ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 5.

УДК 51 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-307-319

Из истории одной неопубликованной статьи М. И. Кадеца[1]

Е. В. Манохин, Р. А. Жуков, И. В. Бормотов, И. В. Добрынина, Е. А. Назырова

Манохин Евгений Викторович — кандидат физико-математических наук, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: emanfinun@mail.ru
Жуков Роман Александрович — доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: pluszh@mail.ru
Бормотов Игорь Владимирович — кандидат философских наук, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: emanfinun@mail.ru
Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).
e-mail: ivdobrynina@rambler.ru
Назырова Екатерина Александровна — кандидат исторических наук, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: emanfinun@mail.ru

Аннотация

Авторы статьи ставят перед собой задачу: ознакомить математическую общественность с неопубликованной статьей выдающегося советского математика М. И. Кадеца, возглавлявшего Харьковскую школу, известную своими работами в области теории банаховых пространств, рассказать историю этой статьи. Данная работа продолжает статью автора о долгом сотрудничестве и взаимодействии преподавателей и ученых Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого и Харьковской школы Михаила Иосифовича Кадеца.

Под его руководством вел научную работу тульский студент, которые впоследствии после обучения в Харьковской школе Михаила Иосифовича Кадеца стал кандидатом физико-математических наук. Михаилом Иосифовичем Кадецем получены глубокие, содержательные научные результаты. Михаил Иосифович по праву считается одним из создателей теории эквивалентных перенормировок банаховых пространств, превратившейся в настоящее время в самостоятельную область. Харьковская школа Кадеца в то время получила мировую известность. М. И. Кадец щедро делился своими математическими идеями со своими учениками. В статье приводятся некоторые совместные результаты, полученные М. И. Кадецем и его учеником в 1988-1990 годах, которые готовились к публикации в виде совместной статьи, но тогда не были опубликованы из-за высокой требовательности, которую предьявлял к себе выдающийся советский математик М. И. Кадец, требовательности, которая может служить примером для современной молодежи, особенно для научной молодежи. Исследование выполнено за счет бюджетных средств по государственному заданию Финуниверситета № 15841п-П8.

[1]Статья подготовлена по результатам исследования, выполненного за счет бюджетных средств по государственному заданию Финуниверситета № 15841п-П8.

Ключевые слова: история математики, функциональный анализ, банаховы пространства, математики Тулы, математики Харьковской школы Михаила Иосифовича Кадеца.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:
Е. В. Манохин, Р. А. Жуков, И. В. Бормотов, И. В. Добрынина, Е. А. Назырова. Из истории одной неопубликованной статьи М. И. Кадеца // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 307–319.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 5.

UDC 51 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-307-319

From history of one unpublished paper of M. I. Kadets

E. V. Manokhin, R. A. Zhukov, I. V. Bormotov, I. V. Dobrynina, E. A. Nazirova

Manokhin Evgeny Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: emanfinun@mail.ru
Zhukov Roman Aleksandrovich — doctor of economic sciences, candidate of physical and mathematical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: pluszh@mail.ru
Bormotov Igor Vladimirovich — candidate of philosophical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: emanfinun@mail.ru
Dobrynina Irina Vasilyevna — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communications and Informatics (Moscow).
e-mail: ivdobrynina@rambler.ru
Nazirova Ekaterina Aleksandrovna — candidate of historical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: emanfinun@mail.ru

Abstract

Authors of paper put before themselves a problem: to acquaint the mathematical public with unpublished paper of the outstanding Soviet mathematician M.I.Kadets heading the Kharkov school, known for the works in the field of the theory of Banach spaces, to tell story of this paper. The given work continues paper of the author about part cooperation and interaction of teachers and scientists of the Tula state pedagogical university of L.N.Tolstoy and Michael Iosifovich Kadetsa's Kharkov school.

Under its management the Tula student which afterwards after training at Michael Iosifovich Kadetsa's Kharkov school became the candidate of physical and mathematical sciences conducted scientific work. Michael Iosifovich by right is considered one of founders of the theory of equivalent renormings of the Banach spaces, turned now in independent area. The Kharkov school Kadetsa has at that time become world-famous. M.I.Kadets generously shared the mathematical ideas with the pupils. In paper some joint outcomes received by M.I.Kadetsem and its pupil in 1988-1990 which prepared for the publication in the form of joint paper but then have not been published because of high insistence which was shown to itself by outstanding Soviet mathematician M. I. Kadets, to insistence which can be an example for modern youth, especially for scientific youth are reduced. The study was carried out at the expense of budgetary funds according to the state assignment of the Financial University No. 15841p-P8.

Keywords: history of mathematics, functional analysis, Banach spaces, Tula mathematics, mathematicians of the Mikhail Iosifovich Kadets Kharkiv School

Bibliography: 30 titles.

For citation:
E. V. Manokhin, R. A. Zhukov, I. V. Bormotov, I. V. Dobrynina, E. A. Nazirova, 2023, “From history of one unpublished paper of M. I. Kadets” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 307–319.

