыграло важную роль при получении оценки, поскольку оно улучшало асимптотические свойства коэффициентов линейной формы. Некоторые интегральные конструкции, использование другими исследователями, также обладали симметричностью разных типов. В данной статье рассмотрены некоторые методы оценивания значений функции $\arctan x$, их особенности, способ исследования, и указаны наилучшие на настоящее время оценки

Ключевые слова: показатель иррациональности, линейная форма.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:
М. Г. Башмакова, Н. В. Сычёва. О некоторых методах оценки показателя иррациональности значений функции $\arctan x$ // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 5–15.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 1.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-5-15

On some methods of evaluating irrationality measure of the function $\arctan x$ values

M. G. Bashmakona, N. V. Sycheva

Bashmakova Maria Gennadyevna —candidate of physical and mathematical sciences, Bryansk State Technical University (Bryansk).
e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru
Sycheva Nadezhda Vasilyevna —candidate of pedagogical sciences, Bryansk State Technical University (Bryansk).
e-mail: Nadegda-P-11@mail.ru

Abstract

For any irrational or transcendental number estimating of the quality of its approximation by rational fractions is one of the directions in the theory of Diophantine approximations. The quantitative characteristic of such approximation is called the measure (extent) of irrationality of the number. For almost a century and a half, scientists have developed various methods for evaluating the measure of irrationality and have obtained its values for a huge number of irrational and transcendental numbers. Various approaches have been used to obtain the estimates and these approaches improved over time, leading to better estimates. The most commonly used method for obtaining such estimates is construction of linear forms with integer coefficients, which approximate a value, and studying of its asymptotic behavior. Approximating linear forms usually are constructed on the basis of continued fractions, Padé approximants, infinite series, and integrals. Methods for studying the asymptotics of such forms are currently quite standard, but the main problem is invention of a linear form with good approximating properties.

The first estimates of the values of the arctangent function were obtained by M. Huttner in 1987 on the base of integral representation of the Gausss function. In 1993 A. Heimonen, T. Matala-Aho, K. Vaananen, using, like M. Huttner, Padé approximants for the Gaussian hypergeometric function, proved a general theorem for estimating of measures of irrationality of logarithms of rational numbers. Later, the same authors, using an approximating construction with Jacobi polynomials, obtained new estimates, in particular for the values of the function $\arctan x$. Further research used various integral constructions, which allowed to get both general methods for $\arctan x$ values and specialized methods for specific values. In the articles of E.B. Tomashevskaya, who in 2008 received a general estimate for the values of $\arctan \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, was used a complex integral with the property of symmetry of integrand. This property played an important role in obtaining the estimates, since it improved the asymptotic behavior of the coefficients of the linear form. Some integral constructions elaborated by other researchers also had different types of symmetry. In this article, we consider the main methods for estimating the values of the arctangent function, their features, research methods, and the best estimates at the moment.

Keywords: irrationality measure, linear form.

Bibliography: 26 titles.

For citation:
M. G. Bashmakova, N. V. Sycheva, 2024, “On some methods of evaluating irrationality measure of the function $\arctan x$ values” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 5–15.

1. Введение

Теория диофантовых приближений как раздел теории чисел изучает способы и качество приближения иррациональных и трансцендентных чисел рациональными дробями. Очевидно, что поскольку множество рациональных чисел всюду плотно в множестве вещественных чисел, рациональные числа содержатся в любой сколь угодно малой окрестности приближаемого значения, поэтому вопрос о качестве приближения становится содержательным, если иметь в виду приближения числа дробями с ограниченными знаменателями. Одной из характеристик качества такого приближения выступает величина, называемая мерой иррациональности. Определённая на множестве натуральных чисел q функция $\varphi(q) = \min\limits_{1 \leq b \leq q} |\gamma - \frac{p}{q}|$ где минимум берётся по множеству всех рациональных чисел $\frac{a}{b}, 1 \leq b \leq q$, называется мерой иррациональности числа γ. Эта функция ведёт себя очень нерегулярно, поэтому для неё обычно строятся оценки снизу. Чаще всего рассматривается неравенство вида $\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{\lambda}}$, где C, λ–некоторые положительные постоянные. Нижняя граница $\mu = \mu(\gamma)$ множества чисел λ с некоторой постоянной $C > 0$ при которых неравенство выполняется для любого рационального числа называется мерой (показателем) иррациональности.

