

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 511.36

УНИВЕРСАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ АЛГОРИТМА ЦЕПНОЙ ДРОБИ

А. Д. Брюно (г. Москва)

Аннотация

1. Простое обобщение. Пусть в трехмерном вещественном пространстве заданы три вещественные однородные линейные формы. Их модули дают отображение этого пространства в другое. В нем рассматривается выпуклая оболочка образов всех целочисленных точек первого пространства, кроме его начала координат. Замыкание этой выпуклой оболочки названо модульным многогранником. Наилучшие целочисленные приближения к корневым подпространствам заданных форм дают точки, образы которых лежат на границе модульного многогранника. Граница модульного многогранника вычисляется любой стандартной программой вычисления выпуклых оболочек. Алгоритм дает также периодичность для кубических иррациональностей с положительным дискриминантом. Обобщить цепную дробь пытались Эйлер, Якоби, Дирихле, Эрмит, Пуанкаре, Гурвиц, Клейн, Минковский, Вороной и многие другие.

2. Универсальное обобщение. Пусть в n -мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы l линейных и k квадратичных форм ($n = l + 2k$). Модули этих форм задают отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в положительный ортант $\mathbf{S} = \mathbb{R}_+^m$ m -мерного вещественного пространства $\mathbb{R}^m$, $m = l + k$. При этом целочисленная решётка $\mathbb{Z}^n$ в $\mathbb{R}^n$ отображается в некоторое множество $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{S}$. Замыкание выпуклой оболочки $\mathbf{H}$ множества $\mathbf{Z} \setminus 0$ является многогранным множеством. Целочисленные точки из $\mathbb{R}^n$, отображающиеся на границу $\partial\mathbf{H}$ многогранника $\mathbf{H}$, дают наилучшие диофантовы приближения к совокупности корневых подпространств t заданных форм. В алгебраическом случае, когда заданные формы определённым образом связаны с корнями многочлена степени n , доказывается, что многогранник $\mathbf{H}$ имеет $m - 1$ независимый период. Это обобщение теоремы Лагранжа о периодичности цепной дроби квадратичной иррациональности. По теореме Дирихле соответствующее поле алгебраических чисел имеет ровно $m - 1$ фундаментальных единиц. Граница $\partial\mathbf{H}$ многогранника $\mathbf{H}$ вычисляется стандартной программой вычисления выпуклых оболочек.

Ключевые слова: цепная дробь, модульный многогранник, программа вычисления выпуклого многогранника.

Библиография: 75 названий.

UNIVERSAL GENERALIZATION OF THE CONTINUED FRACTION ALGORITHM

A. D. Bruno (Moscow)

Abstract

1. Simple generalization. Let three homogeneous real linear forms be given in a three-dimensional real space. Their moduli give a mapping of the space into another space. In the second space, we consider the convex hull of images of all integer points of the first space except its origin. This convex hull is called the modular polyhedron. The best integer approximations to the root subspaces of these forms are given by the integer points whose images lie on the boundary of the modular polyhedron. For the concrete three linear forms, any part of the boundary of the modular polyhedron can be computed by means of any standard program for computation of a convex hull. The algorithm gives the best approximations, and it is periodic for cubic irrationalities with positive discriminant. It also allows to understand why matrix algorithms proposed by Euler, Jacobi, Dirichlet, Hermite, Poincare, Hurwitz, Brun, Guting and others are not universal: proper algorithm is composed from several different matrix algorithms.

2. Universal generalization. Let l linear forms and k quadratic forms ($n = l + 2k$) be given in the n -dimensional real space $\mathbb{R}^n$. Absolute values of the forms define a map of the space $\mathbb{R}^n$ into the positive orthant $\mathbf{S}$ of the m -dimensional real space $\mathbb{R}^m$, where $m = l + k$. Here the integer lattice $\mathbb{Z}^n$ in $\mathbb{R}^n$ is mapped into a set $\mathbf{Z}$ in $\mathbf{S}$. The closure of the convex hull $\mathbf{H}$ of the set $\mathbf{Z} \setminus 0$ is a polyhedral set. Integer points from $\mathbb{R}^n$, which are mapped in the boundary $\partial\mathbf{H}$ of the polyhedron $\mathbf{H}$, give the best Diophantine approximations to root subspaces of all given forms. In the algebraic case, when the given forms are connected with roots of a polynomial of degree n , we prove that the polyhedron $\mathbf{H}$ has $m - 1$ independent periods. It is a generalization of the Lagrange Theorem, that continued fractions of a square irrationality is periodic. For the certain set of the m forms, any part of the boundary $\partial\mathbf{H}$ of the polyhedron $\mathbf{H}$ can be computed by a program for computing convex hulls.

3. Main achievement. Best Diophantine approximations can be computed by a global algorithm using a standard program for computing convex hulls, instead of step-by-step computations as in the continued fraction algorithm. It gives a solution of the problem, that majority of main mathematicians of the XIX century tried to solve.

Keywords: continued fraction, modular polyhedron, program for computing convex hull.

Bibliography: 75 titles.

1. Введение

1.1. Цепная дробь

Пусть α_0 и α_1 – натуральные числа. Для нахождения их наибольшего общего делителя используется алгоритм Евклида [1] последовательного деления с остатком:

$$\alpha_0 = a_0\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 = a_1\alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_2 = a_2\alpha_3 + \alpha_4, \dots$$

где натуральные числа $a_0, a_1, a_2, \dots$ суть неполные частные. Это алгоритм разложения числа $\alpha = \alpha_0/\alpha_1$ в правильную цепную дробь [2], и он применим к любым вещественным числам α . При этом $a_0 = [\alpha]$, где $[\alpha]$ – целая часть числа α , $a_1 = [1/(\alpha - a_0)]$, $\dots$, т. е.

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \quad (1)$$

$$\text{и } \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} \\ \alpha_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \alpha_{k+1} \end{pmatrix}, \quad a_k = [\alpha_k/\alpha_{k+1}]. \quad (2)$$

Если разложение (1) оборвать на a_k и свернуть эту оборванную цепную дробь в рациональное число p_k/q_k , то получается **подходящая дробь**, которая дает наилучшее рациональное приближение к числу α . При этом

$$\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

и

$$\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_k \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \pm 1,$$

т.е. векторы (α_k, α_{k+1}) и (p_k, q_k) принадлежат сопряженным плоскостям, и пара векторов $(p_k, q_k), (p_{k-1}, q_{k-1})$ может служить базисом в одной из них. Цепные дроби (1) и соотношения (2), (3) рассматривал Валлис [3] в 1655 г. В 1737 г. Эйлер [4] дал название “непрерывная дробь” (fractio continua). Лагранж [5] доказал, что для квадратичных иррациональностей α разложение в цепную дробь периодически (и обратно), т. е. последовательность неполных частных $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$, начиная с какого-то номера, состоит из повторяющегося отрезка $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+t}$.

Итак, алгоритм разложения числа в цепную дробь:

1. прост;
2. дает наилучшие рациональные приближения к числу;
3. конечен для рационального числа;
4. периодичен для квадратичных иррациональностей [2];
5. устроен как для почти всех чисел [2] для кубических иррациональностей [37].

Кроме того, он обладает еще рядом замечательных свойств.

1.2. История обобщений

В 1775 г. Эйлер [6] сделал первую попытку обобщить алгоритм цепной дроби на векторы. Впоследствии его подход развивали Якоби [7, 8], Пуанкаре [9], Брун [10], Гютинг [67], Брюно [16, 17, 19, 21] (два алгоритма) и Парусников [16, 17], Пустыльников [13] и др. Они по аналогии с (2) строили матричные алгоритмы вида

$$A_{k+1} = C_k A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где A_k – n -мерный вектор и C_k – квадратная n -матрица с целыми элементами, которая образована по вектору A_k , и $\det C_k = \pm 1$. Эти алгоритмы просты, но, вообще говоря, не дают наилучших рациональных приближений к вектору и не всегда при $n = 3$ обладают аналогом свойства 4.:

4'. периодичность для кубических иррациональностей.

Еще Эрмит [15] критиковал алгоритм Якоби. В работах [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] было проведено сравнение качества матричных алгоритмов и было установлено, что ни один из них не обладает свойствами 2 и 4' для всех векторов A_0 . При этом оказалось, что наихудшим является алгоритм Пуанкаре [9]. В 1842 г. Дирихле [24] при $n = 3$ предложил рассматривать не трехмерный вектор $A = A_0$, а две линейные однородные формы $l_1(X)$ и $l_2(X)$ такие, что $l_1(A) = l_2(A) = 0$. В 1850 г. Эрмит [25], развивая этот подход, предложил свое обобщение цепной дроби. Наконец, в 1895–96 гг. Клейн [26], Минковский [27] и Вороной [28] независимо пришли к тому, что надо в $\mathbb{R}^3$ рассматривать тройку однородных линейных форм $l_1(X), l_2(X), l_3(X)$ и предложили свои концепции обобщения цепной дроби. При этом Клейн ограничился общими геометрическими соображениями, а Минковский и Вороной предложили конкретные алгоритмы. Впоследствии подход Клейна переоткрывали Скубенко [29] и Арнольд [30] и называли многогранники Клейна парусами и многогранниками Арнольда [31, 32, 74] соответственно. И хотя в [16] был предложен алгоритм вычисления многогранников Клейна, в [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] было выяснено, что многогранники Клейна-Скубенко-Арнольда не дают основы для хорошего алгоритма, обобщающего цепную дробь. Только алгоритмы Минковского и Вороного обладают свойствами 2 и 4' но они весьма громоздки. Их применению и развитию было посвящено много работ (см. [33, 34, 35]). Свой подход к обобщению цепной дроби предложил Гурвиц [36] в 1894 г., но без алгоритма. Интерес автора к обобщению цепной дроби возник в связи с его работой [37] 1964 г., которая была повторена Ленгом [38] в 1972 г. (см. также Старк [39]). В 2003 г. автор [40] предложил новое обобщение цепной дроби. Оно состоит в следующем.