1. Введение

В 1986 году после окончания математического факультета Тульского udинститута, автор поступил в аспирантуру Михаила Иосифовича Кадеца. О математической школе Кадецав городе Харькове он узнал за год до этого от своего учителя Рыбакова Владислава Ивановича.В это время Харьковская школа Михаила Иосифовича Кадеца уже получила мировую известность. В частности, о ней как об особом явлении в области теории банаховых пространств упоминает А. Пич в своей книге “History of Banach spaces and linear operators” (Birkhauser, 2007). Харьковской школе и годам сотрудничества с ней автор посвятил работу[1].

Заметим, что Владиславом Ивановичем Рыбаковым [2] получены глубокие, содержательные научные результаты[3-7]. Например, о ≪the classical theorem of Rybakov≫ можно прочитать в книгах и статьях, опубликованных в международной математической печати. Работа [8] 1970 года содержит эту самую "the classical theorem of Rybakov"(название взято нами, например, из англоязычных работ [9-10] 1997-1998 годов. Теперь поговорим о М.И. Кадеце.

«Михаил Иосифович **(30 ноября 1923 г.- 7 марта 2011 г.)** был блестящим и одновременно необычайно глубоким математиком, добрым и отзывчивым человеком, остроумным и приятным собеседником. Таким он и останется в нашей памяти» [11]. Среди полученных им выдающихся результатов, отметим, что Михаил Иосифович решил в положительном смысле давно стоявшую проблему Фреше–Банаха о гомеоморфизме всех сепарабельных бесконечномерных банаховых пространств. Этот замечательный результат сразу стал классическим[12-13].

Одним из средств, предложенных Михаилом Иосифовичем при решении этой проблемы, является построение эквивалентных норм, удовлетворяющих специальным условиям выпуклости. При этом оказалось, что техника эквивалентных норм эффективна в гораздо более широком круге проблем геометрии банаховых пространств и нелинейного анализа [14-21]. Михаил Иосифович по праву считается одним из создателей теории эквивалентных перенормировок банаховых пространств, превратившейся в настоящее время в самостоятельную область.

2. Из истории неопубликованной статьи М. И. Кадеца, Е. В. Манохина

Теория эквивалентных норм для банаховых пространств C(K) непрерывных функций на метрических компактах есть следствие теоремы Милютина и теории сепарабельных пространств Банаха (пространство C(K) сепарабельно в том и только том случае, если K — метрический компакт, сопряженное пространство к C(K) сепарабельно в том и только том случае, если K — счетный метрический компакт.Был установлен факт существования эквивалентных строго выпуклых и локально равномерно выпуклых норм на всех пространствах непрерывных функций, определенных на метрических компактах[22-23]. Для случая неметризуемых компактов теория до сих далека от завершения.

Среди всех компактов естественно выделяется класс компактов с первой аксиомой счетности. Он включает класс метрических компактов, но не совпадает с ним. Примеры неметризуемых компактов с первой аксиомой счетности: две стрелки, лексикографический квадрат, компакт Хелли и другие хорошо известны и приводятся в учебниках топологии[24].

М. И. Кадеца и Е.В. Манохин готовили статью, в которой рассматривали банахово пространство C(H) всех непрерывных функций f(x) на компакте Хелли с обычной нормой $||\mathrm{f}||_{\infty}$=$\max\{|f(x)| : x \in H\}$. Неизвестно, допускает ли C(H) эквивалентную локального равномерно норму. Более того, неизвестного обладает ли $C(H)$ эквивалентной нормой с H-свойством (мы вынуждены употреблять букву H в двух разных смыслах!). В это время начали выходит из печати работы Хейдона [25-29], которые подчеркнули значение H-свойства: из того, что банахово пространство X обладает H-свойством не следует, что оно имеетэквивалентную локального равномерно норму. В статье М. И. Кадеца и Е.В. Манохина была доказана теорема о том, что на банаховом пространстве $C(H)$ существует эквивалентная норма с H-свойством. Е.В. Манохин начал готовить статью к печати, сначала в виде рукописи, но внезапно получил письмо от Кадеца: Михаил Иосифович засомневался, что теорема в конце статьи вытекает из предшествующих рассуждений, он решил, что на самом деле требуется более сильная версия леммы 2. Манохину Е.В. показалась непонятным в чем проблема, но он подумал, что к статье можно вернуться позднее. Рукопись была положена в ящик стола. Публикация статьи был отложена и к ее рассмотрению авторы так и не вернулись. Представляем математической общественности эту неопубликованную работу, как часть истории математики.

Отметим что статья не была опубликованы из-за высокой требовательности, которую предьявлял к себе выдающийся советский математик М. И. Кадец, требовательности, которая может служить примером для современной молодежи, особенно для научной молодежи. Ценностный мир молодежи [30] должен отражать все многообразие современного российского общества и обладать своеобразием, уникальностью, неповторимостью, иметь отличительные особенности и черты.

Построение такого мира ценностей сегодня - одна из болевых точек не только российской молодежи, но и общества в целом, поскольку вакуум, образовавшийся в результате смены, трансформации социальных ценностей в постсоветский период должен быть преодолен.