Точное значение показателя иррациональности известно лишь для немногих чисел, например, из цепной дроби Эйлера для константы e следует равенство $\mu(e) = 2$, но в большинстве случаев, говоря о показателе иррациональности, имеют в виду оценку сверху. Постоянно исследуемой проблемой в рассматриваемой области является уменьшение оценок для различных величин, «борьба» идёт за лучший показатель. Наиболее часто используемый метод получения таких оценок – построение линейных форм с целыми коэффициентами, приближающих данную величину и исследование их асимптотического поведения. Приближающие линейные формы конструируется на основе цепных дробей, аппроксимаций Паде, бесконечных рядов, вещественных и комплексных интегралов. Способы исследования асимптотики таких форм в настоящее время достаточно стандартны, но построение линейной формы, обладающей хорошими приближающими свойствами, и есть главная задача. Недостаточно приблизить величину любой линейной формой с целыми коэффициентами, значения коэффициентов должны быть достаточно малы и удовлетворять определённым асимптотическим свойствам. Линейная форма, более точно приближающая данное значение, даст лучшую оценку, для усиления которой требуется с каждым разом более тонкий и специальный подход.

Показатели иррациональности для значений гипергеометрической функции, логарифмической функции, классических констант исследовались огромным количеством специалистов теории чисел различными методами, многие из которых стали уже классическими. Э.Борель был первым, кто заметил, что иррациональные числа можно классифицировать по качеству их приближения рациональными дробями. В 1899 г. он опубликовал работу, в которой получил оценку для приближения рациональными числами значения e. В дальнейшем эта тематика активно развивалась. Начиная с работы К.Зигеля 1929 г. применялись различные методы для построения рациональных приближений значений аналитических функций. В данной статье будут рассмотрены методы и оценки значений функции $\arctan x$ в различных точках, поскольку это достаточно узкая тема. Функция $\arctan x$ первоначально менее интересовала исследователей, чем, например, логарифмическая функция, так что методов для её оценки в целом значительно меньше.

2. Интегральные конструкции и методы, использовавшиеся для построения оценок значений $\arctan x$

Элементарные функции $\arctan x, \log x$ выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса следующим образом [1]:

$$\arctan z = zF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right); \log(z+1) = zF(1,1;2;-z) \tag{1}$$

где гипергеометрическая функция Гаусса $F(z)$ может быть определена как

$$F(a,b;c;z) = F_2^1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}, \tag{2}$$

$(c)_n \neq 0, -1, -2, ..., (a)_0 \neq -1, (a)_n = a(a+1)...(a+n-1), n = 1,2,3...$ В 1987 г. М.Хуттнер в работе [2] доказал общую теорему об оценках мер иррациональности значений гипергеометрической функции Гаусса вида

$$F_2^1(1, 1+\frac{1}{k}; 1+\frac{1}{k}; \varepsilon x^k),$$

где $\varepsilon = \pm 1; k \geq 2, 0 < x < 1, x^k \in \mathbb{Q}$.

Конструкция М.Хуттнера, основанная на интегральном представлении функции Гаусса, позволила получить оценки для меры иррациональности различных значений функций $\arctan x, \log x$ как частных случаев гипергеометрической функции. Например, полученная этим методом оценка М.Хуттнера для $\arctan \frac{1}{3}$ составила $\mu(\arctan \frac{1}{3}) \leq 7.703...$ Однако, условие теоремы М. Хуттнера не позволяло получить оценки для значений вида $\arctan \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ при чётных k.

В 1993 г. А.Хеймонен, Т.Матала-Ахо, К. Ваананен [3], используя, как и М.Хуттнер, в работах 1986-1987 г. аппроксимации Паде для гипергеометрической функции Гаусса, доказали общую теорему об оценках мер иррациональности логарифмов рациональных чисел. В этой работе был приведён довольно большой список результатов, улучшающих оценки М.Хуттнера. Позже, в [4], этим же авторами с помощью приближающей гипергеометрическую функцию конструкции, использующей полиномы Якоби, были получены новые оценки, в частности для значений функции $\arctan x$, например $\mu(\sqrt{7} \arctan \frac{1}{\sqrt{7}}) \leq 4.029...$ Улучшение известных результатов было достигнуто в основном за счёт применения методики сокращения простых множителей в знаменателях коэффициентов линейных форм, тем самым уменьшающей величину коэффициентов. Эта методика в дальнейшем применялась во всех возможных случаях и в настоящее время она используется постоянно для уменьшения знаменателей коэффициентов линейных форм. Основы этой методики были заложены в работах М.Хата [5] и Г.В.Чудновского [6]. Более подробную информацию можно найти в [7]. В работах [3],[4] было указано много новых конкретных оценок, послуживших важным ориентиром для дальнейших исследований. Большинство полученных в них показателей иррациональности с тех пор были улучшены другими методами.