Пусть для $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ заданы три однородные линейные формы $f_i(X)$, $i = 1, 2, 3$. Тогда в $\mathbb{R}^3$ имеются три плоскости $\mathcal{L}_i = \{X : f_i(X) = 0\}$ и три прямых $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j$. Модули форм $|f_i(X)| \stackrel{\text{def}}{=} g_i(X)$ задают отображение целочисленной решетки $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ в некоторое множество $\mathbf{Z}$ неотрицательного октанта $\mathbf{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_+^3 = \{Y : Y \geq 0\}$. Пусть $\mathbf{H}$ – выпуклая оболочка множества $\mathbf{Z}$ и $\partial\mathbf{H}$ – ее граница. Множество $\partial\mathbf{H}$ является двумерной многогранной поверхностью, состоящей из вершин, ребер и граней. При этом плоскостям $\mathcal{L}_i \subset \mathbb{R}^3$ соответствуют координатные квадранты октанта $\mathbf{S}$, а прямым $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j \subset \mathbb{R}^3$ соответствуют координатные лучи октанта $\mathbf{S}$. Наилучшим целочисленным приближением плоскостей $\mathcal{L}_i$ и прямых $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j$ в $\mathbb{R}^3$ соответствуют вершины многогранной поверхности $\partial\mathbf{H}$ в $\mathbf{S}$. Поэтому нахождение наилуч-

ших диофантовых приближений сводится к вычислению поверхности $\partial\mathbf{H}$ [73], которая была названа «модульным многогранником». Модульный многогранник является выпуклой оболочкой четырех многогранников Клейна. Для одиннадцати наборов форм $f_i(X)$, $i = 1, 2, 3$ модульные многогранники вычислены в [44] и показаны их логарифмические проекции. Свойства модульных многогранников изучены в [42, 43, 44, 45]. Оказалось, что все грани модульного многогранника являются треугольниками с вершинами $G(B_i)$, $i = 1, 2, 3$, где вектор $G(X) = (g_1(X), g_2(X), g_3(X))$. При этом $\det(B_1 B_2 B_3) = 0$ или ± 1 или ± 2 . Если коэффициенты форм $f_i(X)$ принадлежат одному кубическому полю, то поверхность $\partial\mathbf{H}$ дважды периодична. В [43, 69] был предложен алгоритм движения по поверхности $\partial\mathbf{H}$. Однако он был довольно громоздким.

1.3. Постановка задачи

Рассмотрим более общую ситуацию.

Пусть в n -мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $X = (x_1, \dots, x_n)$ заданы m однородных вещественных форм $f_1(X), \dots, f_m(X)$, которые не имеют общего корня $X \neq 0$, $2 \leq m \leq n$. Целочисленная ненулевая точка $X \in \mathbb{Z}^n \setminus 0 \subset \mathbb{R}^n$ называется **минимальной**, если нет такой другой ненулевой целочисленной точки $Y \in \mathbb{Z}^n \setminus 0 \in \mathbb{R}^n$, $Y \neq -X$, выполнены неравенства

$$|f_i(Y)| \leq |f_i(X)|, \quad i = 1, \dots, m.$$

Задача 1. Найти все минимальные точки.

Частичное решение задачи 1. Модули форм $f_i(X)$ задают отображение $G(X)$ пространства $\mathbb{R}^n$ в положительный ортант $\mathbf{S} = \mathbb{R}_+^m$ m -мерного пространства $\mathbb{R}^m$ с координатами $S = (s_1, \dots, s_m)$: $s_i = g_i(X) = |f_i(X)|$, $i = 1, \dots, m$. При этом целочисленная решетка $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ отображается в некоторое множество $\mathbf{Z} \subset \mathbf{S}$. Замыкание выпуклой оболочки $\mathbf{H}$ множества $\mathbf{Z} \setminus 0$ является выпуклым множеством. Все целочисленные точки $X \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$, отображающиеся на границу $\partial\mathbf{H}$ множества $\mathbf{H}$, являются минимальными и дают наилучшие диофантовые приближения к совокупности корней пространств m форм $f_i(X)$. Возможны минимальные точки X , образы которых $G(X) = (g_1(X), \dots, g_m(X))$ не лежат на границе $\partial\mathbf{H}$. Однако будем искать **пограничные минимальные точки** X , для которых $G(X) \in \partial\mathbf{H}$.

ПРИМЕР 1. Если $m = n = 2$, а $f_1(X)$ и $f_2(X)$ — линейные формы, то $\partial\mathbf{H}$ — выпуклая ломаная на плоскости $\mathbb{R}^2$, лежащая в $\mathbf{S} = \mathbb{R}_+^2$. Координаты x_1 и x_2 образа $X = (x_1, x_2)$ ее вершины $G = (g_1, g_2)$ — это числитель и знаменатель подходящей цепной дроби числа, равного котангенсу наклона одной из корневых прямых $f_1(X) = 0$ или $f_2(X) = 0$. Точки из $\mathbf{Z}$, лежащие на ребрах ломаной $\partial\mathbf{H}$, отсутствуют. Промежуточным дробям этой цепной дроби соответствуют не минимальные пограничные точки.

В дальнейшем ограничимся случаями, когда выпуклое множество $\mathbf{H}$ является многогранным, т.е. его граница $\partial\mathbf{H}$ состоит из вершин, ребер и граней различных размерностей и не содержит непрерывных «кривых» частей. В этих случаях граница $\partial\mathbf{H}$ вычисляется с помощью стандартных программ для вычисления выпуклых многогранников [68, 73].

Пусть иррациональные λ_1 и $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ – корни квадратного уравнения $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ с целыми коэффициентами. Тогда цепные дроби чисел λ_1 и λ_2 периодичны и ломаная $\partial\mathbf{H}$ для пары форм $f_1(X) = x_1 - \lambda_1 x_2$ и $f_2(X) = x_1 - \lambda_2 x_2$ также периодична.

ЗАДАЧА 2. Найти все периоды поверхности $\partial\mathbf{H}$, т.е. ее линейные автоморфизмы $X = TY$.

1.4. О содержании статьи

Статья состоит из трех параграфов.

В § 2 рассматривается случай трех линейных форм от трех переменных. Для этого случая определяется модульный многогранник, изучаются его свойства. Подробно рассматривается подслучай, когда коэффициенты всех форм принадлежат одному кубическому полю. В нем модульный многогранник имеет два независимых периода, которым соответствуют две фундаментальные единицы поля. Наконец, приводится 11 примеров проекций модульных многогранников на плоскость.

В § 3 обсуждается случай нескольких линейных и нескольких квадратичных форм. Определяется модульный многогранник. В алгебраическом случае он имеет столько периодов, сколько фундаментальных единиц имеет соответствующее поле. Через периоды можно вычислить эти фундаментальные единицы.

2. Модульный многогранник и его глобальные свойства

2.1. Общие свойства [69]

Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы три вещественные независимые однородные линейные формы

$$f_i(X) = \langle L_i, X \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \quad \det(L_1, L_2, L_3) \neq 0, \quad (5)$$

где $X \in \mathbb{R}^3$, $L_i = (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}) \in \mathbb{R}_*^3$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение, и пространство $\mathbb{R}_*^3$ двойственно пространству $\mathbb{R}^3$. Три линейные однородные формы (5) определяют отображение $G(X) = (g_1(X), g_2(X), g_3(X))$, где $g_i(X) = |f_i(X)|$, $i = 1, 2, 3$.

В [43] предложена следующая конструкция. Вектор-функция $G(X)$ отображает пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами X в пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами $G = (g_1, g_2, g_3)$, точнее – в его неотрицательный октант $\mathbb{R}_+^3 = \mathbf{S}$. При этом множество $\mathbb{Z}^3 \setminus 0$ всех целочисленных точек X кроме $X = 0$ отображается в некоторое множество $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{S}$. Пусть $\mathbf{H}$ – замыкание выпуклой оболочки точек множества $\mathbf{Z}$ и $\partial\mathbf{H}$ – его граница. Очевидно, что $\mathbf{H}$ – это выпуклый многогранник (точнее – многогранное множество), который назван **модульным**, и $\partial\mathbf{H}$ – это выпуклая многогранная поверхность, состоящая из вершин V_i , ребер R_i и граней Γ_i .

Пусть $V_1, V_2, V_3 \in \mathbf{Z}$ и

$$V_j = G(B_j), \quad B_j \in \mathbb{Z}^3, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Положим $\omega(V_1, V_2, V_3) = |\det(B_1 B_2 B_3)|$. Очевидно ω принимает целые неотрицательные значения. Для грани Γ_i поверхности $\partial\mathbf{H}$ определим $\omega(\Gamma_i)$ как минимум

$\omega(V_1, V_2, V_3)$ по всем тройкам точек $V_1, V_2, V_3 \in \mathbf{Z}$, лежащих на грани Γ_i и не лежащих на одной прямой, т. е. $V_1, V_2, V_3 \in \mathbf{Z} \cap \Gamma_i$ и $\det(V_1 V_2 V_3) \neq 0$. **Грань** Γ_i поверхности $\partial \mathbf{H}$ назовем **простой**, если она является треугольником с вершинами (6) и не содержит других точек из множества $\mathbf{Z}$, и **полупростой**, если она является треугольником, содержащим внутри ровно одну точку множества $\mathbf{Z}$, и имеет $\omega(\Gamma_i) = 1$. Для простой грани Γ_i с вершинами (6) имеем $\omega(\Gamma_i) = |\det(B_1 B_2 B_3)|$.

ТЕОРЕМА 1. Для граней Γ_i поверхности $\partial \mathbf{H}$ всегда $\omega(\Gamma_i) \leq 2$.

ТЕОРЕМА 2. Грань Γ_i с $\omega(\Gamma_i) = 2$ является простым треугольником.

ТЕОРЕМА 3. Если точки (6) лежат на одной грани Γ_i и $\omega(V_1, V_2, V_3) = 0$, то одна из точек B_1, B_2, B_3 является суммой двух других.

2.2. Периодичность [75, §7]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0. Унимодулярная 3×3 матрица T называется периодом поверхности $\partial \mathbf{H}$, если поверхность $\partial \tilde{\mathbf{H}}$, соответствующая формам $\tilde{f}_i(Y) = \langle L_i, Y T^* \rangle$, $i = 1, 2, 3$, переводится в $\partial \mathbf{H}$ линейным преобразованием

$$g_i = \mu_i \tilde{g}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где $\mu_i \in \mathbb{R}$ и $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1$.

Здесь звездочка означает транспонирование. Таким образом, периодичность $\partial \mathbf{H}$ означает, что для $\partial \mathbf{H}$ два линейных преобразования $X^* = T Y^*$ в $\mathbb{R}^3$ и (7) в $\mathbf{S}$ дают один и тот же результат.

Пусть u неприводимого в $\mathbb{Q}$ кубического многочлена

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c \quad (8)$$

дискриминант положительный. Тогда у него имеются три вещественных корня $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Пусть вектор L_i в форме (5) такой, что

$$(L_1^*, L_2^*, L_3^*) = R W, \quad (9)$$

где R – невырожденная матрица, а W – матрица Вандермонда для полинома (8).

ТЕОРЕМА 4. Если все коэффициенты многочлена (8) целые числа, и все элементы матрицы R рациональные, то поверхность $\partial \mathbf{H}$, соответствующая формам (7), двояко периодическая, т. е. ее логарифмическая проекция

$$n_1 = \log |f_1(X)|, n_2 = \log |f_2(X)| \quad (10)$$

инвариантна относительно двух независимых параллельных переносов.

Положим, что модуль Ω состоит из чисел $\langle L, X \rangle$, где $X \in \mathbb{Z}^3$, и числа r_1, r_2, r_3 являются генераторами модуля Ω . В соответствии с теоремой Дирихле [66, гл. II] в этом случае имеется ровно две фундаментальные единицы u и v поля $\mathbb{Q}(\lambda)$ в модуле Ω , т. е. каждая единица поля имеет форму $\zeta u^m v^n$, где $\zeta^k = 1$ и $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Следовательно, поверхность $\partial \mathbf{H}$ имеет два независимых периода $\mathcal{D}_u^*$ и $\mathcal{D}_v^*$. В логарифмической проекции каждому периоду соответствует свой параллельный перенос.

