

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-320-330

**Отражение сферической звуковой волны от упругого
полупространства с прилегающим неоднородным слоем
жидкости¹**

Л. А. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача об отражении сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим неоднородным слоем жидкости. Полагается, что однородное изотропное упругое полупространство покрыто непрерывно-неоднородным плоским слоем жидкости с произвольным законом неоднородности. Точечный источник гармонических звуковых волн помещен в идеальную однородную жидкость, граничащую с неоднородным слоем.

Аналитическое решение рассматриваемой задачи получено на основе решения аналогичной задачи в случае падения плоской волны.

Акустическое давление в сферической волне представляется в интегральной форме в виде разложения по плоским волнам. При этом подынтегральное выражение оказывается аналогичным по форме выражению для давления в плоской падающей волне. Поэтому давление в рассеянной волне в случае падения сферической волны на полупространство с неоднородным жидким слоем записывается в виде интеграла, подынтегральное выражение которого аналогично по форме выражению для давления в рассеянной волне при падении плоской волны. Для определения волнового поля в неоднородном слое жидкости построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, приближенное аналитическое решение которой получено методом степенных рядов.

Ключевые слова: сферические звуковые волны, упругое полупространство, неоднородный слой жидкости.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников. Отражение сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим неоднородным слоем жидкости // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 320–330.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике» (соглашение № 073-03-2023-303/2).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-320-330

Reflection of a spherical sound wave from an elastic half-space with an adjacent inhomogeneous liquid layer

L. A. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Abstract

In paper the problem of reflection of a spherical sound wave from an elastic half-space with an adjacent inhomogeneous liquid layer is considered. It is assumed that a homogeneous isotropic elastic half-space is covered by an continuously-inhomogeneous of a plane liquid layer with an arbitrary law of inhomogeneity. A point source of harmonic sound waves is placed in an ideal homogeneous liquid bordering an inhomogeneous layer.

The analytical solution of the viewed problem is obtained on the basis of the solution of a similar problem for the case of a plane incident wave.

The acoustic pressure in a spherical wave is represented in integral form as a decomposition on a plane waves. The integrand expression turns out to be similar in form to the expression for pressure in a plane incident wave. Therefore, the pressure in a scattered wave in the case of a spherical wave falling on a half-space with an inhomogeneous liquid layer is written as an integral, the integral expression of which is similar in form to the expression for the pressure in a scattered wave when a plane wave falls. For the determination of the wave field in an inhomogeneous liquid layer the boundary value problem for a system of ordinary differential equations of the second order is built, the approximate analytical solution of which is obtained by the power series method.

Keywords: spherical sound waves, elastic half-space, inhomogeneous liquid layer.

Bibliography: 14 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, 2023, "Reflection of a spherical sound wave from an elastic half-space with an adjacent inhomogeneous liquid layer", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 320–330.

1. Введение

Изучению распространения звуковых волн в присутствии плоских границ раздела сред посвящено большое количество работ. При этом в большинстве работ первичное поле возмущений представлялось в виде падающей плоской волны. Однако часто возникает необходимость учитывать конечную удаленность источника звука от границ раздела сред. Криволинейность фронта падающей волны оказывает существенное влияние на отражение и прохождение звука через плоскую границу.

Задача о поле точечного источника, расположенного на конечном удалении от плоской границы раздела сред рассматривалась в ряде работ. Анализ отражения и преломления сферической волны на границе раздела двух однородных жидких и упругих полупространств

проведен в [1, 2]. Задача об отражении сферической звуковой волны от плоскости, на которой заданы импедансные условия, решена в [3]. Отражение сферической звуковой волны от однородного вязкоупругого полупространством рассмотрено в [4].

В ряде работ исследовалось прохождение сферической звуковой волны через однородные изотропные упругие плоские слои. В [5, 6] исследовано прохождение сферической волны через тонкую бесконечную пластину, находящуюся в однородной жидкости. Взаимодействие сферической волны с однородной изотропной упругой пластиной конечной толщины и с двухслойной пластиной, состоящей из однородных и изотропных твердых слоев, изучено в [7, 8]. В [9] решена задача дифракции сферической волны на тонкой бесконечной пластине, разделяющей однородную и слоисто-неоднородную среды. В [10] проанализированы особенности, возникающие при прохождении сферической волны сквозь упругий слой произвольной волновой толщины. В [11] построено точное решение задачи о проникновении звукового поля через плоский однородный упругий слой. В качестве источника поля рассматривался сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки. Прохождение сферической звуковой волны через однородную упругую пластину с неоднородным изотропным упругим покрытием исследовано в [12].