Примерно с начала 2000-х для оценки мер иррациональности стали активно использоваться интегральные конструкции, обладающие свойством симметричности [7]. Начало этой тенденции положила работа В.Х.Салихова [8], в которой с помощью интеграла с симметричной подынтегральной функцией была улучшена оценка показателя иррациональности для $\log 3$. Чуть позже аналогичным способом В.Х.Салихов [9] получил новую оценку меры иррациональности числа π: $\mu(\pi) \leq 7.606...$ Эта классическая константа всегда вызывала интерес у исследователей, её первая оценка были получена в 1953 г. Малером, и в дальнейшем улучшалась М. Миньоттом, Г.В.Чудновским, М.Хата. Результат В.Х.Салихова значительно усиливал предыдущую оценку М.Хата и оставался лучшим до 2020 г, когда В.В.Зудилин и Д.Зейлбергер получили новую оценку $\mu(\pi) \leq 7.103...$ [10]. Эта оценка была получена на основе базовой конструкции В.Х.Салихова, но авторами был разработан специальный метод сокращения простых множителей в знаменателях, ранее никогда не применявшийся. Кроме того, был использован массивный компьютерный перебор для выбора наилучших параметров интеграла.

В дальнейшем для построения рациональных приближений симметричные интегралы стали широко распространены, на их основе было получено много новых интересных результатов, в частности для значений функции $\arctan x$. В 2009 г. Е.Б.Томашевская [11] получила ряд новых оценок для значений вида $\arctan \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}, k > 1$. Интегральная конструкция, использованная Е.Б.Томашевской, имеет вид

$$I = \frac{1}{i} \int\limits_{h-i}^{h+i} \frac{(x-h-i)^n (x-h)^{2n} (x-h+i)^n}{x^{n+1}(2h-x)^{n+1}} dx = \frac{1}{i} \int\limits_{h-i}^{h+1} R(x) dx \tag{3}$$

где $h = 2k+1, k, n \in \mathbb{N}$. Аналогично интегралам работ [8],[9] она обладает свойством симметричности подынтегральной функции вида $R(2h-x) = R(x)$, что существенно используется при разложении подынтегральной функции на простейшие дроби. Справедливо представление интеграла (3) в виде

$$I = A_1 \arctan \frac{1}{h} + r_1 + r_2, A_1, r_1, r_2 \in \mathbb{Q},$$

который, очевидно, получается при помощи разложения подынтегральной функции на простейшие дроби и последующего интегрирования. На основе этого представления строится линейная форма с целыми коэффициентами для значений вида $\arctan \frac{1}{h}, h = 2k+1, k \in \mathbb{N}$.

Исследование полученной линейной формы позволяет получить оценки для соответствующих величин, но большинство оценок, получаемых с помощью данной конструкции, совпадало с оценками М.Хуттнера [2]. Однако, за счёт изменения параметров в некоторых частных случаях и применения стандартной методики Чудновского-Хата сокращения простых множителей, Е.Б.Томашевской был получен ряд оценок, улучшивших предыдущие результаты. В частности этот метод дает оценки

$$\mu(\arctan \frac{1}{3}) \leq 6.634..., \mu(\arctan \frac{1}{5}) \leq 4.744..., \mu(\arctan \frac{1}{6}) \leq 6.240...$$

Для параметра вида $h = 2^k$ Е.Б.Томашевской была построена отдельная интегральная конструкция, обладающая симметричностью того же типа. Для оценки величин вида $\arctan \frac{1}{2^k}$ был использован интеграл

$$I = \frac{1}{i} \int\limits_{h-i}^{h+i} \frac{(x-h-i)^{kn} (x-h)^{(2k+4)n} (x-h+i)^{kn}}{x^{kn+1}(2h-x)^{kn+1}} dx; h = 2^k, k \geq 2. \tag{4}$$