2.3. Примеры [44]

Здесь для $m = n = 3$ приводятся вычисления многогранных поверхностей $\partial\mathbf{H}$ для 11 тернарных кубических форм вида

$$h(X) = \langle L_1, X \rangle \langle L_2, X \rangle \langle L_3, X \rangle, \quad (11)$$

где $f_i(X) = \langle L_i, X \rangle$, $i = 1, 2, 3$. Десять из них, являющиеся экстремальными формами Девенпорта и Свиннертона-Дайера [62], рассматривались в [16] – [23], где для них были вычислены многогранники Клейна. Одиннадцатая форма (11) была взята из примера работы Вороного [28]. Результаты вычислений представлены в виде рисунков, где показаны логарифмические проекции (10) многогранников $\partial\mathbf{H}$ на плоскость $n_1 = \ln |f_1(X)|$, $n_2 = \ln |f_2(X)|$. Проекции вершин $V(X)$ обозначены черными кружочками и соединены проекциями ребер. В каждой из этих точек $V(X) = (|f_1(X)|, |f_2(X)|, |f_3(X)|)$ указано соответствующее значение вектора X и значение формы (11) для этого X .

Ниже каждая из этих 11 форм обсуждается в отдельном примере, и для нее приводятся начальные значения в виде многочлена (8) и таблицы

$$\begin{array}{cccccc} B_1 & f_1(B_1) & f_2(B_1) & f_3(B_1) & a_1 & f_i(B_1) \\ B_2 & f_1(B_2) & f_2(B_2) & f_3(B_2) & a_2 & f_i(B_2) \\ B_3 & f_1(B_3) & f_2(B_3) & f_3(B_3) & a_3 & f_i(B_3) \end{array}$$

где B_1, B_2, B_3 – исходный базис, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $f_1(A) = f_2(A) = 0$, $f_i(B_j)$ точные значения. Во всех случаях поверхность $\partial\mathbf{H}$ просчитывается алгоритмом для вычисления выпуклого многогранника и имеет 2 независимых периода, которым в логарифмической проекции соответствуют параллельные переносы. Указываются фундаментальные области Φ относительно группы этих переносов.

ПРИМЕР 2. Форма h_1 .

Согласно [16, 17], начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1$,

(1,0,0)	1	1	1	1	1
(0,1,0)	-1.24697960	1.80193773	0.44504187	0.44504187	$-\lambda_{i+2}$
(0,0,1)	-0.55495813	-2.24697960	0.80193774	0.80193774	$-1 - \lambda_{i+1}$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 1. Фундаментальная область Φ состоит из двух треугольников

$$G_1 = \{G(1, 0, 0), G(0, 1, 0), G(0, 0, 1)\}, \quad G_2 = \{G(1, 0, 0), G(0, 0, 1), G(1, 0, 1)\}. \quad (12)$$

ПРИМЕР 3. Форма h_2 .

Согласно [16, 17], начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 1$,

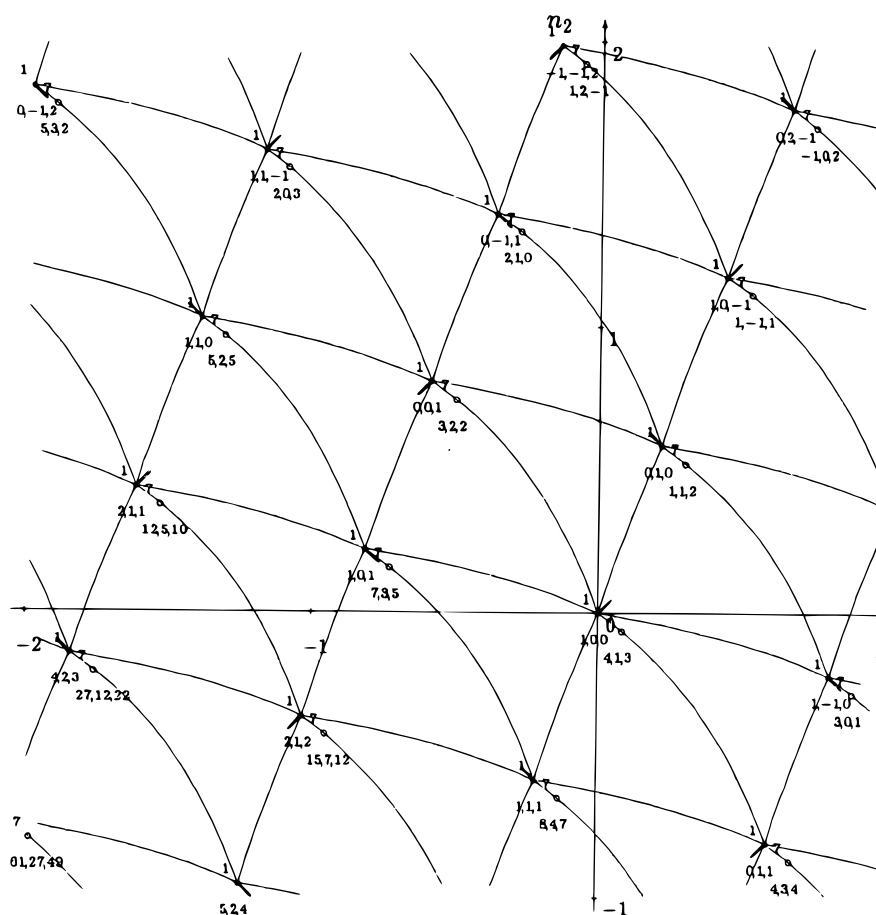


Рис. 1: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы h_1 .

$(1,0,0)$	1	1	1	1	1
$(0,1,0)$	-1.87938524	1.53208889	0.34729636	0.34729636	$-\lambda_{i+2}$
$(0,0,1)$	-0.65270364	-2.87938524	0.53208889	0.53208889	$-1 - \lambda_{i+1}$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 2. Фундаментальная область Φ состоит из двух треугольников (12).

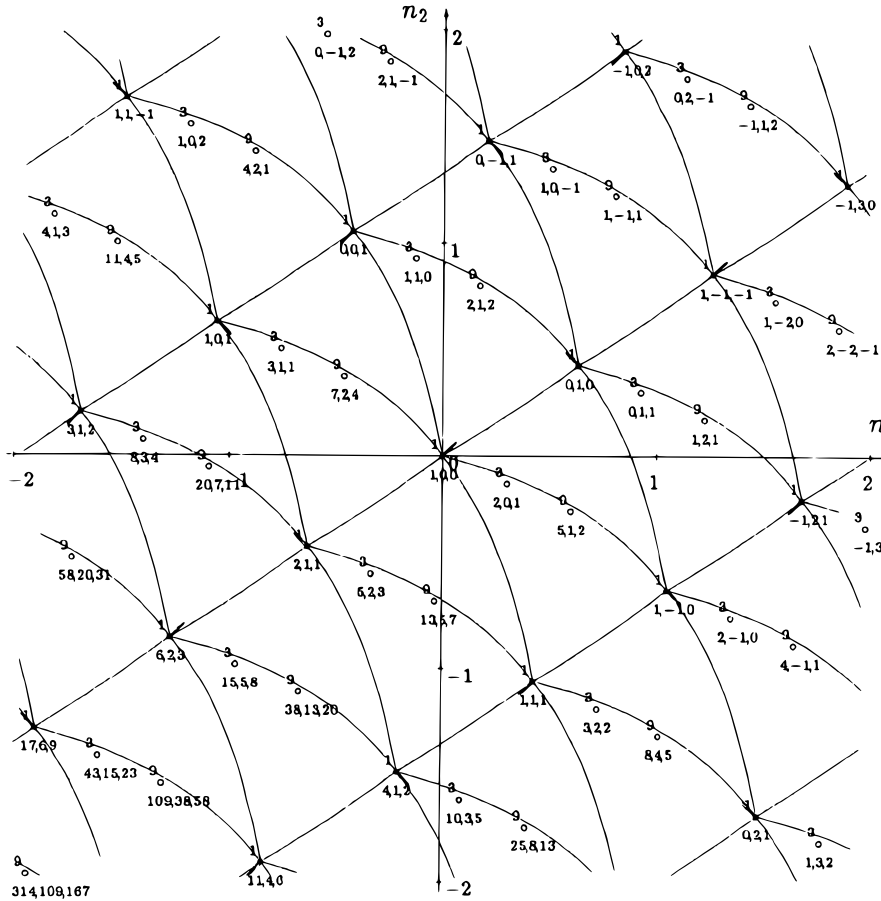


Рис. 2: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы h_2 .

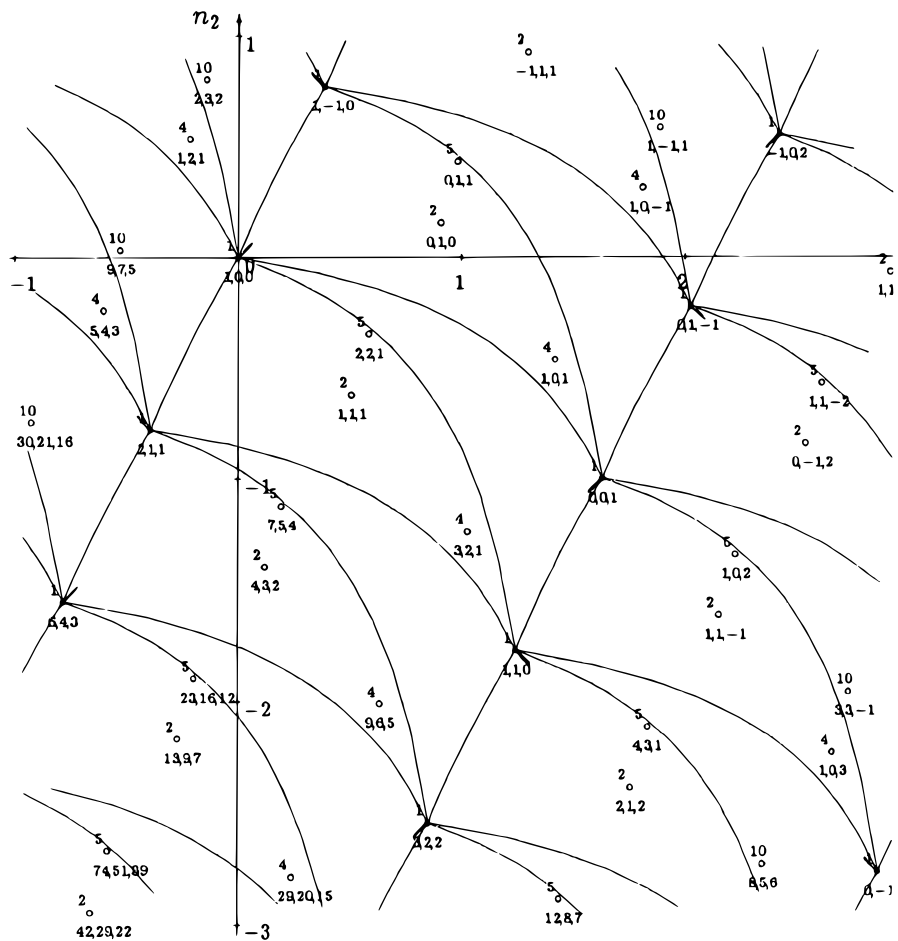
ПРИМЕР 4. Форма h_3 .