В настоящей работе рассматривается задача об отражении сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим непрерывно-неоднородным по толщине слоем жидкости в случае произвольного закона неоднородности.

2. Постановка задачи

Пусть все пространство R^3 разделено плоскостями $z = 0$ и $z = h$ на три области: $D_1(z < 0)$, $D_2(0 < z < h)$, $D_3(z > h)$. Область D_1 — однородное упругое полупространство, которое характеризуется плотностью ρ_1 и упругими постоянными λ и μ . Область D_2 представляет собой плоский слой идеальной неоднородной жидкости толщиной h , прилегающий к границе упругого полупространства $z = 0$. Полагаем, что плотность неоднородной жидкости ρ_2 является дифференцируемой функцией координаты z , а скорость звука c_2 — непрерывной функцией этой координаты. Область D_3 заполнена однородной идеальной жидкостью с плотностью ρ_3 и скоростью распространения звука c .

В области D_3 в точке $M_0(0, 0, z_0)$ расположен точечный излучатель гармонических звуковых волн. Звуковое давление гармонической сферической звуковой волны записывается в виде

$$p_0 = A \frac{\exp[i(kR - \omega t)]}{R}, \quad (1)$$

где A — амплитуда волны; $k = \omega/c$ — волновое число однородной жидкости; ω — круговая частота; $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$; $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ — векторы, соединяющие начало координат с точкой наблюдения $M(x, y, z)$ и с точечным источником M_0 соответственно; $R = [x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}$; t — время. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Определим акустическое поле, отраженное упругим полупространством, покрытым неоднородным слоем жидкости.

3. Математическая модель задачи

Распространение малых возмущений в упругом однородном изотропном полупространстве в случае установившихся колебаний описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [6]

$$\Delta \Psi + k_l^2 \Psi = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \Phi + k_t^2 \Phi = 0, \quad \text{div } \Phi = 0, \quad (3)$$

где Ψ и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения частиц упругой среды $\mathbf{u}$; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно; $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_1}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho_1}$ — скорости продольных и поперечных волн. При этом вектор смещения частиц упругого однородного полупространства

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Psi + \text{rot } \Phi, \quad (4)$$

где

$$\Phi = \Phi_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + \Phi_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + \Phi_z(x, y, z)\mathbf{e}_z,$$

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — единичные векторы осей x, y и z прямоугольной декартовой системы координат.

Векторное уравнение (3) распадается на три независимых скалярных уравнения Гельмгольца относительно проекций вектора Φ

$$\Delta\Phi_x + k_\tau^2\Phi_x = 0, \quad (5)$$

$$\Delta\Phi_y + k_\tau^2\Phi_y = 0,$$

$$\Delta\Phi_z + k_\tau^2\Phi_z = 0. \quad (6)$$

Компоненты Φ_x и Φ_z вектора Φ будем определять как решения соответствующих уравнений Гельмгольца (5) и (6), а компоненту Φ_y найдем с помощью уравнения $\text{div } \Phi = 0$, из которого следует

$$\frac{\partial\Phi_y}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi_x}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_z}{\partial z}. \quad (7)$$

Согласно (4) компоненты вектора $\mathbf{u}$ выражаются через функции Ψ, Φ_x, Φ_y и Φ_z по формулам

$$u_x = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_y}{\partial z}, \quad u_y = \frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_z}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_x}{\partial y}. \quad (8)$$

Распространение звука в неоднородной идеальной жидкости описывается уравнением [1]

$$\Delta p_2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}p_2 - \frac{1}{\rho_2}\text{grad } \rho_2 \cdot \text{grad } p_2 = 0, \quad (9)$$

где p_2 — звуковое давление в неоднородном слое; $c_2 = c_2(z)$, $\rho_2 = \rho_2(z)$.

Распространение малых возмущений в однородной идеальной жидкости в случае гармонического движения описывается уравнением Гельмгольца [6]

$$\Delta p_1 + k^2 p_1 = 0, \quad (10)$$

где $p_1 = p_0 + p_s$ — звуковое давление полного акустического поля в области D_3 , p_s — звуковое давление в рассеянной волне.