3. Статья М. И. Кадеца,Е.В. Манохина «Компакт Хелли H и банахово пространство $C(H)$»

Компактом Хелли H называются множеством всех неубывающих, отображений $x = x(t)$ отрезка $[0; 1] = I$ в себя, наделенное топологией поточечной сходимости. В этой топологии компакт Хелли – неметризуемое сепарабельное топологическое пространство с первой аксиомой четности [24]. Кроме того H – выпуклое множество (выпуклое подмножество линейного пространства всех функция определённых на I). Фундаментальной системой окружностей элемента $x \in H$ являются «параллелепипеды» $O(x, S, \varepsilon) = \{y \in H : |x(t) - y(t)| < \varepsilon, t \in S.\}$, где S – конечное подмножество отрезка I.

Каждый элемент компакта Хелли – функция на I, непрерывная во всех точках кроме, быть может, счётного множества. Подмножество H, образованное всеми непрерывными элементами, обозначим H_c.

Предложение 1. *H_c-всюду плотное G_δ – подмножество в H.*

Доказательство. Рассмотрим множества $H(\varepsilon) \subseteq H$, таких элементов, для которых
$Oscx = max\{x(t + 0) - x(t - 0) : t \in I\} < \varepsilon$.
$H(\varepsilon)$ – открытое множество. Действительно, пусть для некоторого элемента $x_0 \in$H(ε) имеем $oscx_0 = \varepsilon_1$-ε. Возьмём конечное множество $S = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1\}$ так, чтобы все

разности $x(t_k) - x(t_{k-1}$ был менее чем $(\varepsilon_1 - \varepsilon)/2$. Возьмём $\delta = (\varepsilon_1 - \varepsilon)/4$. Пусть $y \in O(x_0, S, \delta)$. Тогда, если $t_{k-1} < t < t_(k)$, то $y(t+0) - y(t-0) \le y(t_k) - y(t_{k-1}) \le x(t_k) - y(t_k) + 2\delta < \varepsilon$.

Итак, для каждого $x_0 \in H(\varepsilon)$ найдётся окрестность целиком состоящая из точек $y \in H(\varepsilon)$. Так как $H_c = \cap_{n=1}^{\infty} H(1/n)$, то $H_c - -G_\delta$ множество в H. Плотность H_c в H проверяется непосредственно:
Если $x \in H, \mathrm{a} O(x, T, \varepsilon)$ – произвольная окрестность, то любая функция $y(t) \in H_c$, совпадающая с $x(t)$ в точках $t \in T$, а в остальном произвольная, принадлежит $O(x, T, \varepsilon)$.

Итак, множества H_c непрерывных элементов массивно в H. Отметим ещё одно свойство элементов из H_c. С этой целью на ряду с окрестностями $O(x, T, \delta)$, определяющими в H топологию поточечной сходимости, определим «равномерные окрестности»: $O(x, I, \varepsilon) =$
$= \{y \in H : |x(t) - y(t)| < \varepsilon, t \in I\}$.

Предложение 2. Если $x_0 \in H_c$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся T и $\delta > 0$ такие, что

$$O(x_0, I, \varepsilon) \supset O(x_0, T, \delta) \tag{1}$$

Доказательство: Так как $x_0(t)$ – непрерывная функция на 4, то найдется множество $T = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ такое, что $x_0(t_k) - x_0(t_{k-1}) < \varepsilon/2, 1 \le k \le n$. Пусть $y \in O(x_0, T, \varepsilon/2)$.Возьмем произвольное $t(t_{k-1} < t < t_k)$ и оценим разность $x(t) - y(t)$:

- $x(t) - y(t) = x(t_k) - y(t_{k-1} < x(t_k - (x(t_{k-1}) - \varepsilon/2)$;
- $x(t) - y(t) \ge x(t_{k-1}) - y(t_k) > x(t_{k-1}) - (x(t_k) + \varepsilon/2)$.

Итак, $|x(t) - y(t)| \le x(t_k) - x(t_{k-1}) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, откуда и следует включение (1) с $\delta = \varepsilon/2$.

Следствие. Если последовательность $(x_n)_1^{\infty} \subset H$ сходится поточечно к элементу $x \in H_c$, то она сходится и равномерно.

Топологическое пространство X называется **топологически однородным**, если для любых его элементов хи у найдется гомеоморфизм X на себя, переводящий хв у.Окружность однородна, отрезок не однороден (мешают концы). Известно, что каждый бесконечномерный выпуклый метрический компакт однороден [24].Неизвестно однороден ли компакт Хелли.

Перейдем к рассмотрению Банахова пространства $C(H)$ всех непрерывных функций $f(x)$ на компакте Хелли с обычной нормой $\|f\|_\infty = max\{|f(x)| : x \in H\}$. В силу неметризуемости компакта Хелли, пространство $C(H)$ несепарабельно. Поэтому для него актуален вопрос о существовании или не существовании «хороших» эквивалентных норм. Так как H - сепарабельный компакт , то $C(H)$ допускает эквивалентную строго выпуклую норму [22]. Неизвестно,допускает ли $C(H)$ эквивалентную локального равномерно норму. Более того, неизвестного обладает ли $C(H)$ эквивалентной нормой с H -свойством (мы вынуждены употреблять букву H в двух разных смыслах!) Напомним соответствующие определения.