Согласно [18], начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 1$,

$(1,0,0)$	1	1	1	1	1
$(0,1,0)$	2.48119430	-1.17008647	0.68889218	0.68889218	$\frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i}$
$(0,0,1)$	-5.15632517	-0.369102386	0.52542756	0.52542756	$\frac{\lambda_i^2 - 3\lambda_i + 1}{\lambda_i}$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial \mathbf{H}$ показана на рис. 3. Фундаментальная область Φ состоит из двух треугольников

$$\Gamma_1 = \{G(1, 0, 0), G(0, 1, 0), G(0, 0, 1)\}, \quad \Gamma_2 = \{G(1, 0, 0), G(1, 1, 0), G(2, 1, 1)\}. \quad (13)$$



ПРИМЕР 5. Форма bg .

Согласно [20], ее начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda - 1$,

$(1,0,0)$	1	1	1	1	1
$(0,1,0)$	0.87891770	-0.13776296	8.25884526	8.25884526	$7 + 9\lambda_i + \lambda_i^2$
$(0,0,1)$	-7.25884526	0.121082302	1.13776296	1.13776296	$\lambda_i + 1$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 4. Фундаментальная область Φ состоит из двух треугольников

$$\Gamma_1 = \{G(1, 0, 0), G(0, 1, 0), G(0, 0, 1)\}, \quad \Gamma_2 = \{G(0, 1, 0), G(0, 0, 1), G(0, 1, 1)\}. \quad (14)$$

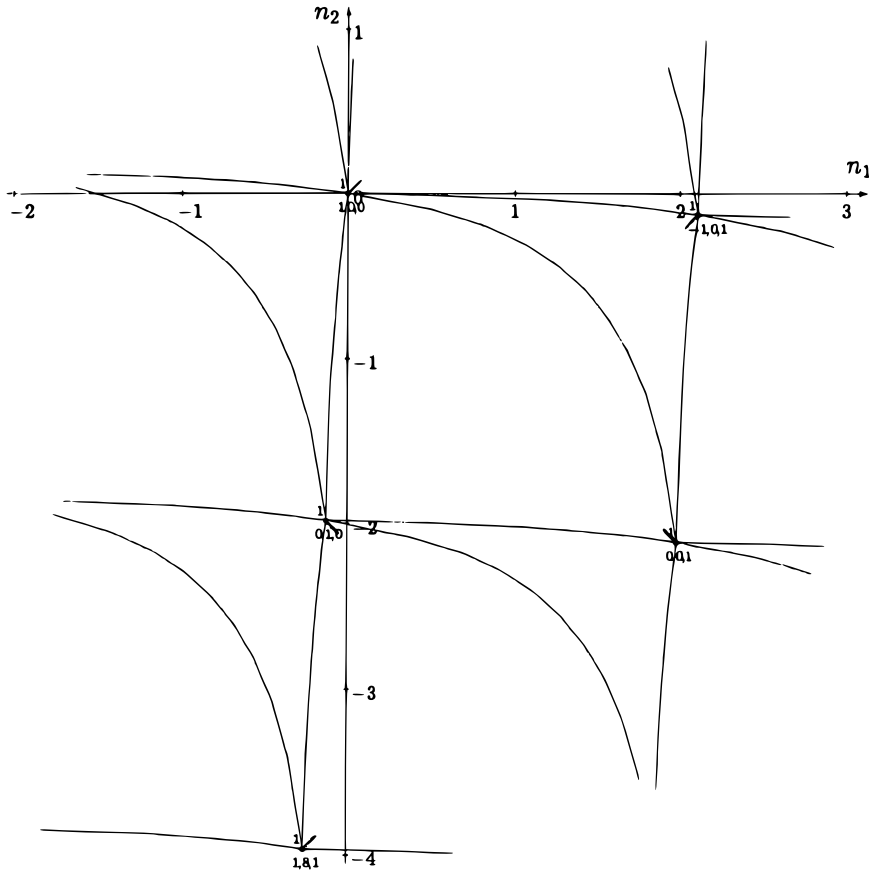


Рис. 4: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы bg .

ПРИМЕР 6. Форма h_4 .

Согласно [19], ее начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda - 1$,

(1,0,0)	1	1	1	1	1
(0,1,0)	1.90687424	-2.92775456	-0.17911967	1.51261571	$\frac{-3+15\lambda_i+2\lambda_i^2}{5}$
(0,0,1)	-0.67598551	0.59666387	2.47932164	5.74622955	$\frac{11+10\lambda_i+\lambda_i^2}{5}$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 5. Фундаментальная область ограничена вершинами $G(1,1,4)$, $G(0,0,1)$, $G(1,0,0)$, $G(0,-1,0)$, $G(-5,-1,2)$, $G(3,1,-1)$, $G(-1,0,1)$, $G(1,1,3)$ и состоит из 9 треугольников.

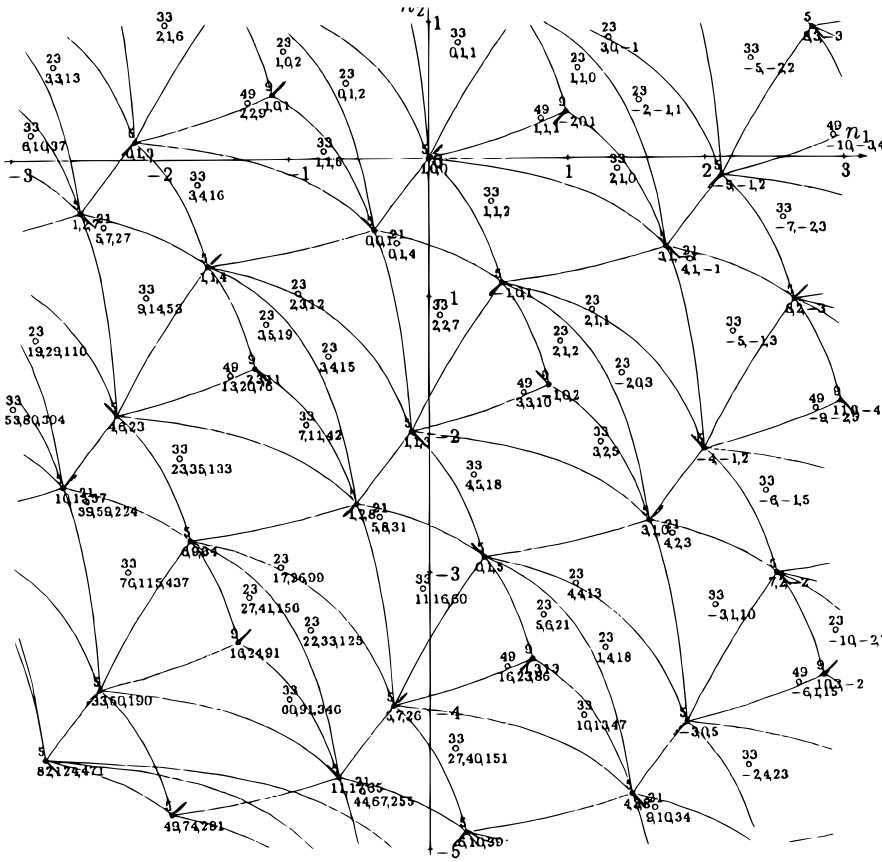


Рис. 5: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы h_4 .

ПРИМЕР 7. Форма $\tilde{h}_4$, сопряженная к h_4 .

Согласно [19], ее начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda - 1$,

$(1,0,0)$	1	1	1	1	1
$(0,1,0)$	0.26323621	-0.68494283	1.51261571	-0.17911967	$\frac{13+26\lambda_i+3\lambda_i^2}{11}$
$(0,0,1)$	-0.38431852	-0.452820124	5.74622955	2.47932164	$\frac{53+73\lambda_i+8\lambda_i^2}{11}$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 6. Фундаментальная область поверхности $\partial\mathbf{H}$ состоит из 4 треугольников

$$\Gamma_1 = \{G(2, -5, 1), G(-1, 1, 0), G(-1, -3, 1)\}, \quad \Gamma_2 = \{G(2, -5, 1), G(-1, 1, 0), G(0, 1, 0)\},$$

$$\Gamma_3 = \{G(0, 1, 0), G(-1, 1, 0), G(-1, -3, 1)\},$$

$$\Gamma_4 = \{G(0, 1, 0), G(-1, -3, 1), G(-1, -2, 1)\}.$$

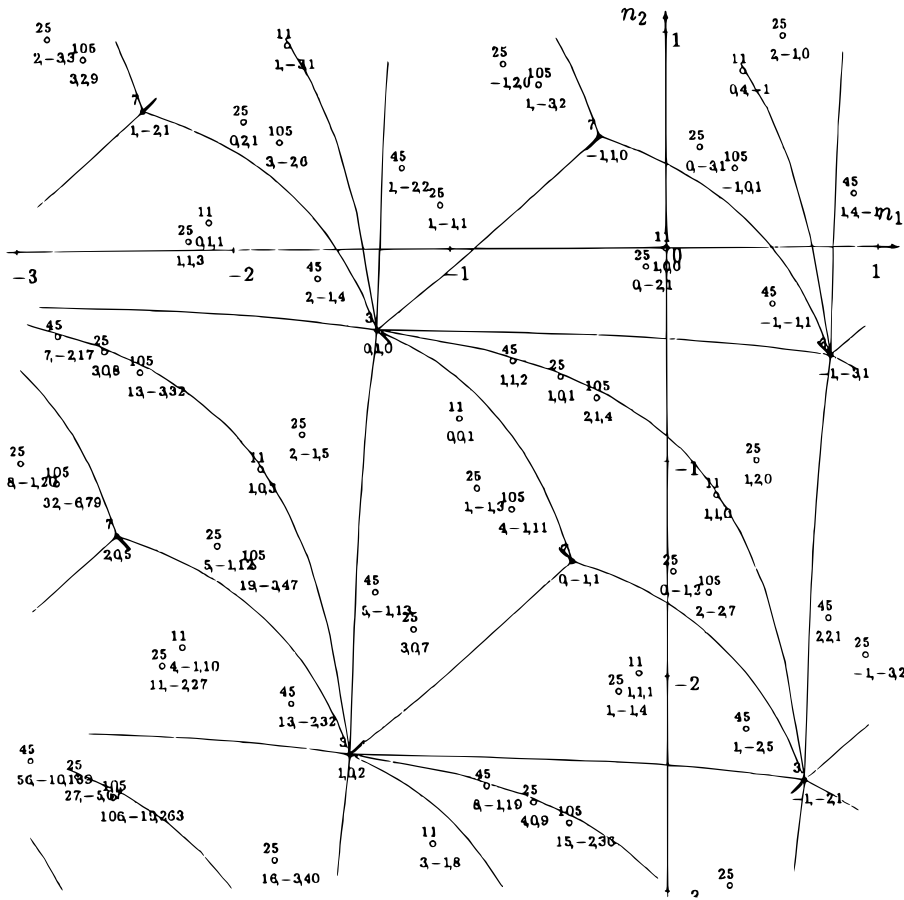


Рис. 6: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы $\tilde{h}_4$.