Скорости частиц в однородной жидкости и в неоднородном слое определяются по формулам

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{i\rho_1\omega}\text{grad } p_1, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{i\rho_2\omega}\text{grad } p_2. \quad (11)$$

Решения дифференциальных уравнений (2), (5), (6), (9) и (10) должны удовлетворять граничным условиям на поверхностях $z = 0$ и $z = h$, а также условиям излучения на бесконечности [6].

Граничные условия на поверхности полупространства $z = 0$ заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и неоднородной жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$z = 0 : \quad -i\omega u_z = v_{2z}, \quad \sigma_{zz} = -p_2, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0. \quad (12)$$

На границе раздела однородной и неоднородной жидкостей $z = h$ должны быть равны нормальные скорости частиц жидкостей и акустические давления

$$z = h : \quad v_{1z} = v_{2z}, \quad p_1 = p_2. \quad (13)$$

Связь между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и составляющими вектора смещения $\mathbf{u}$ в упругом полупространстве устанавливается на основе обобщенного закона Гука [13] и имеет вид

$$\sigma_{zz} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \quad (14)$$

Таким образом, в математической постановке задача заключается в нахождении решений дифференциальных уравнений (2), (5), (6), (9) и (10), удовлетворяющих граничным условиям (12) и (13), а также дополнительным условиям — условиям излучения на бесконечности.

4. Аналитическое решение задачи

Представим давление падающей сферической волны в виде разложения по плоским волнам [1, 2]

$$p_0(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (15)$$

где

$$\tilde{p}_0(\xi, \eta) = A \frac{i}{2\pi\chi} e^{i(\xi x + \eta y + \chi|z - z_0|)}, \quad \chi = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}. \quad (16)$$

При $z < z_0$ формула (16) принимает вид (волна падает на неоднородный слой, покрывающий полупространство)

$$\tilde{p}_0(\xi, \eta) = I(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y - \chi z)}, \quad I(\xi, \eta) = A \frac{i}{2\pi\chi} e^{i\chi z_0}. \quad (17)$$

Замечаем, что подынтегральное выражение в (15), определяемое (17), аналогично по форме выражению плоской волны, падающей произвольным образом на полупространство с неоднородным слоем. Акустическое давление такой волны записывается в виде

$$p_{0pl} = A_0 e^{i(k_x x + k_y y - k_z z)}, \quad (18)$$

где A_0 — амплитуда волны; $k_x = k \sin \theta_0 \cos \varphi_0$, $k_y = k \sin \theta_0 \sin \varphi_0$, $k_z = k \cos \theta_0$ — проекции волнового вектора плоской волны $\mathbf{k}$ на оси координат x , y , z ; $|\mathbf{k}| = k$; θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы падения плоской волны соответственно.

Сравнивая формулы (17) и (18) находим, что ξ соответствует k_x , η — k_y , χ — k_z , а $I(\xi, \eta)$ — A_0 . Поэтому решение поставленной задачи можно найти, воспользовавшись решением задачи об отражении плоской звуковой волны от полупространства с прилегающим неоднородным слоем.

Действительно, при рассеянии первичного поля возмущений, определяемого выражением $\tilde{p}_0(\xi, \eta)$, акустические давления в отраженной волне $\tilde{p}_s$ и неоднородном слое $\tilde{p}_2$, потенциалы смещения $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$ в упругом полупространстве определяются формулами, аналогичными для случая падения плоской волны p_{0pl} , в которых следует сделать указанные выше замены.

Искомые величины p_s , p_2 , Ψ , Φ_x , Φ_y , Φ_z подлежат определению путем интегрирования $\tilde{p}_s$, $\tilde{p}_2$, $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}_x$, $\tilde{\Phi}_y$, $\tilde{\Phi}_z$ по ξ и η в бесконечных пределах.

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо воспользоваться решением задачи об отражении и прохождении плоской волны через упругую пластину с неоднородным жидким покрытием.

5. Отражение плоской звуковой волны, падающей произвольным образом на упругое полупространство с прилегающим неоднородным слоем жидкости

Пусть из области $D_3(z > h)$ на полупространство, покрытым неоднородным слоем жидкости падает под произвольным углом плоская звуковая волна, давление в которой определяется выражением (18). Определим волновые поля в областях D_1 , D_2 и D_3 . Элементы решения задачи будем сопровождать индексом pl .