Определение 1. *Банахово пространство X называется локально равномерно выпуклым, если для его элементов условия $\|x_n\| = \|x\| = 1$ и $lim\|x_n + x\| = 2$ влекут сильную сходимость: $lim\|x_n - x\| = 0$.*

Определение 2. *Банахово пространство X обладает H-свойством; если из условий x_n слабо сходится к x и $lim\|x_n\| = \|x\|$ следует сильная сходимость.*

Каждое локально равномерно выпуклое пространство обладает Н-свойством; обратное не обязательно. Более подробно по поводу эквивалентных норм в пространстве Банаха (см. [22-23]). Основная цель настоящей заметки – в предположении, что H-однородный компакт, доказать, что $C(H)$ обладает H-свойством. Для дальнейшего нам потребуется понятия, обобщающие на функции из $C(H)$ понятия модуля непрерывности функции из $C(I)$.

Определение 3. *Пусть T – конечное подмножество отрезка I (обозначение: $T \in F$) и $0 < \delta \leq 1$. Модулем непрерывности T функции $f \in C(H)$ назовём функционал $\omega(f, T, \delta) = sup\{|f(x) - f(y)| : x \in H, y \in H, y \in O(x, T, \delta)\}$.*

Равномерная непрерывность функции $f \in C(H)$ записывается так: $\forall \varepsilon \exists T \exists \delta : \omega(f, T, \delta) < \varepsilon$. Заметим, что при данном T число $\omega(f, T, +0) = lim_{\delta \to 0} \omega(f, T, \delta)$ не обязательно равно 0. В остальном T – модуль обладает всеми свойствами обычного модуля непрерывности.

Предложение 3. При данном T модуль непрерывности $\omega(f, T, \delta)$ обладает следующими свойствами:

$$\omega(f, T, \delta) - -\text{неубывающая непрерывная функция от} \delta. \tag{3.1}$$

$$\omega(f + g, T, \delta) \leq \omega(f, T, \delta) + \omega(g, T, \delta). \tag{3.2}$$

$$\omega(f, T, \delta + h) \leq \omega(f, T, \delta) + \omega(g, T, h). \tag{3.3}$$

$$\omega(\lambda f, T, \delta) = |\lambda| \omega(f, T, \delta). \tag{3.4}$$

Доказательство.

1. Модуль непрерывности функции на подмножестве не превышает модуля непрерывности функции на множестве, поэтому величина $\omega(f, T, \delta)$ есть убывающая функция от δ. Пусть $\delta_n \longrightarrow \delta_0$. Тогда $lim_{\delta_n \to \delta_0} \omega(f, T, \delta_n) = lim_{\delta_n \to \delta_0} sup\{|f(x) - f(y)| : x \in H, y \in O(x, T, \delta_n)\} = = sup\{|f(x) - f(y)| : x \in H, y \in O(x, T, \delta_0)\} = \omega(f, T, \delta_0)$.

   Таким образом $\omega(f, T, \delta)$ непрерывная функция от δ.

2. Для любых $x \in H, y \in O(x, T, \delta)$ выполнено $|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - - g(y)| \leq \omega(f, T, \delta) + \omega(g, T, \delta)$. Беря в левой части верхнюю грань по всем $x \in H, y \in \in O(x, T, \delta)$ получим $\omega(f + g, T, \delta) < \omega(f, T, \delta) + \omega(g, T, \delta)$.

3. Пусть $x_0 \in H$ и для простоты $\omega(f, T, \delta + h) = |f(x_0 + \delta + h) - f(x_0)|$.

   Так как $|f(x_0 + \delta + h) - f(x_0)| = |f(x_0 + \delta) - f(x_0) + f(x_0 + \delta + h) - f(x_0 + \delta)| \leq \| f(x_0 + \delta) - - f(x_0)| + |f(x_0 + \delta + h) - f(x_0 + \delta)| \leq \omega(f, T, \delta) + \omega(f, T, h)$, то $\omega(f, T, \delta + h) \leq \omega(f, T, \delta) + + \omega(f, T, h)$.

4. Для любых $x \in H, y \in O(x, T, \delta)$ выполнено $|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda(f(x) - f(y))| = = |\lambda||f(x) - f(y)|$.

   Беря верхнюю грань по всем $x \in H, y \in O(x, T, \delta)$ получим $\omega(\lambda f, T, \delta = |\lambda| \omega(f, T, \delta)$.

Определение 4. *Модулем непрерывности функции $f \in C(H)$ назовем функционал*

$$\omega(f, \delta) = inf\{\omega(f, T, \delta) : T \in F \}.$$

Предложение 2. *Модуль непрерывности $\omega(f,\delta)$ обладает следующими свойствами:*

$$lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta) = 0 для\ всех f \in C(H), \tag{4.0}$$

$$\omega(f,\delta) - -неубывающая\ непрерывная\ функция\ от \delta, \tag{4.1}$$

$$\omega(f+g,\delta) \leq \omega(f,\delta) + \omega(g,\delta), \tag{4.2}$$

$$\omega(f,\delta+h) \leq \omega(f,\delta) + \omega(f,h), \tag{4.3}$$

$$\omega(\lambda f,\delta) = |\lambda|\omega(f,\delta), \tag{4.4}$$

Доказательство. Утверждения 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 приложения 4 следуют, соответственно, из утверждения 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 приложения 3. Докажем 4.0: Пусть $\varepsilon_0 > 0$. Так как $f \in C(H)$ равномерно непрерывно, то $\exists T_0 \exists \delta_0 : \omega(f, T_0, \delta_0 < \varepsilon_0.(*)$ Из предложения 3 следует, что для любых δ, таких что $\delta < \delta_0$ выполнено $\omega(f, T_0, \delta)\} < \omega(f, T_0, \delta_0)(**)$

