

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-289-306

Дифракция звука от точечного источника на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи упругой границы

Д. Ю. Ефимов

Ефимов Дмитрий Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции сферической монохроматической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием, расположенном вблизи границы полупространств. Полагается, что цилиндр находится в верхнем полупространстве, заполненном идеальной однородной жидкостью, граничащем с однородным упругим полупространством.

Для представления рассеянного поля в идеальной жидкости используется представление в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа, которое впоследствии сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье соответствующих разложений полного потенциала поля и его нормальной производной в жидком полупространстве.

Колебания неоднородного изотропного упругого слоя описываются общими уравнениями движения сплошной среды. Для нахождения поля смещений в неоднородном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Методом перевала получена асимптотическая формула для дальней зоны поля.

Представлены численные расчеты угловых характеристик рассеянного поля. Выявлено существенное влияние непрерывно-неоднородных покрытий, а также присутствия плоскости вблизи цилиндрического рассеивателя, на дифракционную картину рассеянного поля.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, однородный упругий цилиндр, неоднородное упругое покрытие.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:

Д. Ю. Ефимов. Дифракция звука от точечного источника на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи упругой границы // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 289–306.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-289-306

Diffraction of sound from a point source on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the elastic boundary

D. Yu. Efimov

Efimov Dmitrii Yurevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).*e-mail: bogart.efimov@yandex.ru***Abstract**

In paper the problem of the diffraction of a spherical monochromatic sound wave on a homogeneous isotropic elastic cylinder with a radially inhomogeneous elastic coating located near the boundary of half-spaces. It is assumed that the cylinder is located in the upper half-space filled with an ideal homogeneous liquid bordering on a homogeneous elastic half-space.

To represent a scattered field in an ideal fluid, a representation in the form of the Helmholtz-Kirchhoff integral is used, which is subsequently reduced to a system of linear algebraic equations with respect to the Fourier coefficients of the corresponding expansions of the total potential of the field and its normal derivative in a liquid half-space.

The oscillations of an inhomogeneous isotropic elastic layer are described by the general equations of motion of a continuous medium. To find the displacement field in an inhomogeneous coating, a boundary value problem for a system of second-order ordinary differential equations is constructed.

The asymptotic formula for the far field zone is obtained by the steepest descent method.

Numerical calculations of the angular characteristics of the scattered field are presented. A significant influence of continuously inhomogeneous coatings, as well as the presence of a plane near a cylindrical diffuser, on the diffraction pattern of the scattered field is revealed.

Keywords: diffraction, sound waves, uniform elastic cylinder, inhomogeneous elastic coating.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

D. Yu. Efimov, 2023, “Diffraction of sound from a point source on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the elastic boundary”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 289–306.

1. Введение

Задачи дифракции плоских гармонических звуковых волн на изотропных упругих телах цилиндрической формы обсуждались в ряде работ. Например, случай нормального падения на однородный упругий цилиндр исследовался в [1], а случай наклонного падения – в [2]. В работах [3,4] решались задачи рассеяния наклонно падающей звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием. При этом в работе [3] покрытие полагалось радиально-неоднородным, а в [4] – дискретно-неоднородным.

Однако падающую волну можно считать плоской, если расстояние от источника звука до рассеивателя значительно больше длины волны. На практике приходится учитывать криволинейность фронта падающей волны. Поэтому изучение дифракции звуковых волн, излучаемых цилиндрическими и сферическими источниками, представляет значительный интерес.

Рассеяние цилиндрической волны на упругом цилиндре рассматривалось в [5], а задача дифракции цилиндрических звуковых волн упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием решена в [6]. Задачи дифракции сферических звуковых волн на рассеивателях цилиндрической формы являются значительно более сложными по сравнению со случаями дифракции плоских и цилиндрических форм, так как геометрия тела и фронта падающей волны в этом случае различны. Такие задачи исследовались в [7-9]. В [7] решается задача дифракции сферической звуковой волны однородным упругим цилиндром с применением потенциалов Дебая. В [8] показано, что решение задачи рассеяния сферических звуковых волн на упругом рассеивателе цилиндрической может быть получено с использованием известного решения рассеяния наклонно падающей плоской звуковой волны, а в [9] данный подход был применен для случая упругого цилиндра с неоднородным упругим покрытием.

В ряде работ исследовалась возможность изменения звукоотражающих свойств тел с помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий путем выбора соответствующих законов неоднородности для механических параметров покрытия. Например, моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [10].