Потенциалы смещения в упругом полупространстве, являющиеся решениями уравнений Гельмгольца (2), (5) и (6) будем искать в виде

$$\Psi_{pl} = B e^{i(k_{lx}x + k_{ly}y - k_{lz}z)}, \quad (19)$$

$$\Phi_{xpl} = C e^{i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)}, \quad (20)$$

$$\Phi_{zpl} = D e^{i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)}, \quad (21)$$

где $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2 - k_{ly}^2}$, $k_{\tau z} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau x}^2 - k_{\tau y}^2}$. При этом согласно закону Снеллиуса [1] $k_{lx} = k_{\tau x} = k_x$, $k_{ly} = k_{\tau y} = k_y$.

Подставим выражения (20) и (21) в (7) и проинтегрируем по y . Получим

$$\Phi_{ypl} = -\frac{1}{k_{\tau y}}(k_{\tau x}C - k_{\tau z}D)e^{i(k_{\tau x}x + k_{\tau z}z)}. \quad (22)$$

Давление p_{2pl} является решением уравнения (9). Согласно закону Снеллиуса зависимость p_{2pl} от координаты x будет иметь вид $\exp(ik_x x)$, а от координаты y — $\exp(ik_y y)$. Поэтому функцию p_{2pl} будем искать в виде

$$p_{2pl} = P(z)e^{i(k_x x + k_y y)}. \quad (23)$$

Подставляя выражение (23) в уравнение (9), получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестной функции $P(z)$

$$P''(z) + \alpha(z)P'(z) + \beta(z)P(z) = 0, \quad (24)$$

где $\alpha(z) = -\frac{\rho'_2(z)}{\rho_2(z)}$; $\beta(z) = \frac{\omega^2}{c_2^2(z)} - k_x^2 - k_y^2$.

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Давление в отраженной волне p_{spl} , являющееся решением уравнения Гельмгольца (10), будем искать в виде

$$p_{spl} = A_1 e^{i[k_x x + k_y y + k_z(z-h)]}. \quad (25)$$

Подставляя (18) – (23) и (25) в граничные условия (12) и (13) и учитывая (8), (11) и (14), получим выражения для неизвестных коэффициентов A_1 , B , C , D

$$A_1 = -A_0 e^{-ik_z h} + P(h), \quad (26)$$

$$B = \frac{a_9 d_1}{\Delta} P(0), \quad C = -\frac{a_9 d_2}{\Delta} P(0), \quad D = \frac{-a_7 d_1 + a_8 d_2}{\Delta} P(0) \quad (27)$$

и два краевых условия для дифференциального уравнения (24)

$$\begin{aligned} P'(0) + \gamma_1 P(0) &= 0, \\ P'(h) + \gamma_2 P(h) &= g, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{i\omega^2 \rho_2(0)}{k_{\tau y} \Delta}; \quad \gamma_2 = \frac{ik_z \rho_2(h)}{\rho_1}; \quad g = 2A_0 e^{-ik_z h} \gamma_2; \quad \Delta = (a_1 a_9 - a_7 a_3) d_1 - (a_2 a_9 - a_8 a_3) d_2; \\ a_1 &= -\lambda k_l^2 - 2\mu k_{lz}^2; \quad a_2 = -\frac{k_{\tau z}}{k_{\tau y}}(k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2); \quad a_3 = \frac{k_{\tau x} k_{\tau z}^2}{k_{\tau y}}; \quad a_4 = 2k_{lx} k_{lz} k_{\tau y}; \\ a_5 &= k_{\tau x}(k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2 - k_{\tau z}^2); \quad a_6 = k_{\tau z}(-k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2 + k_{\tau z}^2); \quad a_7 = 2k_{ly} k_{lz}; \\ a_8 &= k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2 - k_{\tau z}^2; \quad a_9 = -2k_{\tau x} k_{\tau z}; \quad d_1 = a_5 a_9 - a_8 a_6; \quad d_2 = a_4 a_9 - a_7 a_6.\end{aligned}$$

Коэффициенты A_1, B, C, D выражаются через значения функции $P(z)$ на концах отрезка $[0, h]$. Поэтому для их вычисления необходимо прежде всего решить краевую задачу (24), (28).

Найдем приближенное аналитическое решение краевой задачи (24), (28) методом степенных рядов [14].

Аппроксимируем функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ многочленами относительно переменной z

$$\alpha(z) = \sum_{m=0}^M \alpha_m (z - h/2)^m, \quad \beta(z) = \sum_{m=0}^M \beta_m (z - h/2)^m, \quad (29)$$

где M — степень многочлена.