ПРИМЕР 8. Форма h_5 .

Согласно [21, 61], ее начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 1$,

(1,0,0)	1	1	1	1	1
(0,1,0)	0.72610945	-0.37720285	3.65109341	3.65109341	$-1 + 2\lambda_i + \lambda_i^2$
(0,0,1)	-2.65109341	0.273890555	1.37720285	1.37720285	λ_i

Логарифмическая проекция поверхности $\partial \mathbf{H}$ показана на рис. 7. Фундаментальная область Φ состоит из двух треугольников

$$\Gamma_1 = \{G(1, 0, 0), G(0, 1, 0), G(0, 0, 1)\}, \quad \Gamma_2 = \{G(0, 1, 0), G(0, 0, 1), G(0, 1, 1)\}. \quad (15)$$

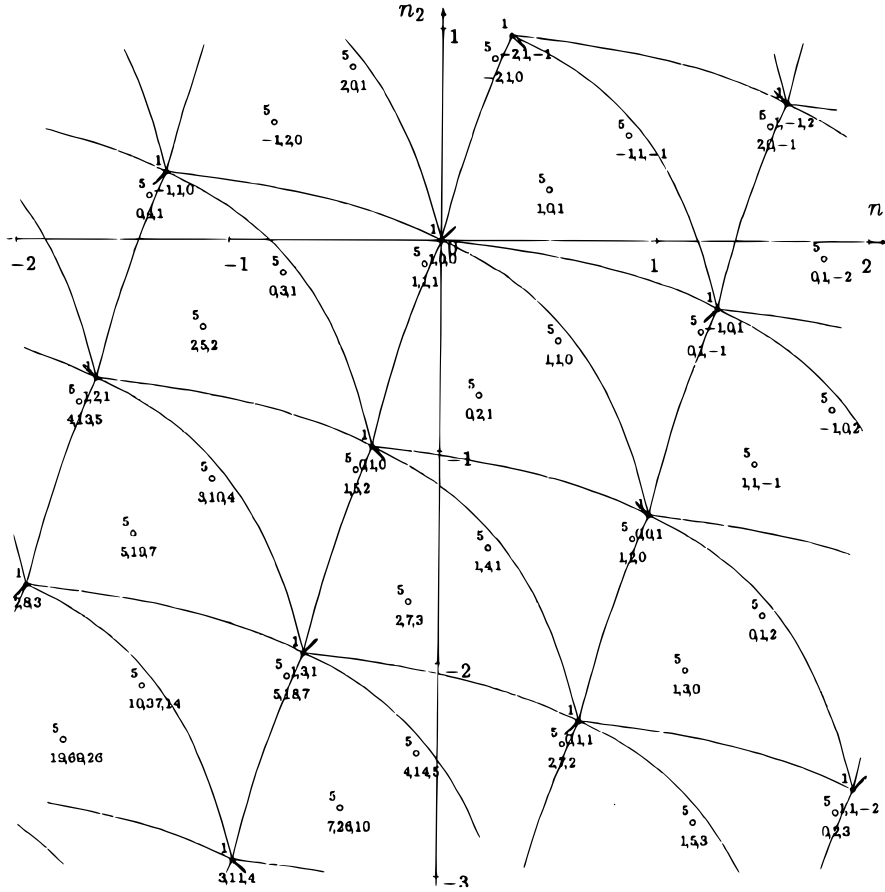
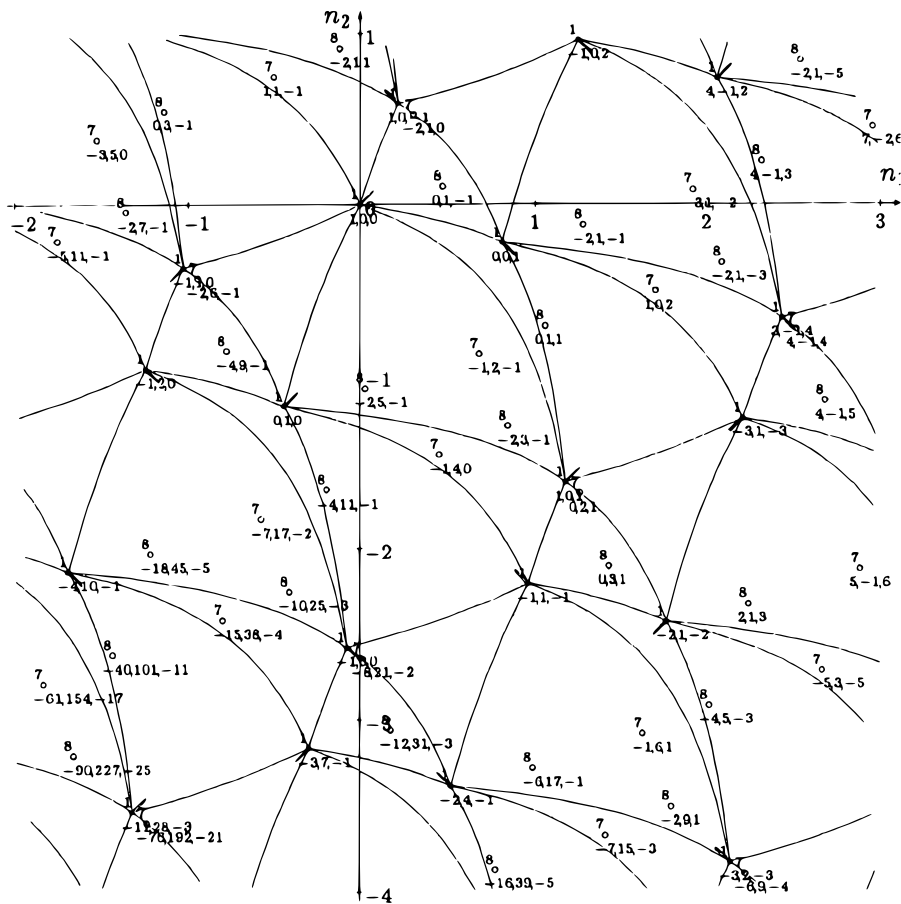


Рис. 7: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы h_5 .

ПРИМЕР 9. Форма h_6 .

Согласно [22, 61], ее начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 25\lambda - 1$,

(1,0,0)	1	1	1	0.23382690	1
(0,1,0)	3.88530978	-0.24362329	1.35831350	0.12322591	$\frac{-5+3\lambda_i+2\lambda_i^2}{21}$
(0,0,1)	-2.24362329	-0.64168650	1.88530978	0.31761024	$\frac{-13+12\lambda_i+\lambda_i^2}{21}$


 Рис. 9: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы h_7 .

ПРИМЕР 11. Форма $\tilde{h}_7$ сопряженная к h_7 .

Согласно [23], ее начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 1$,

(1,0,0)	0.30141661	0.78485132	-0.08626792	1
(0,1,0)	-0.09692113	-0.12085868	0.21777981	5.04891734
(0,0,1)	0.33863849	-0.31470094	-0.02393754	0.55495813

Здесь матрица $\{f_i(B_j)\}$ обратна матрице $\{f_i(B_j)\}$ примера 10.

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 10. Фундаментальная область Φ состоит из двух треугольников $\Gamma_1 = \{G(-1, 0, 1), G(0, 0, 1), G(0, 1, 0)\}$ и $\Gamma_2 = \{G(-1, 0, 1), G(0, 1, 0), G(1, 3, 0)\}$.

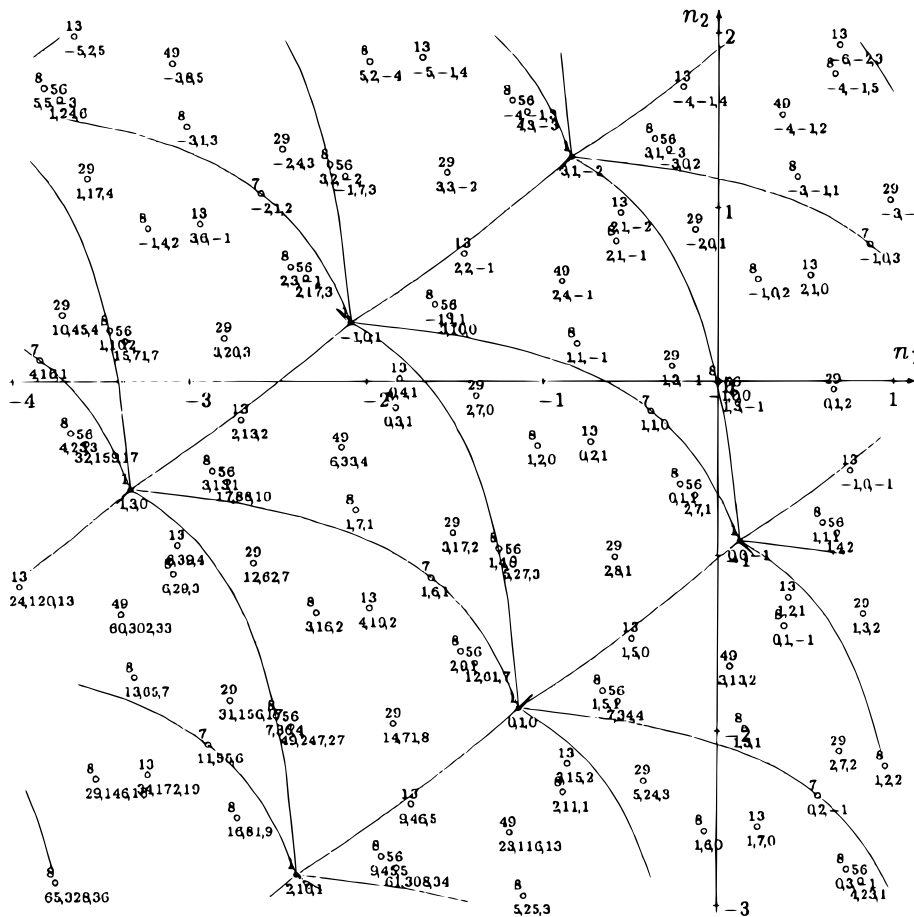


Рис. 10: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы $\tilde{h}_7$.

ПРИМЕР 12. Форма Вороного.

В [28, § 53] рассмотрена форма (11), где $L_i = (1, \lambda_i, (\lambda_i + \lambda_i^2)/2)$, $i = 1, 2, 3$, а λ_i – корни уравнения $\lambda^3 - 7\lambda - 2 = 0$. Начальные данные суть $p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda - 2$,

(1,0,0)	1	1	1	0.79184956	1
(0,1,0)	-2.48928857	-0.28916855	2.77845712	1.95640956	λ_i
(0,0,1)	1.85363451	-0.10277505	5.24914054	2.20012002	$(\lambda_i + \lambda_i^2)/2$

Логарифмическая проекция поверхности $\partial\mathbf{H}$ показана на рис. 11. Фундаментальная область Φ ограничена вершинами $G(1,0,0)$, $G(0,1,0)$, $G(0,0,1)$, $G(2,5,6)$, $G(1,1,2)$, $G(1,1,1)$ и состоит из 6 треугольников.