В упомянутых выше работах полагалось, что цилиндрические тела располагаются в безграничном пространстве. Однако в реальности тела находятся в присутствии ограничивающих поверхностей, влияние которых на рассеянное акустическое поле является значительным. В работах [11-14] решались задачи рассеяния плоской звуковой волны упругим цилиндром с радиально-неоднородным покрытием, расположенном вблизи идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой) поверхности. В [11, 12] рассматривался случай нормального падения, а в [13, 14] – случай наклонного падения. При этом в [11, 13] решались прямые задачи дифракции, а в [12, 14] обратные задачи о моделировании неоднородных покрытий с требуемыми звукоотражающими свойствами. Во всех четырех работах задача решалась методом мнимых источников. В [15] с использованием интегральной теоремы Гельмгольца-Кирхгофа получено решение задачи дифракции звука на однородном изотропном упругом цилиндре, находящемся вблизи упругого или импедансного полупространства. Используя тот же подход, в [16] была рассмотрена задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства. При этом следует отметить, что метод, используемый в [15,16] не ограничивает тип рассматриваемой звуковой волны.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с упругим радиально-неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный однородный и изотропный упругий цилиндр радиуса r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного упругого изотропного слоя, внешний радиус которого равен r_1 . Цилиндр с покрытием находится в идеальной жидкости с плотностью ρ_* и скоростью звука c , граничащей с однородным изотропным упругим полупространством с плотностью ρ_1 и упругими постоянными λ_1 и μ_1 . Ось цилиндра параллельна границе упругого полупространства и отстоит от неё на расстоянии d .

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z так, чтобы координатная ось z совпадала с осью вращения цилиндра. С прямоугольной системой координат свяжем цилиндрическую систему координат r, φ, z .

Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией ради-

альной координаты r , а модули упругости материала покрытия λ и μ – дифференцируемыми функциями координаты r . В системе координат x, y, z граница упругого полупространства определяется уравнением $y = -d$.

В полупространстве, заполненном идеальной жидкостью, находится точечный источник, который генерирует гармоническую сферическую звуковую волну с частотой ω и амплитудой A . Положение источника определяется точкой M_0 , имеющей цилиндрические координаты (r_i, φ_i, z_i) . Точка наблюдения M имеет координаты (r, φ, z) .

Определим акустическое поле в жидком полупространстве.

3. Аналитическое решение

Потенциал скорости гармонической звуковой волны, излучаемой сферическим источником в свободном пространстве, представим в виде

$$\Psi_0 = AG_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i) \exp(-i\omega t), \quad (1)$$

где A – амплитуда; $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i) = \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|)}{4\pi|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|}$ – трехмерная функция Грина для свободного пространства; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_i$ – радиус-векторы точек M и M_0 ; t – время. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается.

Потенциал скорости полного акустического поля в жидком полупространстве будем искать в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}, \quad (2)$$

где Ψ_{s1} – потенциал скорости волны, отраженной от упругой поверхности; Ψ_{s2} – потенциал скорости рассеянной цилиндром волны (с учетом многократного переотражения между цилиндром и упругой поверхностью).

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в содержащей жидкости определяются формулами

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_*\omega \Psi.$$

Полное звуковое поле в верхнем полупространстве удовлетворяет интегральному уравнению Гельмгольца [17]

$$\Psi(\mathbf{R}) = AG(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i) + \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega. \quad (3)$$

Здесь $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ – трехмерная функция Грина для уравнения Гельмгольца; $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, Ω_1 – поверхность упругого полупространства, Ω_2 – внешняя поверхность покрытия цилиндра. При интегрировании по поверхности Ω_1 точка $\mathbf{R}_2$ находится на поверхности полупространства и дифференцирование выполняется по внешней нормали к поверхности Ω_1 , а в интеграле по поверхности Ω_2 точка $\mathbf{R}_2$ находится на поверхности цилиндра и дифференцирование происходит по внешней нормали к поверхности Ω_2 .

Используя разложение сферической звуковой волны по цилиндрическим волновым функциям, представим $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ в виде [18]

$$G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_o(h) dh, \quad (4)$$

$$\tilde{G}_o(h) = e^{ih(z-z_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_2)} \begin{cases} J_n(k_h r) H_n(k_h r_2), & r < r_2; \\ J_n(k_h r_2) H_n(k_h r), & r > r_2, \end{cases}$$

где $J_n(x)$ и $H_n(x)$ – цилиндрические функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка n соответственно, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$.

Для того, чтобы в (3) исключить интегрирование по бесконечной поверхности Ω_1 , воспользуемся функцией Грина [16]

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) + G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2), \quad (5)$$

где $G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ – некоторая функция, представляющая акустическое поле, полученное при отражении первичной волны $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ от поверхности Ω_1 . Таким образом функция Грина (5) определяет поле точечного источника в пространстве внешнем к поверхности Ω_1 , т.е. является функцией Грина полупространства.