Решение линейного уравнения с переменными коэффициентами (24) будем искать в виде

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (z - h/2)^n. \quad (30)$$

Если коэффициенты уравнения (24) $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — многочлены, то степенной ряд (30) будет сходиться при любом значении z из отрезка $[0, h]$ [14].

Производные $P'(z)$ и $P''(z)$ согласно (30) запишем в виде

$$\begin{aligned}P'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1} (z - h/2)^n, \\ P''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) P_{n+2} (z - h/2)^n.\end{aligned} \quad (31)$$

Тогда

$$\alpha(z) P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{M_1} (n+1-m) \alpha_m P_{n+1-m} \right] (z - h/2)^n, \quad (32)$$

$$\beta(z) P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{M_1} \beta_m P_{n-m} \right] (z - h/2)^n, \quad (33)$$

где $M_1 = \min(M, n)$.

Подставляя выражения (31) – (33) в уравнение (24) и приравнявая нулю коэффициенты при каждой степени $(z - h/2)$, получаем рекуррентное соотношение для определения коэффициентов P_n

$$P_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{M_1} [(n+1-m) \alpha_m P_{n+1-m} + \beta_m P_{n-m}], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (34)$$

которое позволяет вычислить все коэффициенты разложения (30) за исключением P_0 и P_1 .

Для нахождения этих коэффициентов сведем краевую задачу (24), (28) к задачам с начальными условиями в точке $z = h/2$. Найдем два линейно независимых решения дифференциального уравнения (24). В качестве фундаментальных решений можно выбрать два решения задачи Коши $P^{(1)}(z)$ и $P^{(2)}(z)$ уравнения (24) с начальными условиями, являющимися линейно независимыми.

Возьмем следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} P^{(1)}|_{z=h/2} &= 1, & P^{(1)'}|_{z=h/2} &= 0, \\ P^{(2)}|_{z=h/2} &= 0, & P^{(2)'}|_{z=h/2} &= 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Однородность уравнения (24) позволяет представить решение краевой задачи (24), (28) в виде линейной комбинации фундаментальных решений

$$P(z) = T_1 P^{(1)}(z) + T_2 P^{(2)}(z), \quad (36)$$

где T_l и T_2 — постоянные.

Функции $P^{(l)}(z)$ ($l = 1, 2$) будем искать в виде (30)

$$P^{(l)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(l)}(z - h/2)^n \quad (l = 1, 2). \quad (37)$$

Все коэффициенты разложений (37) за исключением $P_0^{(l)}$ и $P_1^{(l)}$ ($l = 1, 2$) вычисляются по формуле (34)

$$P_{n+2}^{(l)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{M_1} \left[(n+1-m)\alpha_m P_{n+1-m}^{(l)} + \beta_m P_{n-m}^{(l)} \right], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (38)$$

Подставляя (37) в начальные условия (35), находим

$$P_0^{(1)} = 1, \quad P_1^{(1)} = 0, \quad P_0^{(2)} = 0, \quad P_1^{(2)} = 1.$$

Подставляя (36) в краевые условия (28), получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных T_1 и T_2

$$c_{11}T_1 + c_{12}T_2 = 0,$$

$$c_{21}T_1 + c_{22}T_2 = g,$$

где

$$c_{11} = P^{(1)'}(0) + \gamma_1 P^{(1)}(0); \quad c_{12} = P^{(2)'}(0) + \gamma_1 P^{(2)}(0);$$

$$c_{21} = P^{(1)'}(h) + \gamma_2 P^{(1)}(h); \quad c_{22} = P^{(2)'}(h) + \gamma_2 P^{(2)}(h).$$

Определив из этой системы коэффициенты T_1 и T_2 , получаем приближенное аналитическое решение краевой задачи (24), (28)

$$P(z) = \frac{c_{12}}{c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22}} \left[c_{12} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)}(z - h/2)^n - c_{11} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(2)}(z - h/2)^n \right]. \quad (39)$$

6. Отражение сферической волны

При рассеянии первичного поля возмущений, определяемого выражением $\tilde{p}_0(\xi, \eta)$, соответствующие величины $\tilde{p}_s$, $\tilde{p}_2$, $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}_x$, $\tilde{\Phi}_y$ и $\tilde{\Phi}_z$ определяются формулами (19)–(23), полученными при решении задачи в случае падения плоской волны давления p_{0pl} , в которых следует сделать замену k_x на ξ , k_y на η , k_z на χ , A_0 на $I(\xi, \eta)$.