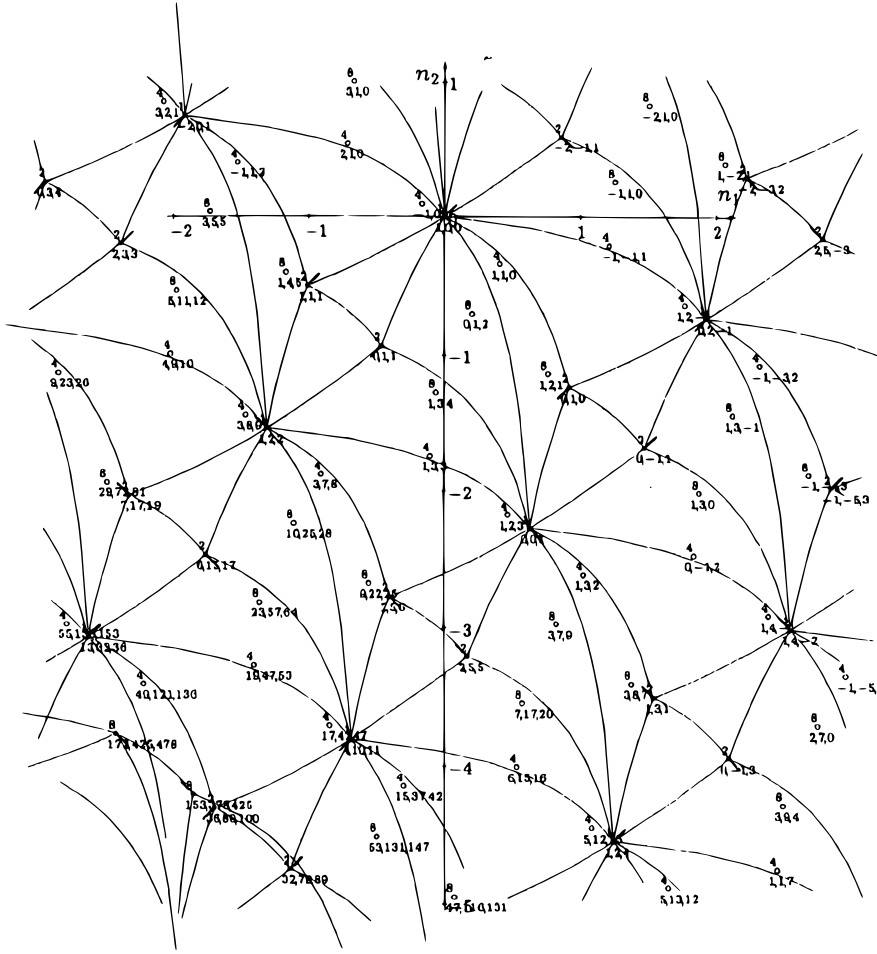


Рис. 11: Логарифмическая проекция модульного многогранника для формы Вороного.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Формы h_1, h_2, h_3, b_d и h_5 являются самосопряженными. Поэтому для них и их сопряженных форм $\tilde{h}$ многогранники $\partial\mathbf{H}$ и $\partial\tilde{\mathbf{H}}$ совпадают и устроены

просто. Формы h_4, h_6, h_7 и форма Вороного не являются самосопряженными. Они отличаются от своих сопряженных форм; отличаются и их многогранники $\partial\mathbf{H}$, $\partial\tilde{\mathbf{H}}$, которые устроены сложнее. Здесь приведены многогранники для сопряженных форм $\tilde{h}_4$ и $\tilde{h}_7$, но отсутствуют многогранники для форм, сопряженных к h_6 и Вороного.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Неудача попыток найти единый матричный алгоритм вызван тем, что в сложных (несамосопряженных) случаях переходы от граней с $\omega = 1$ к другим таким же граням дается последовательностью разных матричных алгоритмов. Только в самосопряженных случаях можно обойтись каким-то одним матричным алгоритмом.

3. Многомерный случай [70]

3.1. Модульный многогранник

Пусть в $\mathbb{R}^n = \{X\}$, $X = (x_1, \dots, x_n)$ заданы l линейных форм

$$f_i(X) = \langle L_i, X \rangle, \quad i = 1, \dots, l \quad (16)$$

и k квадратичных форм

$$f_{l+j}(X) = \langle K_j, X \rangle \langle \bar{K}_j, X \rangle, \quad j = 1, \dots, k, \quad (17)$$

$$l, k \geq 0, \quad l + 2k = n, \quad l + k = m \geq 2. \quad (18)$$

Здесь L_i — n -мерные вещественные векторы-строки, K_j — n -мерные комплексные векторы-строки, $\langle L_i, X \rangle$ означает скалярное произведение и черта сверху означает комплексное сопряжение. Очевидно, $m \leq n$. Предположим, что набор форм (16), (17) невырожден, т. е.

$$\det(L_1^*, \dots, L_l^*, K_1^*, \dots, K_k^*, \bar{K}_1^*, \dots, \bar{K}_k^*) \neq 0. \quad (19)$$

Здесь звездочка $*$ означает транспонирование, т. е. L_i^* и K_j^* векторы-столбцы.

Положим

$$g_i(X) = |f_i(X)|, \quad i = 1, \dots, m, \quad (20)$$

и

$$G(X) = (g_1(X), \dots, g_m(X)). \quad (21)$$

Целочисленная точка $X \in \mathbb{Z}^n$ называется минимальной или **наилучшим (диофантовым) приближением** к корневым подпространствам

$$\mathcal{L}_i = \{X : f_i(X) = 0\}, \quad i = 1, \dots, l + k = m, \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad (22)$$

совокупности форм (16), (17), если нет $Y \in \mathbb{Z}^n$, $Y \neq 0$, $Y \neq -X$:

$$G(Y) \leq G(X). \quad (23)$$

В частности, если $n = 2$, $l = 0$ и $k = 1$, то этот случай не рассматривается, ибо $m = k + l = 1 < 2$, что противоречит (18).

Предлагается изучить структуру наилучших целочисленных приближений $X \in \mathbb{Z}^n$ к корневым подпространствам (22) форм (16), (17) с помощью следующего подхода [69, 70].

Формулы (20), (21) задают отображение n -мерного пространства $\mathbb{R}^n = \{X\}$ в неотрицательный ортант $\mathbf{S} = \{S \geq 0\}$ m -мерного пространства $\mathbb{R}^m = \{S\}$. При этом корневые подпространства (22) из $\mathbb{R}^n$ отображаются в координатные подпространства в $\mathbf{S}$, а целочисленные точки $X \neq 0$, т.е. $X \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, отображаются в некоторое множество $\mathbf{Z} \subset \mathbf{S}$. Пусть $\mathbf{H}$ – замыкание выпуклой оболочки множества $\mathbf{Z}$. Согласно определению 0 наилучшим целочисленным приближениям $X \in \mathbb{Z}^n$ корневым подпространств (22) соответствуют точки $G(X)$ множества $\mathbf{Z}$, лежащие на границе $\partial\mathbf{H}$ многогранного множества $\mathbf{H}$.

Вершины, ребра и грани любых размерностей для $\partial\mathbf{H}$ вычисляются стандартной программой вычисления выпуклых оболочек [73] для $m \leq 14$ или [68] для любого m . Точки из $\mathbf{Z} \cap \partial\mathbf{H}$, отличные от вершин, также находятся. Они являются пограничными минимальными точками. Не пограничные минимальные точки этим подходом не отлавливаются.

3.2. Периодичность модульного многогранника

Рассмотрим линейное преобразование

$$X = D\tilde{X} \quad (24)$$

исходных координат, где D – неособая квадратная n -матрица. Напомним, что матрица D называется **унимодулярной**, если все её элементы – целые и $\det D = \pm 1$. Унимодулярная матрица D является **периодом** модульного многогранника $\mathbf{H}$, если линейному преобразованию (24) соответствует диагональное линейное преобразование

$$g_i = \mu_i \tilde{g}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \mu_1 \dots \mu_m = 1 \quad (25)$$

между многогранниками $\mathbf{H}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$, где $\tilde{g}_i = g_i(\tilde{X})$, или между их частями.

Пусть неприводимый в $\mathbb{Q}$ многочлен

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (26)$$

с целыми коэффициентами $a_i \in \mathbb{Z}$ имеет l вещественных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ и k пар комплексно сопряжённых корней $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_{l+k}, \bar{\lambda}_{l+1}, \dots, \bar{\lambda}_{l+k}$, $l + 2k = n$. Здесь $l \geq 0$, $k \geq 0$, но нам нужно чтобы $k + l \geq 2$. Пусть W – соответствующая матрица Вандермонда, R – неособая матрица с рациональными элементами и

$$(L_1^*, L_2^*, \dots, L_l^*, K_1^*, K_2^*, \dots, K_k^*, \bar{K}_1^*, \bar{K}_2^*, \dots, \bar{K}_k^*) = RW, \quad (27)$$

где звёздочка означает транспонирование, т.е. L_i^* – вектор-столбец. Рассмотрим $m = k + l$ форм

$$\begin{aligned} f_i(X) &= \langle L_i, X \rangle, & i &= 1, \dots, l, \\ f_{l+j}(X) &= \langle K_j, X \rangle \langle \bar{K}_j, X \rangle, & j &= 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (28)$$

ТЕОРЕМА 5. *Соответствующая формам (28) гиперповерхность $\partial\mathbf{H}$ размерности $m - 1$ имеет ровно $m - 1$ независимых периодов.*

Согласно теореме Дирихле [66] поле $\mathbb{Q}(\lambda)$ имеет ровно $m - 1$ независимых фундаментальных единиц. Следовательно, многогранная гиперповерхность $\partial\mathbf{H}$ размерности $m - 1$ имеет ровно $m - 1$ независимых периодов, произведение степеней которых не равно тождественному преобразованию. Алгоритмы, обобщающие цепную дробь, позволяют находить многогранники $\mathbf{H}$. По многогранникам $\mathbf{H}$ находятся их периоды и по ним — фундаментальные единицы поля $\mathbb{Q}(\lambda)$ (см. [66]–[68], также [70, 71, 72, 73]).

Теперь один из векторов L_i , $i = 1, \dots, l$ или K_j , $j = 1, \dots, k$ в (27) заменим произвольным вектором L'_i или K'_j с сохранением вещественности или комплексности вектора L_i или K_j и свойства невырожденности (19), и вместо формы $f_i(X)$ рассмотрим форму

$$f'_i(X) = \langle L'_i, X \rangle, \text{ если } i \leq l,$$

$$f'_i(X) = \langle K'_{i-l}, X \rangle \langle \bar{K}'_{i-l}, X \rangle, \text{ если } i > l.$$

Пусть пересечение U корневых подпространств $\mathcal{L}_j$ всех нештрихованных форм ($j \neq i$) отлично от нуля, а пересечение подпространства U с корневым подпространством $\mathcal{L}'_i$ формы $f'_i(X)$ состоит только из нуля $X = 0$. Тогда поверхность $\partial\mathbf{H}'$, соответствующая $m - 1$ старым нештрихованным формам и одной штрихованной форме, будет $m - 1$ периодической вблизи подпространства U . Это обобщение теоремы Лагранжа о периодичности цепной дроби для квадратичной иррациональности.