Эта интегральная конструкция оказалась крайне удачной из-за большого сокращения степеней двоек, содержащихся в знаменателях. Сокращение множителей уменьшает величину коэффициентов линейной формы, тем самым улучшая её асимптотические свойства. В данном случае степени числа 2, возникающие в числителях коэффициентов, полностью уничтожают эти степени в знаменателе, то есть не требуется дополнительных множителей, чтобы сделать коэффициенты линейной формы целыми. Более того, возможны дополнительные сокращения, то есть умножение обеих частей линейной формы на 2 в отрицательной степени. Получаемые с помощью данного интеграла оценки, не улучшены до сих пор, так, в частности

$$\mu(\arctan \frac{1}{4}) \leq 5.793..., \mu(\arctan \frac{1}{8}) \leq 3.672..., \mu(\arctan \frac{1}{16}) \leq 3.068...$$

Однако, данный интеграл не давал возможности получить оценку для $\arctan\frac{1}{2}$, для этой цели Е.Б.Томашевская [12] использовала специально построенный аналогичный интеграл с симметричностью того же типа, использовавший тот факт, что $\arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{2}{9}$. Результат, полученный с помощью этого интеграла, составил $\mu(\arctan\frac{1}{2}) \leq 11.716...$

Отметим, что примерно в то же самое время с помощью подобных симметричных интегралов Е.С.Сальниковой [13] было получено много новых интересных результатов для показателей иррациональности различных значений логарифмической функции.

В 2008 г. в работе В.В.Зудилина и К.Виолы [14] была предложена интегральная конструкция, обладающая другим видом симметричности. Хотя оригинальная интегральная конструкция не давала новых оценок, но на её основе дальнейшими исследователями были построены линейные формы для приближения функций $\arctan x, \log x$. Внесение некоторых изменений в интеграл В.В.Зудилина и К.Виолы улучшило арифметические свойства коэффициентов получаемых линейных форм, что позволило усилить ряд результатов. Рассмотренный при этом интеграл, см. [15]:

$$I_n(b) = \int_0^1 \frac{(x^2 - \frac{1}{b^2})^{sn}(1-x^2)^{rn-sn}b^{rn+sn+1}dx}{(b^2-x^2)^{rn+1}} \tag{5}$$

где $r, s \in \mathbb{N}, r \geq s$ - четные, также обладает свойством симметричности, но другого вида, нежели у Е.Б.Томашевской.

Справедливо соотношение $I_n(b) = I_n(\frac{1}{b})$, что позволяет представить интеграл как линейную форму, коэффициенты которой зависят от величины $b + \frac{1}{b}$.

При выборе в качестве параметра величины $b = \sqrt{k} + \sqrt{k+1}, k \in \mathbb{N}, k > 1$, интегральная конструкция даёт приближения для величины $\sqrt{k}\log\frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1}$, а при выборе $b = i(\sqrt{k} + \sqrt{k+1}), k \in \mathbb{N}, k > 1$ - для величины $\frac{1}{\sqrt{k}}\arctan\frac{1}{\sqrt{k}}$. Во втором случае порождаемая интегралом линейная форма имеет вид

$$\frac{1}{i\sqrt{k}}I_n(k) = q_{rn}2^{\nu(k)+\alpha(k)} = B_n + A_{1n}\frac{1}{\sqrt{k}}\arctan\frac{1}{\sqrt{k}}, A_{1n}, B_n \in \mathbb{Z}$$

где $q_N = H.O.K\{1, 2, ..., N\}, \nu(k), \alpha(k)$ определяются отдельно для каждого k.

Большинство оценок, полученных с помощью данного интеграла, не улучшали предыдущих, но отдельные значения параметра, как это часто бывает, обеспечили лучшее приближение, в частности, была получена новая оценка $\mu(\arctan\frac{1}{3}) \leq 6.199...$

Обзор всех оценок, получаемых с помощью данной интегральной конструкции, можно найти в [16],[17]. Заметим, что практически все перечисленные интегральные конструкции давали общий метод построения оценок для семейства величин. Однако довольно часто исследователями строятся приближения для одного конкретного значения. Особый интерес, разумеется, представляют классические константы, например [9], значения дзета-функции [18], или такие значения как $\log 2$ [19], $\log 3$ [8], но отдельно исследуются и менее значимые величины. Так, в 2019 г. в работе [20] была построена интегральная конструкция для оценки именно величины $\arctan\frac{1}{3}$. Применяемый интеграл имел вид

$$Y(\bar{\alpha}) = \frac{1}{i}\int_3^{3+i} \frac{\prod\limits_{j=0}^{k}(P_j(x))^{\alpha_j n}dx}{x^{n+1}(6-x)^{n+1}}dx \tag{6}$$

где $k \in \mathbb{N}, \overline{\alpha} = \{\alpha_0, ..., \alpha_k\}, \alpha_j \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \alpha_j n \in \mathbb{N}, j = 0, 1, ..., k, P_j(x)-$многочлены с целыми коэффициентами, имеющие форму $P_j(x) = P_j((x-3)^2)$.