Сопоставляя (**) и (*) получим, что для $\delta < \delta_0$: $Inf\{\omega(f,T,\delta) : T \in F\} < \omega(f, T_0, \delta_0 < \varepsilon_0$ Это означает, что $\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta) = 0$.

Лемма 1. *Пусть$\gamma : H \to H$ – гомеоморфизм компакта Хелли на себя. Каждой функции $f(x) \in C(H)$ сопоставим функцию*

$$f = g(u) = f(\gamma u) = f(x).$$

Модули непрерывности этих функций связаны соотношением

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \omega(g,\delta) \leq \omega(f,\varepsilon).$$

Доказательство. Непрерывность (равномерная) отображения γ означает, что

$$\forall (S,\varepsilon) \exists (T,\delta) \forall u : \gamma O(u,T,\delta) \subset O(\gamma u, S, \varepsilon) \tag{2}$$

Напомним выражения для модулей непрерывности:

$$\omega(g,T,\delta) = sup\{|g(u) - g(\nu)| : u \in H, \nu \in O(u,T,\delta)\},$$

$$\omega(f,S,\varepsilon) = sup\{|f(x) - f(y)| : x \in H, y \in O(x,S,\varepsilon)\}. \tag{3}$$

Последнее выражение перепишем как:

$$\omega(f,S,\varepsilon) = sup\{|g(u) - g(\nu)| : u \in H, \gamma \in O(\gamma u, S, \varepsilon)\} \tag{4}$$

Сопоставляя 2, 3 и 4 получаем, что

$$\omega(g,T,\delta) \leq \omega(f,S,\varepsilon). \tag{5}$$

Возьмём S,(которое было до сих пор произвольным), таким чтобы для некоторого $\alpha > 0$ выполнялось в соответствии с определением 4 неравенство

$$\omega(f, S, \varepsilon) \leq \omega(f, \varepsilon) + \alpha \tag{6}$$

Сопоставив (5) и (6) и очевидное неравенство $\omega(g, T, \delta \geq \omega(g, \varepsilon)$, получим:

$$\omega(g, \delta) \leq \omega(f, \varepsilon) + \alpha,$$

что в силу произвольности α дает требуемое соотношение.

Лемма 2. *Допустим, что компакт Хелли топологически однороден. Пусть последовательность: $(fn_1)^\infty \subset C(H)$ сходится слабо (т.е. последовательность ограничена и сходится поточечно) к $f \in C(H)$ и пусть существует положительное число ζ и последовательность $(xn_1)^\infty \subset H$ сходящаяся к $\overline{x} \in H$,такие что*

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \zeta. \tag{7}$$

Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $n_0 \in N$, что

$$\omega(f, \varepsilon) = \frac{1}{6}\zeta \textit{и} \omega(f_n, \varepsilon) \geq \frac{1}{2}\zeta \textit{для любых} n \geq n_0. \tag{8}$$

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$ таким, чтобы выполнялось равенство из (8). Определим гомеоморфизм γ так, чтобы он переводил некоторый непрерывный элемент $\overline{u} \in H$в $\overline{x}$ из условия леммы: $\gamma\overline{u} = \overline{x}$ (если $\overline{x}$ сам непрерывен, то в качестве γ берём тождественное отображение, и доказательство существенно упрощается). Введём в рассмотрение функцию $g(u) = f(\gamma u)$= $f(x)$ и функцию $g_n(u)$, определение аналогично. Заметим, что для функций $g(u)$ и $g_n(u)$ сохраняется соотношение (7): $\gamma u_n = x_n$, $u_n \to \overline{u}$,

$$|g_n u_n - g(u_n)| \geq \zeta > 0. \tag{9}$$

Для введённого ε возьмём δ из леммы 1. Для каждого n пусть T_n – тот конечный набор значений t, для которого в силу определения 4 будет

$$\omega(g_n, \delta) \geq \omega(g_n,\ T_n, \delta) - \frac{1}{6}\zeta. \tag{10}$$

Возьмём n_0 настолько большим, чтобы для всех $n_0 \geq n$ выполнялись условия (11-13) ниже:

$$|u_n(t) - \overline{u}(t)| < \delta, \text{для всех} 0 \leq t \leq 1 \tag{11}$$

что возможно согласно предложению 2 (непрерывность $\overline{u}$)

$$|g(u_n) - g(u)| \leq \frac{1}{6}\zeta, \tag{12}$$

что возможно в силу непрерывности функции g;

$$|g_n(\overline{u}) - g(\overline{u})| \leq \frac{1}{6}\zeta, \tag{13}$$

что возможно в силу поточной сходимости $g_n \to g$.