4. Заключение

Наилучшие диофантовые приближения можно вычислять посредством глобального алгоритма, использующего стандартную программу вычисления выпуклых оболочек, вместо пошаговых вычислений как в алгоритме цепной дроби. Это дает решение проблемы, которую пытались решить большинство ведущих математиков XIX века.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Венков Б. А. Элементарная теория чисел. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
2. Хинчин А. Я. Цепные дроби. 3-е изд. М.: Физматгиз, 1961.
3. Wallis J. A. Arithmetica infinitorum, 1655.
4. Euler L. De fractinibus continuis // Comm. Acad. Sci. Imper. Petropol. 1737. V. 9.
5. Lagrange J. L. Complement chez Elements d'algebre etc. par M. L. Euler. T. III. 1774.
6. Euler L. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // Petersburger Akademie Notiz. Exhib. August 14, 1775 // Commentationes arithmeticae collectae. V. II. St. Petersburg. 1849. P. 99–104.
7. Jacobi C. G. J. Allgemeine Theorie der Kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // J. Reine Angew. Math. 1868. V. 69. P. 29–64. // Gesammelte Werke, Bd. IV. Berlin: Reimer, 1891. P. 385–426.

8. Jacobi C. G. J. Ueber die Auflösung der Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = f_n$ // J. Reine Angew. Math. 1868. V. 69. P. 21–28.
9. Poincare H. Sur une generalization des fractionés continues // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1884. V. 99. P. 1014–1016.
10. Brun V. En generalisation av Kjedefbroken // Skrifter utgit av Videnskapsselskapeti Kristiania. I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse 1919. 1920. № 6.
11. Perron O. Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Ketten-bruchalgorithmus // Math. Ann. 1907. V. 64. P. 1–76.
12. Bernstein L. The Jacobi-Perron algorithm — its theory and application. LNM 207. Berlin/Heidelberg/New York: Springer Verlag, 1971.
13. Пустыльников Л. Д. Обобщенные цепные дроби и эргодическая теория // УМН. 2003. Т. 58. № 1. С. 113–164.
14. Schweiger F. Multidimensional Continued Fractions. Oxford Univ. Press: New York, 2000.
15. Hermite Ch. Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. T. II, lettres 232, 238, 408. Gauthier-Villars, Paris, 1905.
16. Брюно А. Д., Парусников В. И. Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 4. С. 9–27.
17. Брюно А. Д., Парусников В. И. Сравнение разных обобщений цепных дробей // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 339–348.
18. Parusnikov V. I. Klein polyhedra for complete decomposable forms // Number theory. Dvophantine, Computational and Algebraic Aspects. Editors: K. Györy, A. Pethő and V. T. Sós. De Gruyter. Berlin, New York. 1998. P. 453–463.
19. Парусников В. И. Многогранники Клейна для четвертой экстремальной кубической формы // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 1. С. 110–128.
20. Парусников В. И. Многогранники Клейна с большими гранями // Препринт № 93. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 1997.
21. Парусников В. И. Многогранники Клейна для пятой экстремальной кубической формы // Препринт № 69. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 1998.
22. Парусников В. И. Многогранники Клейна для шестой экстремальной кубической формы // Препринт № 69. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 1999. 31 с.
23. Парусников В. И. Многогранники Клейна для седьмой экстремальной кубической формы // Препринт № 79. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 1999. 32 с.
24. Lejeune Dirichlet G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // S.- B. Press. Akad. Wiss. 1842. S. 93–95 // Werke. Bd. I. Berlin: Reimer, 1889. P. 635–638.

25. Hermite Ch. Lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur differents objets de la theorie des nombres // J. Reine Angew. Math. 1850. Bd. 40. P. 261- 315 // Oeuvres, T. I, Paris: Gauthier-Villares. 1905. P. 100–163 // Opusculum Mathematica de Jacobi. V. II.
26. Klein F. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung // Nadir. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1895. № 3. P. 357–359.
27. Minkowski H. Generalisation de le theorie des fractions continues / Ann. Sci. Ec. Norm. Super, ser III, 1896, t. 13, p. 41–60. Also in: Gesamm. Abh. I. P. 278- 292.
28. Вороной Г. Ф. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей. Варшава: Из-во Варш. Ун-та, 1896. Также: Собр. соч. в 3-х томах. Киев: Из-во АН УССР, 1952. Т. 1. С. 197–391.
29. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимых кубических форм от трех переменных // Записки научных семинаров Ленинградского отделения математич. ин-та им. Стеклова (ЛОМИ). 1988. Т. 168. С. 125–139.
30. Арнольд В. И. Цепные дроби. М.: МЦНМО, 2001.
31. Lachaud G. Polyèdre d'Arnol'd et voile d'un cône simplicial: analogues du théorème de Lagrange // C.R. Acad. Sei. Ser. 1. 1993. V. 317. P. 711–716.
32. Lachaud G. Polyèdre d'Arnol'd et voile d'un cône simplicial, analogues du théorème de Lagrange pour les irrationnels de degré quelconque. Prétirage N 93–17. Marseille: Laboratoire de Mathématiques Discretes du C.N.R.S., 1993.
33. Brentjes A. J. Multi-dimensional Continued Fraction Algorithms. Mathematical Centre Tracts 145, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1981.
34. Buchmann J. On the period length of the generalized Lagrange algorithm // J. Number Theory. 1987. V. 26. P. 8–37.
35. Быковский В. А. Теорема Валена для двумерных подходящих дробей // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 1. С. 30–37.
36. Hurwitz A. Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche // Math. Ann. 1894. Bd. 44. P. 417–436.
37. Брюно А. Д. Разложения алгебраических чисел в цепные дроби // Журнал вычислительной матем. и матем. физики. 1964. Т. 4. № 2. С. 211–221.
38. Lang S., Trotter H. Continued fractions of some algebraic numbers // J. Reine Angew. Math. 1972. Bd. 252. P. 112–134.
39. Старк Х. М. Объяснение некоторых экзотических непрерывных дробей, найденных Бриллихартон // Вычисления в алгебре и теории чисел (ред. Б.Б. Венков и Д.К. Фаддеев). М.: Мир, 1976. С. 155–171.
40. Minkowski H. Über die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen // Math. Annalen. 1901. B. 54. P. 91–124. Also in: Gesamm. Abh. I. P. 320–352.

41. Pipping N. Zur Theorie der Diagonalkettenbrüche // Acta Acad. Aboens., 1924. В. 3. 22 S.
42. Нечаев В. И. Диагональная цепная дробь // Математ. Энциклоп. М.: Советская Энциклоп. 1979. Т. 2. С. 123.
43. Брюно А. Д. Правильное обобщение цепной дроби // Препринт № 86. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2003. 17 с.
44. Брюно А. Д., Парусников В. И. Многогранники модулей троек линейных форм // Препринт N 93. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2003. 20 с.
45. Брюно А. Д. К обобщениям цепной дроби // Препринт N 10. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2004. 31 с.
46. Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // Препринт N 45. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2004. 32 с.
47. Брюно А. Д., Парусников В. И. Дальнейшее обобщение цепной дроби // Препринт N 40. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2005. 19 с.
48. Bruno A.D. and Parusnikov V. I. New generalizations of the continued fraction // Preprint no. 52 of the Keldysh Inst, of Applied Math.: Moscow, 2005. 20 p.
49. Брюно А. Д. Структура наилучших диофантовых приближений // ДАН. 2005. Т. 402. № 4. С. 439–444.
50. Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // ДАН. 2000. Т. 402. № 6. С. 732–736.
51. Parusnikov V. I. Comparison of several generalizations of the continued fraction // Чебышевский сборник (Тула). 2005. Т. 5. № 4. Р. 180–188.
52. Брюно А. Д. Свойства модульного многогранника // Препринт № 72. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2005. 31 с.
53. Klein F. Sur une representation geometrique du developpement, en fraction continue ordinaire // Nouv. Ann. Math. (3), 1896, Bd. 15. P. 327–331.
54. Klein F. Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. Bd. I, Einleitung. Göttingen. 1896. P. 16–50.
55. Koksma J. F. Diophantische Approximationen. Berlin: Julius Springer, 1936.
56. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Teubner, Leipzig, 1913; Stuttgart, 1954, 1977.
57. Hurwitz A. Ueber eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung relir Grössen // Acta math. 1889. В. 12. P. 367–405.
58. Коркина Е. Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры. // Труды Мат. ин-та им. Стеклова. 1995. Т. 203. С. 143–166.

- 59. Kontsevich M. L., Suhov Yu. M. Statistics of Klein polyhedra and multidimensional continued fractions // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1999. V. 197. P. 9–27.
- 60. Briggs K. Klein polyhedra (2013), Доступно по адресу: <http://keithbriggs.info/klein-polyhedra.html>.
- 61. Парусников В. И. Многогранники Клейна для трех экстремальных форм // Матем. заметки. 2005. Т. 77. На 4. С. 566–583.
- 62. Swinnerton-Dyer H. P. F. On the product of three homogeneous linear forms // Acta Arithmetica. 1971. V. 18. P. 371–385.
- 63. Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К. Теория иррациональностей третьей степени. Труды МИ АН. Т. 11. М.–Л.: АН СССР, 1947.
- 64. Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. М.–Л.: АН СССР, 1947.
- 65. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: Изд-во иностр. лит., пер. с англ., 1961.
- 66. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. Второе изд. М.: Наука, 1972.
- 67. Güting R. Zur Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus. I // J. Reine Angew. Math., 278/279 (1975).
- 68. Fukuda K. Exact algorithms and software in optimization and polyhedral computation // Proceed. ISSAC'08 of XXI International Symposium on Symbolic and algebraic computations, ACM NY, USA, 2008, 333–334.
- 69. Брюно А. Д. Обобщения цепной дроби // Чебышевский сборник, 7:3 (2006) 4–71.
- 70. Брюно А. Д. Структура многомерных диофантовых приближений // ДАН 433:5 (2010) 587–589.
- 71. Брюно А. Д., Парусников В. И. Двустороннее обобщение непрерывных дробей // ДАН 429:6 (2009) 727–730.
- 72. Брюно А. Д. Структура наилучших диофантовых приближений и многомерное обобщение цепной дроби // Чебышевский сборник (Тула) 11:1 (2010) 68–73.
- 73. Maple 2015.0 // <http://www.maplesoft.com/products/Maple>.
- 74. Bruno A. D. On geometric methods in works by V. I. Arnold and V. V. Kozlov. Preprint of arXiv, No 1401.6320.
- 75. Bruno A. D. New generalization of continued fraction, I // Functiones et Approximatio. 2010. vol. 43, no. 1. P. 55–104.