Кроме очевидной симметричности данной интегральной конструкции относительно точки $x = 3$, особую роль сыграли многочлены $P_j(x)$. Эти многочлены были построены так, чтобы улучшить приближающие свойства линейной формы, а именно уменьшить значение подынтегральной функции за счёт нулей, расположенных на линии интегрирования, и сократить знаменатели коэффициентов линейной формы за счёт своих коэффициентов. Сокращение, проведённое тем же методом, что и для интегралов работ [8], [9] достаточно стандартная процедура, но подбор многочленов и их комбинирование представляет определённые сложности. Сама идея добавления подобных многочленов в интегральную конструкцию была впервые использована в работе К.Ву и Л.Ванга [21], в которой авторы получили таким способом улучшение показателя иррациональности значения $\mu(\log 3)$, немного улучшив результат В.Х.Салихова из [8], а также построил приближения значения $\log 2$ квадратичными иррациональностями. Более подробное описание выбора таких многочленов будет рассмотрено ниже.

Поскольку данная интегральная конструкция была узкоспециализированной и подбор многочленов осуществлялся именно и только для данного значения, соответственно, полученная оценка обновила предыдущий результат и составила $\mu(\arctan\frac{1}{3}) \leq 6.096...$

Чуть позже, в работе [22] на основе интегральной конструкции Е.Б.Томашевской аналогичным методом была получена новая оценка для $\mu(\arctan\frac{1}{2})$. В базовую симметричную интегральную конструкцию были добавлены многочлены, улучшающие её арифметические свойства, и подобранные специально с учётом особенностей интеграла. Это позволило улучшить результат Е.Б.Томашевской до $\mu(\arctan\frac{1}{2}) \leq 9.272...$

Дальнейшие продвижения в этой теме, тем не менее, не использовали симметричность интеграла. В 2020 г. в работе [23] были построены специализированные интегральные конструкции для оценки величин $\arctan\frac{1}{3}, \arctan\frac{1}{5}$. Подынтегральные функции этих интегралов не имели специальной симметрии и были построены на основе интеграла, предложенного К.Ву в 2002 г. В своей работе [24] К.Ву получил ряд оценок меры линейной независимости для логарифмов рациональных чисел.

В работе [23] на основе интеграла вида

$$I_n = \frac{1}{i}\int\limits_{5-i}^{5+i} \frac{(x-5-i)^{(1-\alpha-\beta_1-\beta_2)n}(x-5+i)^{(1-\alpha-\beta_1-\beta_2)n}(P_0(x))^{\alpha n}(P_1(x))^{\beta_1 n}((P_2)^{\beta_2 n})}{x^{n+1}}dx \qquad (7)$$

где $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}, \alpha n, \beta_1 n, \beta_2 n \in \mathbb{N}$, была получена новая оценка $\mu(\arctan\frac{1}{5}) \leq 4.505...$

Очевидно, что в данной конструкции также использована идея дополнительных полиномов, улучшающих свойства линейной формы. Хотя они не обладают свойством симметричности, но служат тем же целям, что и при исследовании интегральной конструкции (6) – сокращение знаменателей коэффициентов линейной формы и уменьшение подынтегральной функции за счёт распределения своих нулей. В данном случае были выбраны следующие полиномы: $P_0(x) = (x-5)(5x-26), P_1(x) = 6x^2 - 61x + 56, P_2(x) = 11x^2 - 112x + 286$.

Можно также обратить внимание, что корни этих многочленов: $x_0 = 5, x_1 = \frac{26}{5} = 5.2$, $x_{2,3} = 5.083 \pm 0.399i, x_{4,5} = 5.090 \pm 0.287i$ лежат на линии интегрирования или близко к ней, что уменьшает подынтегральную функцию. Кроме того, свободные члены многочленов содержат степени множителей $2, 5, 13$, возникающих в знаменателях, что позволяет сократить их. Детали можно посмотреть в [23].

В этой же работе был сконструирован и аналогичный интеграл для $\arctan\frac{1}{3}$, который позволил в очередной раз улучшить оценку и получить результат $\mu(\arctan\frac{1}{3}) \leq 5.943...$

Чуть позже, подобная конструкция позволила получить новые результаты и для чётных значений знаменателя в выражениях $\arctan\frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}, k > 1$. В [25] были построены индивидуальные интегралы для приближения величин $\arctan\frac{1}{6}$, $\arctan\frac{1}{10}$. В чётном случае сокращения множителей в знаменателях происходят несколько иначе, что потребовало другого подхода, но принцип построения интеграла можно считать аналогичным.