Запишем функцию (4) в декартовой системе координат. Воспользуемся теоремой сложения для цилиндрических волновых функций [18]

$$H_0(k_h |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi - \varphi_2)} \begin{cases} J_n(k_h r) H_n(k_h r_2), & r < r_2; \\ J_n(k_h r_2) H_n(k_h r), & r > r_2. \end{cases}$$

Такое выражение содержится в формуле (4). Определим связь между декартовыми и цилиндрическими координатами выражениями $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x_2 = r_2 \cos \varphi_2$, $y_2 = r_2 \sin \varphi_2$. Тогда используя интегральное представление цилиндрической функции Ганкеля первого рода нулевого порядка [18]

$$H_0(k_h |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \exp[ik_h \sin \varphi_1 (x - x_2) + ik_h \cos \varphi_1 (y - y_2)] d\varphi_1,$$

где Γ – контур Зоммерфельда на комплексной плоскости φ_1 (пределы интегрирования от $-\pi/2 + i\infty$ до $\pi/2 - i\infty$), получим выражение для $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$, записанное в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) &= \frac{\exp(ik |\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|)}{4\pi |\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|} = \\ &= \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik_h \xi (x - x_2) + ik_h \eta (y - y_2) + ih(z - z_2)] \frac{d\xi dh}{\eta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда, основываясь на (6), функция $G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ может быть записана как

$$G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A'(\xi, h) \exp[ik_h \xi (x - x_2) + ik_h \eta (y + y_2) + ih(z - z_2)] \frac{d\xi dh}{\eta}, \quad (7)$$

где $A'_1(\xi, h) = \exp(i2k_h d\eta) A_1(\xi, h)$, $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}$, $A_1(\xi, h)$ – коэффициент отражения плоской волны единичной амплитуды, падающей на упругое полупространство.

Функция Грина (5) удовлетворяет на поверхности раздела идеальной жидкости и упругой поверхности тем же граничным условиям что и потенциал скорости акустического поля

$$y = -d: \quad -i\omega u_{1y} = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \sigma_{1yy} = -i\omega \rho_* G, \quad \sigma_{1xy} = 0, \quad \sigma_{1zy} = 0,$$

где u_{1y} и σ_{1yy} , σ_{1xy} , σ_{1zy} – нормальная компонента вектора смещения и компоненты тензора напряжений в упругом полупространстве. При таком выборе функции Грина интеграл по поверхности полупространства Ω_1 в (3) обращается в ноль, и остается только интеграл по поверхности цилиндра Ω_2 .

Задача об отражении плоской звуковой волны, падающей на границу раздела идеальной жидкости и упругой поверхности решена в [19]. Коэффициент отражения плоской волны, падающей на границу полупространств под полярным и азимутальным углами падения θ_1 , φ_1 имеет вид

$$A_1(\varphi_1, \theta_1) = \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}, \quad (8)$$

где

$$d_1 = k_y [\lambda_1 k_{1l}^2 (2k_{1\tau y}^2 - k_{1\tau}^2) + 2\mu_1 k_{1ly} (k_{1ly} (2k_{1\tau y}^2 - k_{1\tau}^2) + 2k_{1\tau y} (k_x^2 + k_z^2))] ,$$

$$d_2 = k_{1ly} k_{1\tau}^2 \omega^2 \rho_*$$

Здесь $k_x = k \sin \theta_1 \sin \varphi_1$, $k_y = k \sin \theta_1 \cos \varphi_1$, $k_z = k \cos \theta_1$; $k_{1l} = \omega/c_{1l}$ и $k_{1\tau} = \omega/c_{1\tau}$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн в упругом полупространстве; $c_{1l} = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1}$ и $c_{1\tau} = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ – скорости продольных и поперечных волн; $k_{1ly} = \sqrt{k_{1l}^2 - k_x^2 - k_z^2}$, $k_{1\tau y} = \sqrt{k_{1\tau}^2 - k_x^2 - k_z^2}$.

