

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 511.34

BR-МНОЖЕСТВА

А. А. Абросимова (г. Владимир)

Аннотация

Владимирская школа теории чисел долгое время занималась исследованием квазипериодических разбиений. Постепенно отсюда появилась задача о равномерном распределении точек на торе, при этом возникала необходимость в точных оценках остаточных членов этого распределения.

Область исследования работы относится к разделу теории чисел, занимающемуся изучением множеств ограниченного остатка. Актуальность для теории чисел изучения множеств ограниченного остатка и их многомерных динамических модификаций обусловлена современной тенденцией перехода от классических арифметических числовых и функциональных структур к нелинейным арифметическим структурам. Динамические системы на множествах ограниченного остатка порождают хорошо сбалансированные слова, аналогичные словам Штурма и Рози. Значимость же сбалансированных слов объясняется их многочисленными применениями в таких областях, как динамические системы, теория кодов, теория коммуникации и задачи оптимизации, теория языков и лингвистика, теория распознавания и статистическая физика.

Целью работы является построение новых многомерных множеств ограниченного остатка и нахождение точных оценок остаточного члена для этих множеств. Естественным было начать решение с двумерного тора. В результате были построены три семейства трехпараметрических двумерных множеств ограниченного остатка на основе гексагональных разверток двумерного тора. Теперь в распоряжении автора находятся одномерные и двумерные множества ограниченного остатка. Возникает вопрос: нельзя ли на основе уже известных множеств, построить новые множества больших размерностей. Так, с использованием произведения торических разверток, строятся четыре семейства четырехпараметрических трехмерных множеств ограниченного остатка, на основе гексагональных призм-разверток трехмерного тора, полученных при умножении полуинтервалов Гекке и двумерных гексагональных разверток. Для всех построенных множеств определены точные оценки остаточного члена и доказана многомерная теорема Гекке, найдены средние значения отклонений, а в двумерном случае построена оптимизация границ отклонений.

В статье приведен обзор основных результатов автора по множествам ограниченного остатка.

Ключевые слова: множества ограниченного остатка, распределение дробных долей, развертка тора.

Библиография: 26 наименований.

BR-SETS

A. A. Abrosimova (Vladimir)

Abstract

Vladimir school of number theory was studied quasiperiodic tilings for a long time. The uniform distribution problem of fractional parts on the torus come from here. It is important to find exact estimates of the remainder for this distribution.

The paper is devoted to the important problem of number theory: bounded remainder sets. Relevance of the problem caused by the transition from the classical numerical and functional arithmetic structures to nonlinear arithmetic structures. Dynamical systems on bounded remainder sets generate balanced words, similar to words Sturmian and Rauzy words. Balanced words are important, for dynamical systems, coding theory, theory of communications and optimization problems, theory of languages and linguistics, recognition theory, statistical physics, etc.

The purpose of our research is construction of multidimensional bounded remainder sets and finding exact estimates of the remainder for this sets. The solution to this problem we start from two-dimensional case. We construct three classes of three-parameter two-dimensional bounded remainder sets. For their construction, we use hexagonal toric development. Now we know bounded remainder intervals, obtained by Hecke, and two-dimensional bounded remainder sets. There is the question: can we construct a new multi-dimensional sets using known sets? We construct four classes of four-parameter three-dimensional bounded remainder sets. We used for this the multiplication of toric developments. By multiplication of Hecke's intervals and two-dimensional hexagonal developments we obtain three-dimensional hexagonal Fedorov's prisms-developments. For all described sets we give exact estimates of the remainder and prove generalization of Hecke's theorem to the multidimensional case. Also we obtain average values of the remainders, and find sets with minimal value of the remainder.

This paper is an expository of the author's main results on bounded remainder sets.

Keywords: bounded remainder sets, distribution of fractional parts, toric development.

Bibliography: 26 titles.

Введение

В 1916 г. Г. Вейль [1] доказал критерий равномерного распределения. Пример последовательности равномерно распределенной по модулю 1 — это последовательность дробных долей $\{i\alpha\}_{i \geq 1}$ при иррациональном α .

Рассмотрим D -мерный тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/L$, где L — полная решетка размерности D над множеством действительных чисел $\mathbb{R}$. Пусть на торе $\mathbb{T}^D$ задано преобразование S_α — сдвиг тора на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^D$. Выберем на торе начальную точку x_0 , тогда многократный сдвиг тора S_α^j на вектор α порождает на нем орбиту $Orb_{x_0}(\alpha)$ точки x_0 . Выберем теперь на торе $\mathbb{T}^D$ некоторую область T .