Новые оценки $\mu(\arctan\frac{1}{6}) \leq 5.536..., \mu(\arctan\frac{1}{10}) \leq 4.465...$ усилили предыдущие результаты, принадлежавшие ранее Е.Б.Томашевской: $\mu(\arctan\frac{1}{6}) \leq 6.240..., \mu(\arctan\frac{1}{10}) \leq 4.594...$

Хотя приведённые здесь интегралы (6),(7) первоначально конструировались отдельно, все они удовлетворяли общей аналогии, так что позже эта методика была обобщена в работе [26]. Обобщённая интегральная конструкция приняла вид:

$$Y_n = \frac{1}{i} \int_{r-si}^{r+si} \frac{(x-r-si)^{(1-\alpha-\beta)n}(x-r+si)^{(1-\alpha-\beta)n}(P_0(x))^{\alpha n}(P_1(x))^{\beta n}}{x^{n+1}} dx \tag{8}$$

где $s < r, r, s \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha n, \beta n \in \mathbb{N}$, и полиномы имеют вид:

$$P_0(x) = (x-r)(rx - r^2 - s^2), P_1(x) = kx^2 - (2kr+1)x + k(r^2+s^2), k \in \mathbb{N}.$$

Легко видеть, что корни второго многочлена $x_{1,2} = \frac{1}{2k} \pm i\frac{\sqrt{4k^2s^2-4kr-1}}{2k}$, и поскольку они должны лежать вблизи линии интегрирования, существует оптимальный выбор параметра k, дающий наименьшую оценку.

Интеграл 8 порождает линейную форму вида

$$q_nY_n = A_n \arctan\frac{s}{r} + B_n, A_n, B_n \in \mathbb{Z}.$$

то есть позволяет получать оценки для некоторых значений вида $\arctan\frac{s}{r}, s, r \in \mathbb{N}, s < r$, но не для любых комбинаций параметров, поскольку во многих случаях интегралы имеют плохие асимптотические свойства, не позволяющие получить оценку.

В работе [26] был выписан ряд результатов, получаемых этим способом. Как и для любого общего метода, некоторые из этих оценок не улучшили уже имеющиеся, для некоторых величин пока нет показателей для сравнения, но, например, результат $\mu(\arctan\frac{1}{7}) \leq 3.982...$ усиливает предыдущую оценку Е.Б.Томашевской $\mu(\arctan\frac{1}{7}) \leq 4.075...$

3. Заключение

Теория рациональных приближений – область теории чисел, которая в последнее время активно развивается. Современные методы получения новых результатов по оценкам меры иррациональности, как правило, требуют не только построения соответствующей приближающей линейной формы, но применения эффективных вычислительных методов при компьютерном обсчёте и огромного перебора параметров. Увеличение мощностей современной вычислительной техники, таким образом, помогает улучшать результаты в этой области. Заметим, что совместные приближения для значений различных аналитических функций, в том числе и функции $\arctan x$ также неоднократно исследовались в разное время представителями различных научных школ, и здесь рассмотрены только случаи индивидуальных оценок.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г.,Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра//Москва: Наука, 1973. 296 с.

2. Huttner M. Irrationalité de certaines integrals hypergéométriques// Journal of Number Theory.1987. Vol. 26. P.166-178.

3. Heimonen A., Matala-Aho T.,Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function// Manuscripta Math. 1993. Vol. 81. P. 183-202.

4. Heimonen A.Matala-Aho T.,Väänänen K. An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures// Bulletin of the Australian mathematical society. 1994. Vol. 50, № 2. P. 225-243.

5. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers// Acta Arithm. 1993. Vol. LXIII, № 4. P.335-349.

6. Chudnovsky G. V. On the method of Thue-Siegel // Annals of math. 1983. Vol. 117, № 2. P. 325-382.

7. Салихов В. Х., Золотухина Е. С., Башмакова М. Г. Применение симметричных интегралов в теории диофантовых приближений: монография// Брянск: БГТУ, 2021. 124 с.

8. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады Академии наук.2007. № 417 (6). С.753-755.

9. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π.//Математические заметки. 2010. Т. 88, № 4. С.583-593.