Искомое акустическое давление в рассеянной волне p_s определяется путем интегрирования $\tilde{p}_s$

$$p_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_s(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Аналогичным образом путем интегрирования находятся p_2 , Ψ , Φ_x , Φ_y , Φ_z .

Будем иметь

$$p_s(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-I(\xi, \eta) e^{-i\chi h} + \tilde{P}(h) \right] e^{i[\xi x + \eta y + \chi(z-h)]} d\xi d\eta, \quad (40)$$

где

$$\tilde{P}(h) = \frac{\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{12}\tilde{c}_{21} - \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}} \left[\tilde{c}_{12} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)}(h/2)^n - \tilde{c}_{11} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(2)}(h/2)^n \right];$$

$$\tilde{c}_{11} = P^{(1)'}(0) + \tilde{\gamma}_1 P^{(1)}(0); \quad \tilde{c}_{12} = P^{(2)'}(0) + \tilde{\gamma}_1 P^{(2)}(0);$$

$$\tilde{c}_{21} = P^{(1)'}(h) + \tilde{\gamma}_2 P^{(1)}(h); \quad \tilde{c}_{22} = P^{(2)'}(h) + \tilde{\gamma}_2 P^{(2)}(h);$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{i\omega^2 \rho_2(0)}{\eta \tilde{\Delta}}; \quad \tilde{\gamma}_2 = \frac{i\chi \rho_2(h)}{\rho_1}; \quad \tilde{g} = 2I(\xi, \eta) e^{-i\chi h} \tilde{\gamma}_2; \quad \tilde{\Delta} = (\tilde{a}_1 \tilde{a}_9 - \tilde{a}_7 \tilde{a}_3) \tilde{d}_1 - (\tilde{a}_2 \tilde{a}_9 - \tilde{a}_8 \tilde{a}_3) \tilde{d}_2;$$

$$\tilde{a}_1 = -\lambda k_l^2 - 2\mu k_1^2; \quad \tilde{a}_2 = -\frac{1}{\eta}(\xi^2 + \eta^2) k_2; \quad \tilde{a}_3 = \frac{\xi}{\tau} k_2^2; \quad \tilde{a}_4 = 2\xi \eta k_1; \quad \tilde{a}_5 = \xi(\xi^2 + \eta^2 - k_2^2);$$

$$\tilde{a}_6 = k_2(k_\tau^2 - 2\xi^2); \quad \tilde{a}_7 = 2\eta k_1; \quad \tilde{a}_8 = \xi^2 + \eta^2 - k_2^2; \quad \tilde{a}_9 = -2\xi k_2;$$

$$\tilde{d}_1 = \tilde{a}_5 \tilde{a}_9 - \tilde{a}_8 \tilde{a}_6; \quad \tilde{d}_2 = \tilde{a}_4 \tilde{a}_9 - \tilde{a}_7 \tilde{a}_6; \quad k_1 = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \eta^2}, \quad k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \eta^2}.$$

Чтобы обеспечить ограниченность $\tilde{p}_s$ при $z \rightarrow \infty$ выбор знака корня $\chi = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}$ осуществим из условия $\text{Im} \chi \geq 0$, то есть $\chi = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}$ при $\xi^2 + \eta^2 < k^2$, $\chi = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k^2}$ при $\xi^2 + \eta^2 > k^2$.

Величины k_1 и k_2 определяются по формулам

$$k_1 = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \eta^2} \text{ при } \xi^2 + \eta^2 < k_l^2, \quad k_2 = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k_l^2} \text{ при } \xi^2 + \eta^2 > k_l^2;$$

$$k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \eta^2} \text{ при } \xi^2 + \eta^2 < k_\tau^2, \quad k_2 = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k_\tau^2} \text{ при } \xi^2 + \eta^2 > k_\tau^2.$$

Оценить аналитически интеграл (40) не представляется возможным. Он подлежит только численному расчету.