Определим *считающую функцию* $r(i) = \#\{j : 0 \leq j < i, S_\alpha^j \in T\}$ как количество попаданий точек орбиты $Orb_{x_0}(\alpha)$ в область $T \in \mathbb{T}^D$.

Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_D)$ иррационален, если его координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_D$ и 1 линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Для иррационального вектора α точки орбиты $Orb_{x_0}(\alpha)$ всюду плотно и равномерно заполняют весь тор, то есть для $r(i)$ справедлива асимптотическая формула

$$r(i) = i \operatorname{Vol}(T) + \delta(i), \quad (1)$$

где $\operatorname{Vol}(T)$ — объем области T , а $\delta(i) = o(i)$ — остаточный член формулы (1) или отклонение считающей функции $r(i)$ от ожидаемой величины $i \operatorname{Vol}(T)$.

Множество T называется *множеством ограниченного остатка* или *BR-множеством* (bounded remainder set), если существует такая константа C , что выполняется неравенство

$$|\delta(\alpha, i, T)| \leq C$$

для всех i .

1. Одномерные BR-множества

В одномерном случае первые примеры BR-множеств были построены в 1921 г. Э. Гекке [2]. Это были интервалы $X \subset [0, 1)$ длины $0 < |b + a\alpha| < 1$, где $a \neq 0$ и $a, b \in \mathbb{Z}$. Гекке доказал, что они будут являться интервалами ограниченного остатка и получил для них следующую оценку остаточного члена

$$|\delta(\alpha, i, X)| \leq |a|.$$

П. Эрдеш [3] предположил, что любой интервал ограниченного остатка удовлетворяет условию, полученному Гекке. Полное описание одномерных интервалов ограниченного остатка было найдено Г. Кестеном [4] в 1966 г. В 2007 г. В. Г. Журавлев на основе квазипериодических разбиений Фибоначчи построил первое бесконечное семейство интервалов ограниченного остатка, длины

которых стремится к нулю, а отклонения ограничены некоторой абсолютной константой [5]. Так же в 2007 г. для интервалов Гекке были получены неулучшаемые по порядку оценки остаточного члена [6], а в работе [7] были найдены точные значения максимума и минимума остаточного члена. В [8] были описаны одномерные множества ограниченного остатка, полученные объединением нескольких интервалов, а явные оценки остаточного члена для этого случая были получены в работе [9].

2. Многомерные BR-множества

Более сложной оказалась задача нахождения множеств ограниченного остатка и определения границ отклонений в многомерном случае.

В двумерном случае первый пример BR-множеств был получен в 1954 г. R. Szűsz [10]. Это было семейство параметрических параллелограммов, для которых выполняется оценка $\delta(i) = O(1)$. Анализ конструкции Szűsz привел P. Liardet [11] к открытию возможной редукции от BR-множеств размерности D к аналогичным множествам размерности $D - 1$.

Другой подход к построению множеств ограниченного остатка обнаружили математики французской школы Ж. Рози [12] и S. Ferenczi [13]. Они связали свойство быть BR-множеством со свойствами отображения первого возвращения. Но получить оценки остаточного члена в двумерном случае так и не удалось. В 2005 г. В. Г. Журавлев получил оценки для фрактальных множеств ограниченного остатка, построенных на основе двумерного разбиения Рози [14].

В 2011 г. В. Г. Журавлев [15] нашел способ построения множеств ограниченного остатка на основе перекладывающихся торических разверток и получил многомерное обобщение теоремы Гекке [16]. Так например, в одномерном случае эта идея реализовывается так: единичный полуинтервал $T^1 = [0, 1)$ может быть разбит на два полуинтервала $T_0^1 = [0, 1 - \alpha)$ и $T_1^1 = [\alpha - 1, 1)$, перекладывание которых соответствует повороту окружности единичной длины $\mathbb{T}^1$ на угол α . В работе [17] им описан общий подход к построению множеств ограниченного остатка на основе многогранников Е. С. Федорова для трехмерного случая, параллелоэдров Г. Ф. Вороного для четырехмерного случая, а для размерности $D \geq 5$ с помощью вытягивания многомерного куба. Эта конструкция обобщается на все размерности.

2.1. Двумерные BR-множества

В 2011 г. автору в [18] удалось построить трехпараметрические множества ограниченного остатка на основе перекладывающихся шестиугольных разверток $T^2(c)$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$. В этом случае развертка $T^2(c)$ разбивается на три перекладывающиеся области $T_k^2, k = 0, 1, 2$, являющиеся множествами ограниченного остатка.