10. Zudilin W., Zeilbergerger D. The Irrationality Measure of Pi is at most 7.103205334137... // Mosc. J. of Comb. Number Theory. 2020. Vol. 9, № 4. P. 407-419.

11. Томашевская Е. Б. О мере иррациональности числа $\ln 5 + \frac{\pi}{2}$ и некоторых других чисел//-Чебышевский сборник.2007. № 8(2). С. 97-108.

12. Томашевская Е. Б. О диофантовых приближениях значений некоторых аналитических функций: специальность 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»: дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук// Брян. гос. техн. ун-т. Брянск, 2009. 99 с. Библиогр.: с. 94-99.

13. Сальникова Е. С. Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов // Математические заметки. 2008. Т.83, № 2. С.88-96.

14. Viola C., Zudilin W. Hypergeometric transformations of linear forms in one logarithm // Func. Approx. Comment. Math. 2008. Vol. 39, № 2. P.211-222.

15. Башмакова М. Г. О приближении значений гипергеометрической функции Гаусса рациональными дробями//Математические заметки. 2010. Т.88, № 6. С.822-835.

16. Башмакова М. Г., Золотухина Е. С. О показателях иррациональности чисел вида $\sqrt{d}\ln\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$ // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 1(61). С. 29-43.

17. Башмакова М. Г., Золотухина Е. С. Об оценке меры иррациональности чисел вида $\sqrt{4k+3}\ln\frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1}$ и $\frac{1}{\sqrt{k}}\arctan\frac{1}{\sqrt{k}}$ // Чебышевский сборник. 2018. Т.19, № 2 (66). С.15-29.

18. Zudilin W. One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(11)$ is irrational //Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 2020. № 56(4). P.149-150.

19. Marcovecchio R. The Rhin-Viola method for $\log 2$ // Acta Arithm. 2009. Vol.139, № 2. pp. 147-184.

20. Салихов В. Х., Башмакова М. Г. О показателе иррациональности $\arctan\frac{1}{3}$ // Известия высших учебных заведений. Математика. 2019. № 1. С.69-75.

21. Wu Q., Wang L. On the irrationality measure of $\log 3$ // Journal of number theory. 2014. № 142. P. 264-273.

22. Салихов В. Х., Башмакова М. Г. Об оценке меры иррациональности $\arctan\frac{1}{2}$ // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 4. С.58-68.

23. Салихов В. Х., Башмакова М. Г. Об оценке меры иррациональности некоторых значений $\arctan \frac{1}{n}$ //Известия высших учебных заведений. Математика. 2020. Т.64, № 12. С.29-37.

24. Wu Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers // Math. of computation. 2002. № 72(242). P. 901-911.

25. Салихов В. Х., Башмакова М. Г. Об оценке меры иррациональности $\arctan \frac{1}{6}, \arctan \frac{1}{10}$ // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Сб. мат. XVIII междунар. конф., посв. столетию со дня рожд. проф. Б.М.Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б.Стечкина. Тула, 23-26 сент. 2020 г. Тула: ТГПУ. 2020. с. 264-266.

26. Salikhov V. Kh. Bashmakova M. G. On rational approximations for some values of $\arctan \frac{s}{r}$ for natural s and $r, s < r$.// Moscow journal of combinatorics and number theory,2022. v.11, n. 2, pp. 181-188.

REFERENCES

1. Bateman, H.,& Erdélyi, A. 1953, “Higher transcendental functions”, *New York-Toronto-London: Mc graw-hill book company, inc.*, 456 p.

2. Huttner, M. 1987. “ Irrationalité de certaines integrals hypergéométriques”, *Journal of Number Theory.*, Vol. 26, pp.166-178.

3. Heimonen, A., Matala-Aho, T.,Väänänen, K. 1993. “On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function”, *Manuscripta Math.*, Vol. 81, pp. 183-202.

4. Heimonen, A., Matala-Aho, T.,Väänänen, K. 1994. “An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures”, *Bulletin of the Australian mathematical society.*, Vol. 50, № 2, pp. 225-243.

5. Hata, M. 1993.“ Rational approximations to π and some other numbers”, *Acta Arithm.*, Vol. LXIII, № 4, pp.335-349.

6. Chudnovsky, G. V. 1983. “On the method of Thue-Siegel”, *Annals of math.* Vol. 117, № 2, pp. 325-382.

7. Salikhov, V. Kh. Zolotukhina E. S., Bashmakova M. G. 2021. “Application of symmetric integrals in the theory of Diophantine approximations: monograph”, *Bryank– BSTU*, 124 p. (in russian)

8. Salikhov, V. Kh.2007.“ On the irrationality measure of $\ln 3$ ”, *Doclady mathematics.* vol 76, issue 3, pp. 955-957.