Выполняя в (7) замену переменных $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x_2 = r_2 \cos \varphi_2$, $y_2 = r_2 \sin \varphi_2$, $\xi = \sin \varphi_1$, $\eta = \cos \varphi_1$ а в (8) $k_x = k_h \sin \varphi_1$, $k_y = k_h \cos \varphi_1$, $k_z = h$, $G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ примет вид

$$G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma} A'_1(\varphi_1, h) \exp[ih(z - z_2)] \times$$

$$\times \exp[ik_h r \sin(\varphi + \varphi_1)] \exp[-ik_h r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] d\varphi_1 dh.$$

Используя разложение [18]

$$\exp(\pm ikr \sin \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^m J_m(kr) \exp(im\varphi),$$

получим

$$G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma} A'_1(\varphi_1, h) e^{ih(z-z_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_h r) \exp[in(\varphi + \varphi_1)] \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k_h r_2) \exp[im(\varphi_1 - \varphi_2)] d\varphi_1 dh. \quad (9)$$

Определим потенциал скорости полного акустического поля на внешней поверхности покрытия цилиндра Ω_2 . Представим его, а также нормальную составляющую скорости частиц жидкости на поверхности Ω_2 в виде рядов Фурье по координате φ и интегралов Фурье по координате z

$$\Psi|_{r=r_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma z} \sum_{q=-\infty}^{\infty} p_q(\sigma) \exp(iq\varphi) d\sigma, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{r=r_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma z} \sum_{q=-\infty}^{\infty} v_q(\sigma) \exp(iq\varphi) d\sigma, \quad (11)$$

где $p_q(\sigma)$ и $v_q(\sigma)$ – коэффициенты, подлежащие определению.

В уравнении (3) устремим точку наблюдения на поверхность Ω_2 и учтем, что при выборе функции Грина в виде (5) достаточно ограничиться интегрированием по поверхности Ω_2 . Подставим в левую часть (3) разложение (10), а в первое слагаемое правой части (3) – функцию

Грина в виде суммы (5), составленной из суммы выражений (4) и (9), в которых r_2, φ_2 следует заменить на r_i, φ_i . В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что координата положения сферического источника $z_i = 0$. Далее подставим разложения (10), (11) и функцию Грина (5) в подынтегральное выражение уравнения (3). При этом дифференцирование по нормали следует выполнять по переменной r_2 . При выполнении дифференцирования выражения (4) следует выбрать нижнюю строчку в первом слагаемом, определяемым формулой (8). После выполнения дифференцирования следует положить $r = r_2 = r_1$.

Осуществляя интегрирование по поверхности цилиндра $d\Omega_2 = r_1 d\varphi_2 dz_2$, $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$, $z_2 \in (-\infty, \infty)$, при интегрировании по координате z_2 будем пользоваться следующими свойствами [17]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\sigma - h)z] dz = 2\pi\delta(\sigma - h),$$

$$\int_a^b f(\sigma)\delta(\sigma - h)d\sigma = f(h), \quad \sigma \in [a, b],$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $p_q(h)$ и $v_q(h)$

$$p_q(h) + \alpha_q(h)v_q(h) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\beta_{qn}^{(1)}(h)p_n(h) + \beta_{qn}^{(2)}(h)v_n(h)] = X_q(h), \quad (12)$$

$$q = -\infty, \dots, \infty, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad h = -\infty, \dots, \infty, \quad h \in \mathbb{R},$$

где

$$\alpha_q(h) = \frac{H_q(k_h r_1)}{k_h H'_q(k_h r_1)},$$

$$\beta_{qn}^{(1)}(h) = (-1)^n \frac{J'_n(k_h r_1)}{H'_q(k_h r_1)} g_{n+q}(h), \quad \beta_{qn}^{(2)}(h) = (-1)^{n+1} \frac{J_n(k_h r_1)}{k_h H'_q(k_h r_1)} g_{n+q}(h),$$

$$X_q(h) = -\frac{A}{4\pi^2 k_h r_1 H'_q(k_h r_1)} \left[H_q(k_h r_i) \exp(-iq\varphi_i) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k_h r_i) \exp(-im\varphi_i) g_{m+q}(h) \right],$$

$$g_l(h) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} A_1(\varphi_1, h) \exp[i(2k_h d \cos \varphi_1 + l\varphi_1)] d\varphi_1.$$

$$g_l(h) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} A_1(\varphi_1, h) \exp[i(2k_h d \cos \varphi_1 + l\varphi_1)] d\varphi_1.$$

Для вычисления коэффициентов $g_l(h)$ следует выполнить замену $\xi_1 = \sin \varphi_1$, $\eta_1 = \cos \varphi_1$. В таком случае интегралы будут вычисляться не по комплексному контуру Γ , а по вещественной прямой

$$g_l(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A'_1(\xi_1, h) (\eta_1 + i\xi_1)^l \frac{d\xi_1}{\eta_1}, \quad (13)$$

где $A'_1(h, \xi_1) = \exp(i2k_h d \eta_1) A_1(h, \xi_1)$. Следует отметить, что при осуществлении интегрирования в (13) функция $A_1(h, \xi_1)$ может обращаться в бесконечность в некоторых точках $\xi^*(h)$.