Продолжим оценку (10), применив последовательно (11), (12), (13):

$$\omega(g_n, \delta) \geqslant \omega(g_n, S_n, \delta) - \frac{1}{6}\zeta \geqslant |g_n(u_n) - g_n(\overline{u})| - \frac{1}{6}\zeta \geqslant$$
$$\geqslant |g_n(u_n) - g(u_n)| - |g(u_n) - g(\overline{u})| - |g(\overline{u}) - g_n(\overline{u})| - \frac{1}{6}\zeta \geqslant \frac{1}{2}\zeta.$$

Воспользовавшись неравенством из леммы 1, получим требуемую оценку (8).

Теорема. Если компакт Хелли топологически однороден, то на банаховом пространстве $C(H)$ существует эквивалентная норма с H-свойством.

Доказательство. Искомую эквивалентную норму определим формулой:

$$||f|| = ||f||_\infty + \int_0^1 \omega(f,\tau)d\tau \qquad (*)$$

Пусть последовательность: $f_{n1}^{\infty} \subset C(H)$ сходится к $f \in C(H)$ слабо, но не сильно.

Не ограничивая общности, будем считать, что существует (как в лемме 2) $\zeta > 0$ и сходящаяся последовательность $x_n \to \overline{x}$ такая, что $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \zeta$.

Согласно лемме 2 при этом найдется число $\delta > 0$, для которого, начиная с некоторого n_0, будем иметь $\omega(f,\delta) = \frac{1}{6}\zeta$ и $\omega(f_n,\delta) \geqslant \frac{1}{2}\zeta$. (8)

Рассмотрим поведение интеграла от модуля непрерывности на отрезке $[\delta, 2\delta]$,

опираясь на оценки (8):

$$\int_\delta^{2\delta} \omega(f_n,\tau)d\tau \geqslant \omega(f_n,\delta)\cdot\delta \geqslant \frac{\delta\zeta}{2}$$

$$\int_\delta^{2\delta} \omega(f,\tau)d\tau \leqslant \omega(f,2\delta)\cdot\delta \leqslant 2\omega(f,\delta)\cdot\delta = \frac{\delta\zeta}{3}$$

$$\text{Значит,} \int_\delta^{2\delta} \omega(f_n,\tau)d\tau \geqslant \int_\delta^{2\delta} \omega(f,\tau)d\tau + \frac{\delta\zeta}{6} \qquad (14)$$

Оценим снизу $\underline{\lim}_n \to \infty ||f_n||$:

$$\underline{\lim}||f_n|| \geqslant \underline{\lim}||f_n||_\infty + \underline{\lim}\int_0^\delta \omega(f_n,\tau)d\tau + \underline{\lim}\int_\delta^{2\delta} \omega(f_n,\tau)d\tau + \underline{\lim}\int_{2\delta}^1 \omega(f_n,\tau)d\tau.$$

Для каждого из слагаемых имеем:

$$\underline{\lim}||f_n||_\infty \geqslant ||f||_\infty, \underline{\lim}\int_0^\delta \omega(f_n,\tau)d\tau \geqslant \int_0^\delta \omega(f,\tau)d\tau$$

$$\underline{\lim}\int_{2\delta}^1 \omega(f_n,\tau)d\tau \geqslant \int_{2\delta}^1 \omega(f,\tau)d\tau$$

$$\underline{\lim}\int_\delta^{2\delta} \omega(f_n,\tau)d\tau \geqslant \int_\delta^{2\delta} \omega(f,\tau)d\tau + \frac{\delta\zeta}{6}$$

Все эти неравенства, кроме последнего, следуют из теоремы Хана—Банаха в силу однородной выпуклости функционалов $||f||_\infty$ и $\omega(f,\tau)$ (см.[22]). Последнее же неравенство получается из (14).

Все эти оценки дают нам:

$$\underline{\lim}||f_n|| \geqslant ||f|| + \frac{\delta\zeta}{6}$$

откуда и следует, что норма $(*)$ обладает H-свойством.

4. Заключение

В этой небольшой статье, касающейся времени 1988-1990 гг., выпускаемой к 35-летию неопубликованной работы представителя Тульской математической школы и выдающегося руководителя Харьковской математической школы Михаила Иосифовича Кадеца, мы видим пример сотрудничества в научном творчестве того периода. Он дает представление о том, как формировались научные направления того периода, периода последних лет СССР.

Статья подготовлена по результатам исследований выполненных за счет бюджетных средств по государственному заданию Финуниверситета № 15841п-П8 «Социологический портрет ценностного мира молодежи в субъектах Российской Федерации».

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. В Манохин, Н. О. Козлова, В. Э. Комов. Харьковская школа М. И. Кадеца и математикиТулы // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 323–330.

2. Е. В. Манохин, А. Е. Устян, Г. В. Кузнецов. Ученый и педагог. К 80-летнему юбилею Владислава Ивановича Рыбакова (13.12.1939–27.09.2016) // Чебышевский сборник, 2019, т. 20,вып. 4 с. 450 – 457.