9. Salikhov, V. Kh. 2008. “On the irrationality measure of π”, *Russian Mathematical Surveys*, vol. 63, issue 3, pp. 570–572.

10. Zudilin, W., Zeilbergerger, D. 2020. “The Irrationality Measure of Pi is at most 7.103205334137...”, *Mosc. J. of Comb. and Number Theory.* Vol. 9, № 4, pp. 407-419.

11. Tomashevskaya, E. B. 2007. “ On the measure of irrationality of the number $\ln 5 + \frac{\pi}{2}$ and some other numbers”, *Chebyshevskii sbornic.* № 8(2), p. 97-108, (in russian).

12. Tomashevskaya, E. B. 2009. “On Diophantine approximations of the values of some analytic functions: dissertation for the degree of candidate of sciences - 01.01.06 “Mathematical logic, algebra and number theory” ”, *Bryansk. BSTU.*, 99 p. (in russian).

13. Salnikova, E. S. 2008. “Diophantine approximations of $\log 2$ and other logarithms”, *Mathematical Notes.* Volume 83, Issue 3, pp 389–398.

14. Viola, C., Zudilin, W. 2008. “ Hypergeometric transformations of linear forms in one logarithm”, *Func. Approx. Comment. Math.* Vol. 39, № 2, pp.211-222.

15. Bashmakova, M. G. 2010. “Approximation of values of the Gauss hypergeometric function by rational fractions”, *Mathematical Notes.*, Vol. 88, Issue 6, pp. 785–797.

16. Bashmakova, M. G. Zolotukhina, E. S. 2017. “On irrationality measure of the numbers $\sqrt{d}\ln\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$”, *Chebyshevskii sbornic.*, Vol. 18, № 1(61), pp. 29-43. (in russian)

17. Bashmakova, M. G., Zolotukhina, E. S. 2018. “On estimate of irrationality measure of the numbers $\sqrt{4k+3}\ln\frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1}$ and $\frac{1}{\sqrt{k}}\arctan\frac{1}{\sqrt{k}}$”, *Chebyshevskii sbornic.*, Vol.19, № 2 (66), pp.15-29. (in russian)

18. Zudilin, W. 2020.“ One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(11)$ is irrational”, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk.*, № 56(4), pp.149-150.

19. Marcovecchio, R. 2009. “ The Rhin-Viola method for $\log 2$ ”, *Acta Arithm.*, Vol.139, № 2. pp. 147-184.

20. Salikhov, V. Kh., Bashmakova, M. G. 2019. “On irrationality measure of $\arctan\frac{1}{3}$ ”, *Russian mathematics.*, № 1, pp. 69-75.

21. Wu, Q., Wang, L. 2014. “On the irrationality measure of $\log 3$”, *Journal of number theory.*, № 142, pp. 264-273.

22. Salikhov, V. Kh., Bashmakova, M. G. 2019.“ On irrationality measure of $\arctan\frac{1}{2}$”, *Chebyshevskii sbornic.*, vol. 20, № 4, pp.58-68. (in russian)

23. Salikhov, V. Kh., Bashmakova, M. G. 2020. “On irrationality measure of some values of $\arctan\frac{1}{n}$.”, *Russian Mathematics.*, vol.64, № 12, pp.29-37.

24. Wu, Q. 2002. “On the linear independence measure of logarithms of rational numbers.”, *Math. of computation.*, № 72(242), pp. 901-911.

25. Salikhov, V. Kh., Bashmakova, M. G. 2020. “ On irrationality measure of $\arctan\frac{1}{6}, \arctan\frac{1}{10}$”, *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Collection of works of XVIII international Conference, dedicated to the centenary of the birth of professors B.M.Brdikhina, V.Y. Nechaeva and S.B.Stechkina.*, Tula: Tolstoy Tula state pedagogical University, pp. 264-266.(in russian)

26. Salikhov, V. Kh., Bashmakova, M. G. 2022. “On rational approximations for some values of $\arctan\frac{s}{r}$ for natural s and $r, s < r$.”, *Mosc. J. of Comb. and Number Theory.*, vol.11, no. 2, pp. 181-188.

Получено: 22.09.2023
Принято в печать: 21.03.2024