Однако все такие точки являются интегрируемыми особыми точками в смысле в главного значения.

Теперь воспользуемся результатами работы [9]. Согласно [9] компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом покрытии представляются в виде рядов Фурье по координате φ и интегралов Фурье по координате z

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{1q}(r, h) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] dh, \\ u_\varphi(r, \varphi, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{2q}(r, h) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] dh, \\ u_z(r, \varphi, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{3q}(r, h) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] dh, \end{aligned} \quad (14)$$

где функции $U_{1q}(r, h)$, $U_{2q}(r, h)$, $U_{3q}(r, h)$ для каждого q и h являются решением следующей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\hat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}_q'' + \hat{\mathbf{B}}_q \mathbf{U}_q' + \hat{\mathbf{C}}_q \mathbf{U}_q = 0, \quad (15)$$

где $\mathbf{U}_q = (U_{1q}(r, h), U_{2q}(r, h), U_{3q}(r, h))^T$; $\hat{\mathbf{A}}_q$, $\hat{\mathbf{B}}_q$, $\hat{\mathbf{C}}_q$ – матрицы третьего порядка с элементами, приведенными в [9].

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц неоднородной упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

при $r = r_1$:

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad (16)$$

где u_r и v_r – нормальные компоненты векторов смещения и скорости; σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz} – компоненты тензора напряжений в упругом неоднородном покрытии.

Используя обобщенный закон Гука [20] с учетом (14), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[(\lambda + 2\mu) U_{1q}'(r, h) + \frac{\lambda}{r} (U_{1q}(r, h) + iqU_{2q}(r, h) + ihrU_{3q}(r, h)) \right] \Omega_q(\varphi, z, h) dh, \\ \sigma_{r\varphi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu \left[\frac{iq}{r} U_{1q}(r, h) + U_{2q}'(r, h) - \frac{U_{2q}(r, h)}{r} \right] \Omega_q(\varphi, z, h) dh, \\ \sigma_{rz} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu [U_{3q}'(r, h) + ihU_{1q}(r, h)] \Omega_q(\varphi, z, h) dh, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Omega_q(\varphi, z, h) = e^{ihz} \exp[iq(\varphi - \varphi_i)]$.

Подставляя (10), (11), (14) и (17) в первые два граничных условия (16), получаем

$$\begin{aligned} v_q(h) &= -i\omega U_{1q}(r_1, h) \exp(-iq\varphi_i), \\ p_q(h) &= \left[(\lambda + 2\mu) U_{1q}'(r_1, h) + \frac{\lambda}{r_1} (U_{1q}(r_1, h) + iqU_{2q}(r_1, h) + ihr_1 U_{3q}(r_1, h)) \right] \times \\ &\quad \times \frac{i}{\rho_* \omega} \exp(-iq\varphi_i). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя выражения (18) в систему (12), получаем краевое условие при $r = r_1$ для нахождения частного решения системы (15)

$$\begin{aligned} & F_{1q}U'_{1q}(r_1, h) + F_{2q}^{(1)}U_{1q}(r_1, h) + F_{3q}U_{2q}(r_1, h) + F_{4q}U_{3q}(r_1, h) + \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F_{1n}U'_{1n}(r_1, h) + F_{2n}^{(2)}U_{1n}(r_1, h) + F_{3n}U_{2n}(r_1, h) + F_{4n}U_{3n}(r_1, h) \right] F_{5qn} = \\ & = X_q(h), \end{aligned} \quad (19)$$

$$q = -\infty, \dots, \infty, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad h = -\infty, \dots, \infty, \quad h \in \mathbb{R},$$

где

$$\begin{aligned} F_{1q} &= \frac{i}{\rho_*\omega} [\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)] \exp(-iq\varphi_i), \\ F_{2q}^{(j)} &= \frac{i}{\rho_*\omega} \left[\frac{\lambda(r_1)}{r_1} + \omega^2 \rho_* \frac{Z_q^{(j)}(k_h r_1)}{k_h Z_q'^{(j)}(k_h r_1)} \right] \exp(-iq\varphi_i), \quad F_{3q} = -\frac{q\lambda(r_1)}{r_1 \rho_*\omega} \exp(-iq\varphi_i), \\ F_{4q} &= -\frac{h\lambda(r_1)}{\rho_*\omega} \exp(-iq\varphi_i), \quad F_{5qn} = (-1)^n \frac{J'_n(k_h r_1)}{H'_q(k_h r_1)} g_{n+q}(h), \\ Z_q^{(1)}(k_h r_1) &= H_q(k_h r_1), \quad Z_q^{(2)}(k_h r_1) = J_q(k_h r_1). \end{aligned}$$