3. В. И. Рыбаков, “Об условных математических ожиданиях для интегрируемых в смысле Петтиса функций”, Матем. заметки, 10:5 (1971), 565–570; Math. Notes, 10:5 (1971), 764–767

4. В. И. Рыбаков, “О векторных мерах со значениями в локально выпуклых пространствах”, Функц. анализ и его прил., 7:4 (1973), 95–96; Funct. Anal. Appl., 7:4 (1973), 339–340

5. В. И. Рыбаков, “Выделение из векторной меры части, представимой интегралом Бохнера”, Матем. заметки, 17:5 (1975), 797–808; Math. Notes, 17:5 (1975), 476–482

6. В. И. Рыбаков, “Одно обобщение интеграла Бохнера на случай локально выпуклых пространств”, Матем. заметки, 18:4 (1975), 577–588; Math. Notes, 18:4 (1975), 933–938

7. В. И. Рыбаков, “Некоторые случаи сведения изучения слабо интегрируемых функций к изучению функций, интегрируемых в смысле Петтиса”, Изв. вузов. Матем., 1975, № 11, 98–101; SovietMath. (Iz. VUZ), 19:11 (1975), 84–86

8. В. И. Рыбаков, “К теореме Бартла–Данфорда–Шварца о векторных мерах”, Матем. заметки, 7:2 (1970), 247–254; Math. Notes, 7:2 (1970), 147–151.

9. W. J. Ricker. Rybakov s theorem in Frechet spaces and completeness of L1-spaces. Austral. Math. Soc. (Series A) 64 (1998). 247-252

10. A. Fernandez and F. Naranjo, ‘Rybakov’s theorem for vector measures in Frechet spaces’. Indag. Math. (NewSeries) 8 (1997), 33—42.

11. Ю. И. Любич, В. А. Марченко, С. П. Новиков, М. И. Островский, Л. А. Пастур, А. Н. Пличко, М. М. Попов, Е. М. Семёнов, С. Л. Троянский, В. П. Фонф, Е. Я. Хруслов, “Михаил Иосифович Кадец (некролог)”, УМН, 66:4(400), (2011), 179–180; RussianMath. Surveys, 66:4 (2011), 809–811

12. Кадец М.И. Топологическая эквивалентность всех сепарабельных банаховых пространств. // ДАН СССР. 1966, Том 167. С. 23-25.

13. М. И. Кадец, “Доказательство топологической эквивалентности всех сепарабельных бесконечномерных пространств Банаха”, Функц. анализ и его прил., 1:1 (1967), 61–70

14. Милютин А.А. Изоморфность пространств непрерывных функций над компактами континуальной мощности. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1966. Вып 2. С. 150-156.

15. Кадец М.11. Топологическая эквивалентность всех сепарабельных банаховых пространств. // ДАН СССР. 1966, Том 167. С. 23-25.

16. Clarkson J.A. Uniformly convex spaces. // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. v. 40. 3. P. 396-414.

17. Lovaglia A.R. Locally uniformly convex Banach spaces. // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. v. 78 1. P. 225-238.

18. Кадец М.И. О пространствах изоморфных локально равномерно выпуклым пространствам // Изв. вузов. Математика. 1959. Т. 6. С. 51-57.

19. Lindenstrauss J. Weakly compacts sets-their topological properties and Banach spaces they generate. // Ann. Math. Studies. 1972. v. 69. P. 235-273.

20. Троянски С.Л. Об эквивалентных нормах и минимальных системах в несепарабельных пространствах Банаха. // Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1972. т. 43. с. 125-138.

21. Кадец М.И. О связи между слабой и сильной сходимостью. // ДАН УССР. 1959. У 9. с. 949-952.

22. BeazamvB. Introduction to Banach Spaces and their Geometry. Oxford. 1985. s. 334.

23. Deville R., Godefrov G., Zizler V. Smoothness and renorming in Banach spaces. Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics . Math. 64, Longman scientific and technical, Longman house, Burnt mill. Harrow. 1993.

24. Александров И.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. Москва: Изд-во Наука, 1977. 370 с.

25. Havdon R.G. Trees in renorming theory. // Proc. London Math. Soc. 1999. Vol. 78. P. 541-584.

26. Havdon R.G., Zizler V. A new spaces with no locally uniformly rotund renorming. // Can. Math. Bull. 1989. Vol. 32(1). P. 122-128.

27. Havdon R.G., Hajek Petr. Smooth norms and approximation in Banach spaces of the type C(K). // The Quarterly Journal of Mathematics. 2007. Vol. 58. P. 221-228.

28. Havdon R.G., Locally uniformly convex norms in Banach spaces and their duals.// J. Funct. Anal. 2008. Vol. 254(8). P. 2023-2039.

29. Havdon R.G., Argvros S.A. A hereditarily indecomposable L-infinitv-space that solves the scalar-plus-compact problem. // ACTA MATHEMATICA. 2011. Vol. 206(1). pp. 1–54.

30. Бормотов И.В, Ценностный мир современной российской молодежи (социально-философский анализ: монография / И.В. Бормотов. - Москва: ИнФРА-м, 2022.-178с

REFERENCES

1. Manokhin, E. V., Kozlova, N. O., Komov, V. E. 2021, "Kharkiv school of M. I. Kadets and mathematics of Tula", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 323–330.