REFERENCES

1. Venkov, BA 1937, *Elementary theory of numbers*, ONTI, Moscow–Leningrad.
2. Khinchin, AYa 1963, *Continued fractions*, Noordhoff, Groningen.
3. Wallis, JA 1655, *Arithmetica infinitorum*.
4. Euler, L. 1737, “De fractinibus continuis”, *Comm. Acad. Sci. Imper. Petropol.*, vol. 9.
5. Lagrange, JL 1774, *Complement chez Elements d’algebre etc. par M. L. Euler*, T. III.
6. Euler, L. 1775, “De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda”, *Petersburger Akademie Notiz. Exhib.*, Commentationes arithmeticae collectae. V. II. St. Petersburg. 1849. pp. 99–104.
7. Jacobi, C. G. J. 1868, “Allgemeine Theorie der Kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird”, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 69, pp. 29–64. // *Gesammelte Werke*, Bd. IV. Berlin: Reimer, 1891. pp. 385–426.
8. Jacobi, C. G. J. 1868, “Ueber die Auflösung der Gleichung $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=f_n$ ”, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 69, pp. 21–28.
9. Poincare, H. 1889, “Sur une generalization des fractionés continues”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Ser. 1, vol. 99, pp. 1014–1016.
10. Brun, V. 1920, “En generalisation av Kjedebrøken”, *Skifter utgit av Videnskapselskapeti Kristiania. I, Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse* 1919, no. 6.
11. Perron, O. 1907, “Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus”, *Math. Ann.*, vol. 64, pp. 1–76.
12. Bernstein, L 1971, *The Jacobi-Perron algorithm — its theory and application*, LNM 207, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
13. Pustynnikov, L.D. 2003, “Generalized continued fractions and the ergodic theory”, *Russian Math.-Surveys*, vol. 58, no. 1.
14. Schweiger, F 2000, *Multidimensional Continued Fractions*, Oxford Univ. Press, New York.
15. Hermite, Ch. 1905, *Correspondance d’Hermite et de Stieltjes*, T. II, lettres 232, 238, 408, Gauthier-Villars, Paris.
16. Bruno, A.D. & Parusnikov, V.I. 1994, “Klein polyhedra for two cubic Davenport forms”, *Math. Notes*, vol. 56, no. 3–4, pp. 994–1007.
17. Bruno, A.D. & Parusnikov, V.I. 1997, “Comparison of various generalization of continued fractions”, *Math. Notes*, vol. 61, no. 3, pp. 278–286.
18. Parusnikov, V.I. 1998, “Klein polyhedra for complete decomposable forms”, *Number theory. Dvophantine, Computational and Algebraic Aspects*, Editors: K. Győry, A. Pethő and V. T. Sós, De Gruyter, Berlin, New York, pp. 453–463.

19. Parusnikov, V.I. 2000, "Klein polyhedra for the fourth extremal forms", *Math. Notes*, vol. 67, no. 1, pp. 87–102.
20. Parusnikov, V.I. 1997, "Klein's polyhedra with big faces", *Preprint no. 93 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
21. Parusnikov, V.I. 1998, "Klein's polyhedra for the fifth extremal cubic form", *Preprint no. 69 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
22. Parusnikov, V.I. 1999, "Klein's polyhedra for the sixth extremal cubic form", *Preprint no. 69 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
23. Parusnikov, V.I. 1999, "Klein's polyhedra for the seventh extremal cubic form", *Preprint no. 79 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
24. Lejeune Dirichlet, G.P. 1842, "Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen", *S.- B. Press. Akad. Wiss.*, S. 93–95 // Werke. Bd. I, Reimer, Berlin, 1889, pp. 635–638.
25. Hermite, Ch. 1850, "Lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur differents objets de la theorie des nombres", *J. Reine Angew. Math.*, Bd. 40, pp. 261–315 // Oeuvres, T. I, Gauthier-Villares, Paris, 1905, pp. 100–163 // Opusculum Mathematica de Jacobi. V. II.
26. Klein, F. 1895, "Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung", *Nadir. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.*, no. 3, pp. 357–359.
27. Minkowski, H. 1896, "Generalisation de le theorie des fractions continues", *Ann. Sci. Ec. Norm. Super*, ser III, t. 13, pp. 41–60. Also in: *Gesamm. Abh. I. P.* 278–292.
28. Voronoi, GF 1896, *On Generalization of the Algorithm of Continued Fraction*, Warsawa University.
29. Skubenko, B.F. 1991, "Minimum of decomposable cubic form of three variables", *Sov. Math.*, vol. 53, no. 3, pp. 302–321.
30. Arnold, V.I. 1998, "Higher dimensional continued fraction", *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 3, no. 3, pp. 10–17.
31. Lachaud, G. 1993, "Polyédre d'Arnol'd et voile d'un cône simplicial: analogues du théorème de Lagrange", *C.R. Acad. Sei.*, Ser. 1, vol. 317, pp. 711–716.
32. Lachaud, G. 1993, "Polyédre d'Arnol'd et voile d'un cône simplicial, analogues du théorème de Lagrange pour les irrationnels de degré quelconque", *Prétirage N 93–17*, Laboratoire de Mathématiques Discretes du C.N.R.S., Marseille.
33. Brentjes, A.J. 1981, "Multi-dimensional Continued Fraction Algorithms", *Mathematical Centre Tracts*, 145, Amsterdam, Mathematisch Centrum.
34. Buchmann, J. 1987, "On the period length of the generalized Lagrange algorithm", *J. Number Theory*, vol. 26, pp. 8–37.

35. Bykovsky, V.A. 1999, "The Valen's theorem for two-dimensional convergent fraction", *Math. Notes*, vol. 66, no. 1.
36. Hurwitz, A. 1984, "Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche", *Math. Ann.*, Bd. 44, pp. 417–436.
37. Bruno, A.D. 1964, "Continued fraction expansion of algebraic numbers", *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, vol. 4, no. 2, pp. 1–15.
38. Lang, S. & Trotter, H. 1972, "Continued fractions of some algebraic numbers", *J. Reine Angew. Math.*, Bd. 252, pp. 112–134.
39. Stark, H.M. 1971, "An explanation of some exotic continued fractions found by Brillhart", *Computers in Number Theory*, Academic Press, London and New York, pp. 21–35.
40. Minkowski, H. 1901, "Über die Annelierung an eine reele Grosse durch rationale Zahlen", *Math. Annalen*. B. 54, pp. 91–124. Also in: *Gesamm. Abh. I.* pp. 320–352.
41. Pipping, N. 1924, "Zur Theorie der Diagonalkettenbrüche", *Acta Acad. Aboens.*, B. 3, 22 S.
42. Nechaev, V.I. 1979, "Diagonal continued fraction", *Math. Encyclop.*, Kluwer Acad. Publ.
43. Bruno, A.D. 2003, "The correct generalization of the continued fraction", *Preprint no. 86 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
44. Bruno, A.D. & Parusnikov, V.I. 2003, "Polyhedra of absolute values for triple of linear forms", *Preprint no. 93 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
45. Bruno, A.D. 2004, "On generalization of the continued fraction", *Preprint no. 10 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
46. Bruno, A.D. 2004, "Algorithm of generalized continued fractions", *Preprint no. 45 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
47. Bruno, A.D. & Parusnikov, V.I. 2005, "Further generalization of the continued fraction", *Preprint no. 40 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
48. Bruno, A.D. & Parusnikov, V. I. "New generalizations of the continued fraction" *Preprint no. 52 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow, 20 p.
49. Bruno, A.D. 2005, "Structure of the best Diophantine approximations", *Doklady Mathematics*, vol. 71, no. 3, pp. 396–400.
50. Bruno, A.D. 2000, "Generalized continued fraction algorithm", *Doklady Mathematics*, vol. 71, no. 3, pp. 446–450.
51. Parusnikov, V. I. 2005, "Comparison of several generalizations of the continued fraction", *Chebyshevsky Sbornik (Tula)*, vol. 5. no. 4, pp. 180–188.

52. Bruno, A.D. 2005, "Properties of the modular polyhedron", *Preprint no. 72 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
53. Klein, F. 1896, "Sur une representation geometrique du développement, en fraction continue ordinaire", *Nouv. Ann. Math. (3)*, Bd. 15, pp. 327–331.
54. Klein, F. 1896, "Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie", Bd. I, Einleitung. Göttingen. pp. 16–50.
55. Koksma, JF 1936, *Diophantische Approximationen*, Julius Springer, Berlin.
56. Perron, O 1913, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner, Leipzig; Stuttgart, 1954, 1977.
57. Hurwitz, A. 1889, "Ueber eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung relier Grössen", *Acta math*, B. 12, pp. 367–405.
58. Korkina, E.I. 1995, "Two-dimensional convergent fractions. The simplest examples", *Proceedings of the Steklov Inst. of Math.*, vol. 209, pp. 124–144.
59. Kontsevich, M.L. & Suhov, Yu.M. 1999, "Statistics of Klein polyhedra and multi-dimensional continued fractions", *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, vol. 197, pp. 9–27.
60. Briggs, K. Klein polyhedra (2013), Available at:
<http://keithbriggs.info/klein-polyhedra.html>.
61. Parusnikov, V.I. 2005, "Klein's polyhedra for three extremal forms", *Math. Notes*, vol. 77, no. 4, pp. 523–538.
62. Swinnerton-Dyer H.P.F. 1971, "On the product of three homogeneous linear forms", *Acta Arithmetica*, vol. 18, pp. 371–385.
63. Delone, B.N. & Faddeev, D.K. 1964, "The theory of irrationalities of the third degree", *Am. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs*, vol. 10.
64. Delone, BN 1947, *The Petersburg's School of Mathematics*, AN SSSR, Moscow–Leningrad.
65. Cassels, JWS 1959, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, Berlin.
66. Borevich, ZI & Shafarevich, IR 1966, *Number Theory*, Academic Press.
67. Güting, R. 1975, "Zur Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus. I", *J. Reine Angew. Math.*, 278/279.
68. Fukuda, K. "Exact algorithms and software in optimization and polyhedral computation", *Proceed. ISSAC'08 of XXI International Symposium on Symbolic and algebraic computations*, ACM NY, USA, 2008, pp. 333–334.
69. Bruno, A.D. 2006, "Generalization of continued fraction", *Chebyshevsky sbornik*, vol. 7, no. 3, pp. 4–71.

- 70. Bruno, A.D. 2010, “The structure of multidimensional Diophantine approximations”, *Doklady Mathematics*, vol. 82, no. 1.
- 71. Bruno, A.D. & Parusnikov, V.I. 2009, “Two-way generalization of the continued fraction”, *Doklady Mathematics*, vol. 80, no. 3, pp. 887–890.
- 72. Bruno, A.D. 2010, “Structure of the best Diophantine approximations and multi-dimensional generalizations of the continued fraction”, *Chebyshevskii Sbornik (Tula)*, vol. 11, no. 1. pp. 68–73.
- 73. Maple 2015.0 (2015), Available at: <http://www.maplesoft.com/products/Maple>.
- 74. Bruno, A.D. 2014, “On geometric methods in works by V. I. Arnold and V. V. Kozlov”, *Preprint of arXiv*, No 1401.6320.
- 75. Bruno A. D. 2010 “New generalization of continued fraction, I”, *Functiones et Approximatio*, vol. 43, no. 1. pp. 55–104.

Поступило 30.04.2015