Другие краевые условия, которым должна удовлетворять система (15) при $r = r_1$, находим из третьего и четвертого граничных условий (16) с учетом (17)

$$\begin{aligned} iqU_{1q}(r_1, h) + r_1 U'_{2q}(r_1, h) - U_{2q}(r_1, h) &= 0, \\ U'_{3q}(r_1, h) + ihU_{1q}(r_1, h) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения

при $r = r_0$:

$$u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad u_z = u_{0z}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{0rz}, \quad (21)$$

где u_{0r} , $u_{0\varphi}$, u_{0z} и σ_{0rr} , $\sigma_{0r\varphi}$, σ_{0rz} — компоненты вектора смещения и компоненты тензора напряжений в однородном упругом цилиндре.

В результате преобразований, аналогичных приведенным в [9], из (21) получаем еще три условия, которым должна удовлетворять система (15) при $r = r_0$

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}'_q + \hat{\mathbf{F}}_q \mathbf{U}_q \right)_{r=r_0} = 0. \quad (22)$$

Компоненты матрицы $\hat{\mathbf{F}}_q$ в уравнении (22) приведены в [9].

Решение краевой задачи (15), (19), (20), (22) может быть найдено методом сплайн-коллокации [21] для $q = -N, -N+1, \dots, 0, 1, \dots, N$, выбрав в качестве порядка усечения величину $N = 2[kr_1] + 1$, где $[]$ — целая часть числа. После нахождения $U_{1q}(r, h)$, $U_{2q}(r, h)$, $U_{3q}(r, h)$ определяем по формулам (18) коэффициенты $p_q(h)$, $v_q(h)$. В результате получаем аналитическое описание потенциала скорости полного акустического поля и нормальной составляющей скорости на поверхности цилиндра.

Теперь определим потенциал скорости полного акустического поля в точке наблюдения M . Обратимся к интегральному уравнению (3), используя представление потенциала Ψ в виде (2), запишем выражения для Ψ_0 , Ψ_{s1} , Ψ_{s2} . Будем иметь

$$\Psi_0 = A \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_0(h) dh, \quad (23)$$

$$\tilde{\Psi}_0(h) = e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} \begin{cases} J_n(k_h r) H_n(k_h r_i), & r < r_i; \\ J_n(k_h r_i) H_n(k_h r), & r > r_i, \end{cases}$$

$$\Psi_{s1} = A \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_h r) \exp(in\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k_h r_i) \exp(-im\varphi_i) g_{n+m}(h) dh, \quad (24)$$

$$\Psi_{s2} = \iint_{\Omega_2} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega_2. \quad (25)$$

Подставим в (25) разложения (10), (11), а также функцию Грина в виде суммы (5), в которой первое слагаемое определяется нижней строкой формулы (4), а второе слагаемое – формулой (9). Интегрируя по поверхности цилиндра, получаем

$$\Psi_{s2} = \frac{ir_1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [p_q(h) k_h J'_q(k_h r_1) - v_q(h) J_q(k_h r_1)] \times$$

$$\times \left[H_q(k_h r) \exp(iq\varphi) + (-1)^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_h r) \exp(in\varphi) g_{n+q}(h) \right] dh, \quad (26)$$

где коэффициенты $p_q(h)$ и $v_q(h)$ определяются согласно (18).

Потенциал скорости рассеянного поля имеет вид

$$\Psi_s = \Psi_{s1} + \Psi_{s2}. \quad (27)$$

4. Асимптотические формулы

В дальней зоне акустического поля ($kr \gg 1$) интегралы (24) и (26), могут быть вычислены методом перевала [22]:

$$\int_C g(\gamma) e^{Wf(\gamma)} d\gamma \approx \sqrt{\frac{2\pi}{W|f''(\gamma_0)|}} g(\gamma_0) e^{Wf(\gamma_0)+i\phi}, \quad W \gg 1, \quad (28)$$

где C – некоторый контур на комплексной плоскости γ ; ϕ – угол, определяющий направление линии наибо́льшего убывания функции $\operatorname{Re} f(\gamma)$, проходящей через точку перевала γ_0 , определяемую как точку резкого максимума функции $f(\gamma)$, т.е. $f'(\gamma_0) = 0$, $f''(\gamma_0) \neq 0$.