2. Manokhin, E. V., Ustyan, A. E., Kuznetsov, G. V. 2019, "Scholar and teacher. To the 80-th anniversary of Vladislav Ivanovich Rybakov (13.12.1939–27.09.2016)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20,no. 4, pp. 450–457.

3. Rybakov, V. I. 1971, "On conditional mathematical expectations for functions integrable in the Pettis sense", *Math. Notes*, 10:5, pp.764–767.

4. Rybakov, V. I. 1973, "Vector measures with values in locally convex spaces", *Funct. Anal. Appl.*, 7:4, pp. 339–340 .

5. Rybakov, V. I. 1975, "The separation from a vector measure of the part representable by a Bochner integral", *Math. Notes*, 17:5, pp.476–482

6. Rybakov, V. I. 1975, "A generalization of the Bochner integral to locally convex spaces", *Math. Notes*, 18:4, pp.933–938

7. Rybakov, V. I. 1975, "Certain cases of the reduction of the study of weakly integrable functions to the study of Pettis-integrable functions", *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 19:11, pp.84–86.

8. Rybakov, V. I. 1968, "The Radon-Nikodým theorem and the representation of vector measuresby an integral", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, (Russian), 180, pp. 282–285.

9. Rybakov, V. I., 1970, "Theorem of Bartle, Dunford, and Schwartz concerning vector measures", *(English. Russian original) Math. Notes* 7, pp. 147-151; *translation from Mat. Zametki* 7:2, pp. 247–254.

10. Fernandez, A. and Naranjo, F. 1997, "Rybakov's theorem for vector measures in Frechet spaces" *Indag. Math. (New Series)*, 8, pp.33—42.

11. Lyubich, Yu. I., Marchenko, V. A., Novikov, S. P., Ostrovskii, M. I., Pastur, L. A., Plichko, A. N., Popov, M. M., Semenov, E. M., Troyanskii, S. L., Fonf V. P., Khruslov, E. Ya. 2011, "Mikhail Iosifovich Kadets (obituary)", *Russian Math. Surveys*, 66:4, pp.809–811.

12. Kadets M. I. 1966, "Topological equivalence of all separable Banach spaces", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol.167, pp.23-25. (Russian)

13. Kadets, M. I. 1967, "Proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces", *Funct. Anal. Appl.*, 1:1, pp. 61–70.

14. Milvutin A. A. 1966, "Isomorphism of spaces of continuous functions over compact sets of continuum cardinality", *The Function theory, a functional analysis and their applications*, vol 2, pp. 150–156. (Russian)

15. Kadets M. I. 1966, "Topological equivalence of all separable Banach spaces", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol.167, pp.23–25. (Russian)

16. Kadets M. I. 1967, "Proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces",*Funktsional. Anal, i Prilozhen*, vol. 1, № 1, pp. 61–70. (Russian)

17. Lovaglia A.R. 1955, "Locally uniformly convex Banach spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 78(1), pp.225–238.

18. Kadets M. I. 1959, “Spaces isomorphic to a locally uniformly convex space”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, vol.6, pp.51–57. (Russian)

19. Lindenstrauss J. 1972, “Weakly compacts sets-their topological properties and Banach spaces they generate”, *Ann. Math. Studies*, vol.69, pp.235–273.

20. Trojanski S.L. 1972, “About equivalent norms and the minimum systems in nonseparable Banach spaces”, *The Function theory, Funkts. analysis and their applications*, vol.43, pp.125–138. (Russian)

21. Kadets M. I. 1959, “About connection between weak and a strong convergence”, *DAN UkrSSRAM.* pp.949–952. (Russian)

22. Beazamy B. 1985, “Introduction to Banach Spaces and their Geometry”, *Oxford.*

23. Deville R. Godefroy G. Zizler V. 1993, “Smoothness and renorming in Banach spaces”, *Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics. Math. 64, Longman scientific and technical, Longman house, Burnt mill, Harrow.*

24. Aleksandrov P. S. 1977, “Introduction in the theory of sets and the general topology”, *The Science, Moscow.*

25. Haydon R.G. 1999, “Trees in renorming theory”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 78, pp. 541–584.

26. Haydon R.G., Zizler V. 1989, “A new spaces with no locally uniformly rotund renorming”, *Can. Math. Bull.*, vol. 32(1), pp. 122–128.

27. Haydon R.G., Petr Hajek. 2007, “Smooth norms and approximation in Banach spaces of the type C(K)”, *The Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 58, pp. 221–228.

28. Haydon R.G. 2008, “Locally uniformly convex norms in Banach spaces and their duals”, *J. Funct. Anal.*, vol. 254(8), pp. 2023–2039.

29. Haydon R.G., Argyros S.A. 2011, “A hereditarily indecomposable L-infinity-space that solves the scalar-plus-compact problem”, *ACTA MATHEMATICA*, vol. 206(1), pp. 1–54.

30. BormotovI.V. 2022, “The valuable world of modern Russian youth (The social-philosophical analysis: the monography), *Infra-M, Moscow.*

Получено: 17.05.2023
Принято в печать: 21.12.2023