7. Заключение

Так как геометрия фронта падающей сферической волны не совпадает с геометрией поверхностей полупространства и жидкого слоя, то решение рассматриваемой акустической задачи на основе построенной математической модели оказывается весьма затруднительным. Поэтому для получения аналитического решения задачи отражения сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим непрерывно-неоднородным по толщине

плоским слоем жидкости применен метод, использующий решение аналогичной задачи в случае падения плоской волны. Такой подход к решению поставленной задачи позволил избежать необходимости непосредственного решения соответствующих дифференциальных уравнений с граничными условиями. Найденное решение справедливо для произвольного закона неоднородности жидкого слоя.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
2. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
3. Ingard U. On the reflection of a spherical sound wave from an infinite plane // J. Acoust. Soc. Am. 1951. Vol. 23. No. 3. P. 329 – 335.
4. Magnuson A. H. Acoustic response in a liquid overlying a homogeneous viscoelastic half-space // J. Acoust. Soc. Am. 1975. Vol. 57. No. 5. P. 1017 – 1024.
5. Lamb Jr. The transmission of a spherical sound wave through a thin elastic plate // Ann. Phys. 1957. Vol. 1. No. 3. P. 233 – 246.
6. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
7. Piquette J. C. Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements // J. Acoust. Soc. Am. 1988. Vol. 83. No. 4. P. 1284 – 1294.
8. Piquette J. C. Interactions of a spherical wave with a bilaminar plate composed of homogeneous and isotropic solid layers // J. Acoust. Soc. Am. 1988. Vol. 84. No. 4. P. 1526 – 1535.
9. Куртепов В. М. Звуковое поле точечного источника при наличии в среде тонкой бесконечной пластины (дискретный спектр) // Акуст. журн. 1969. Т. 15. Вып. 4. С. 560 – 566.
10. Шендеров Е. Л. Прохождение сферической звуковой волны сквозь упругий слой // Акуст. журн. 1991. Т. 37. Вып. 4. С. 800 – 807.
11. Шушкевич Г. Ч., Киселева Н. Н. Экранирование звукового поля плоским упругим слоем и тонкой незамкнутой сферической оболочкой // Информатика. 2014. Вып. 2. С. 36 – 48.
12. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш.. Прохождение сферической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 5. С. 305 – 319.
13. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
14. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1969. 656 с.

REFERENCES

1. Brekhovskikh, L. M. 1973, “Waves in layered media, *Nauka*, Moscow, 344 p., [in Russian].
2. Brekhovskikh, L. M., Godin, O. A. 1989, “Acoustics of layered media”, *Nauka*, Moscow, 416 p., [in Russian].

3. Ingard, U. 1951, “On the reflection of a spherical sound wave from an infinite plane”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 23, no. 3, pp. 329 – 335.
4. Magnuson, A.H. 1975, “Acoustic response in a liquid overlying a homogeneous viscoelastic half-space”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 57, no. 5, pp. 1017 – 1024.
5. Lamb, Jr. 1957, “The transmission of a spherical sound wave through a thin elastic plate”, *Ann. Phys.*, vol. 1, no. 3, pp. 233 – 246.
6. Shenderov, E.L. 1972, “Wave problems of underwater acoustics”, *Sudostroenie*, Leningrad, 352 p., [in Russian].
7. Piquette, J. C. 1988, “Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, no. 4, pp. 1284 – 1294.
8. Piquette, J. C. 1988, “Interactions of a spherical wave with a bilaminar plate composed of homogeneous and isotropic solid layers”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 84, no. 4, pp. 1526 – 1535.
9. Kurtepov, V.M. 1969, “The sound field of a point source in the presence of a thin infinite plate in the medium (discrete spectrum)”, *Akust. Zhurnal*, vol. 15, no. 4, pp. 560 – 566, [in Russian].
10. Shenderov E. L. 1991, “Transmission of a spherical sound wave through an elastic layer”, *Akust. Zhurnal*, vol. 37, no. 4, pp. 800 – 807, [in Russian].
11. Shushkevich G. Ch., Kiselyova N. N. 2014, “Sound field shielding by flat elastic layer and thin unclosed spherical shell”, *Informatika*, no. 2, pp. 36 – 47, [in Russian].
12. Tolokonnikov, L. A., Nguyen, T. S. 2022, “Transmission of spherical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 305 – 319, [in Russian].
13. Nowacki, W. 1975, “Teoria sprężystości”, *Mir*, Moscow, 872 p., [in Russian].
14. Smirnov, V. I. 1969, “Higher mathematics course, vol. 2”, *Nauka*, Moscow, 656 p., [in Russian].

Получено: 14.09.2023

Принято в печать: 21.12.2023