Рассмотрим интеграл (26). Используя асимптотические формулы для цилиндрических волновых функций [23]

$$H_q(k_h r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} \exp[i(k_h r - \pi q/2 - \pi/4)], \quad J_n(k_h r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} \cos(k_h r - \pi n/2 - \pi/4),$$

а также тождество $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, позволяющее записать асимптотическую формулу функции Бесселя через экспоненциальные функции, представим интеграл (26) в виде суммы трех интегралов, каждый из которых может быть вычислен методом перевала при $kr \gg 1$

$$\Psi_{s2} = \frac{ir_1}{4} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[I_{1q} \exp(iq\varphi) + \frac{1}{2}(-1)^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I_{2qn} + I_{3qn}) \exp(in\varphi) \right],$$

$$I_{1q} = (-i)^q e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} w_q(h) \exp(ik_h r) dh,$$

$$I_{2qn} = (-i)^n e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} g_{n+q}(h) w_q(h) \exp(ik_h r) dh,$$

$$I_{3qn} = i^n e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} g_{n+q}(h) w_q(h) \exp(-ik_h r) dh,$$

$$w_q(h) = p_q(h) k_h J'_q(k_h r_1) - v_q(h) J_q(k_h r_1).$$

В каждом из полученных интегралов выполним замену $h = k \sin \gamma$:

$$I_{1q} = (-i)^q e^{-i\pi/4} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \right] w_q(k \sin \gamma) k \cos \gamma d\gamma,$$

$$I_{2qn} = (-i)^n e^{-i\pi/4} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \right] g_{n+q}(k \sin \gamma) w_q(k \sin \gamma) k \cos \gamma d\gamma,$$

$$I_{3qn} = i^n e^{i\pi/4} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma - \cos \gamma \right) \right] g_{n+q}(k \sin \gamma) w_q(k \sin \gamma) k \cos \gamma d\gamma.$$

Точка перевала для интегралов I_{1q} и I_{2qn} определяется как

$$\gamma_0 = \arctan \left(\frac{z}{r} \right),$$

а для интеграла I_{3qn}

$$\tilde{\gamma}_0 = -\arctan \left(\frac{z}{r} \right).$$

Определим направление линии наискорейшего спуска из точки γ_0 . Запишем разложение в ряд Тейлора функции $f(\gamma)$ вблизи точки γ_0

$$f(\gamma) \approx f(\gamma_0) + \frac{1}{2} f''(\gamma_0) (\gamma - \gamma_0)^2.$$

Выполним параметризацию $f''(\gamma_0) = |f''(\gamma_0)| \exp(i \arg f''(\gamma_0))$, $\gamma - \gamma_0 = \tilde{\rho} \exp(i\phi)$. Получим

$$f(\gamma) - f(\gamma_0) = \frac{1}{2} \tilde{\rho}^2 |f''(\gamma_0)| \exp[i(2\phi + \arg f''(\gamma_0))].$$

Теперь найдем те направления, вдоль которых разность $\operatorname{Re}[f(\gamma) - f(\gamma_0)]$ быстрее всего убывает с увеличением $\tilde{\rho}$, а $\operatorname{Im}[f(\gamma) - f(\gamma_0)]$ остается неизменной. Тогда направление наискорейшего спуска может быть найдено из уравнения

$$2\phi + \arg f''(\gamma_0) = \pi + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (29)$$

По формуле (29) получаем $\phi = -\pi/4$ для интегралов I_{1q} и I_{2qn} , и $\phi = \pi/4$ для интеграла I_{3qn} . В результате в соответствии с (28) будем иметь

$$\begin{aligned} I_{1q} &\approx \frac{2}{r}(-i)^{q+1} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 \right) \right] w_q(k \sin \gamma_0) \cos \gamma_0, \\ I_{2qn} &\approx \frac{2}{r}(-i)^{n+1} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 \right) \right] g_{n+q}(k \sin \gamma_0) w_q(k \sin \gamma_0) \cos \gamma_0, \\ I_{3qn} &\approx \frac{2}{r}i^{n+1} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \tilde{\gamma}_0 - \cos \tilde{\gamma}_0 \right) \right] g_{n+q}(k \sin \tilde{\gamma}_0) w_q(k \sin \tilde{\gamma}_0) \cos \tilde{\gamma}_0. \end{aligned} \quad (30)$$

В частном случае, когда точка наблюдения и точка, в которой находится источник, расположены в одной плоскости, перпендикулярной оси, т.е. $z = z_i$, выражения (30) значительно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} I_{1q} &\approx 2(-i)^{q+1} w_q(0) \frac{\exp(ikr)}{r}, \\ I_{2qn} &\approx 2(-i)^{n+1} g_{n+q}(0) w_q(0) \frac{\exp(ikr)}{r}, \\ I_{3qn} &\approx 2i^{n+1} g_{n+q}(0) w_q(0) \frac{\exp(-ikr)}{r}. \end{aligned}$$

И асимптотическая формула для дальней зоны акустического поля может быть записана в виде

$$\Psi_{s2} \approx \frac{ir_1}{2r} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[I_{1q} \exp(iq\varphi) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{2qn} \exp(in\varphi) \right] w_q(0), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} I_{1q} &= (-i)^{q+1} \exp(ikr), \quad W_{2qn} = (-1)^{q+1} \sin\left(\frac{\pi n}{2} - kr\right) g_{n+q}(0), \\ w_q(0) &= p_q(0) k J'_q(kr_1) - v_q(0) J_q(kr_1). \end{aligned}$$

Используя ту же процедуру, что и для предыдущих интегралов, может быть получена асимптотическая формула для Ψ_{s1} в дальней зоне акустического поля при $z = z_i$

$$\Psi_{s1} \approx -A \frac{i}{4\pi r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2} - kr\right) \exp(in\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(kr_i) \exp(-im\varphi_i) g_{n+m}(0). \quad (32)$$

5. Численные исследования

На основе полученного решения были проведены расчеты угловых характеристик рассеянного акустического поля $|\Psi_s/A|$ в дальней зоне ($r = 100$ м) в плоскости $z = 0$.

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_0 = 0.8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м располагается в полупространстве, заполненном водой ($\rho_* = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с) и отстоит от границы полупространств на расстояние $d = 1 + r_1$ м. Упругое полупространство характеризуется параметрами: $\rho_1 = 7.85 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_1 = 1.2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu_1 = 7.9 \cdot 10^{10}$ Н/м² (сталь). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ Н/м² (поливинилбутираль), так и неоднородное покрытие, механические характеристики которого менялись по законам:

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0,$$

где

$$f(r) = (r - r_0) / (r_1 - r_0) + 0.5, \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Предполагалось, что сферический источник излучает звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_i = 4$, $\varphi_i = \pi/4$, $z_i = 0$.

На рис. 1 представлены зависимости амплитуды рассеяния $|\Psi_s/A|$ от полярного угла φ при волновом размере тела $kr_1 = 5$. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ . Сплошная линия соответствует случаю неоднородного покрытия, пунктирная – однородному покрытию. Сравнение диаграмм направленности для тел с однородным и неоднородным покрытиями показывает, что неоднородность покрытия существенно влияет на дифракционную картину.

На рис. 2 приведены угловые зависимости $|\Psi_s/A|$ при значении волнового размера $kr_1 = 5$ для случая цилиндра с неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства (сплошная линия), и для того же цилиндра, находящегося в безграничном пространстве [9] (пунктирная линия). Как видно из диаграмм направленности, присутствие подстилающей поверхности сильно влияет на характер рассеяния звука.

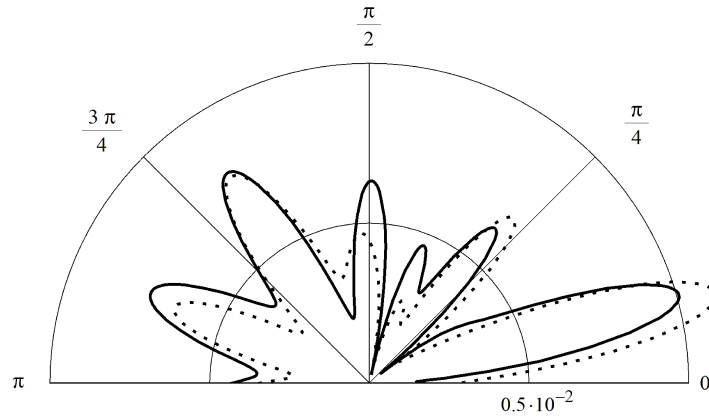


Рис. 1: Диаграммы направленности в случае упругой поверхности

Следует отметить, что полученное решение не ограничивается рассмотрением только упругой границы полупространства. В том случае, если цилиндр расположен вблизи абсолютно жесткой поверхности, функция Грина (7) при $y = -d$ должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0. \quad (33)$$

Если же поверхность является акустически мягкой, то

$$G = 0 \quad (34)$$

при $y = -d$.

Условие (33) выполняется при $A_1 = 1$, а условие (34) при $A_1 = -1$ [15]. Тогда выражение (13) может быть сведено к интегральному представлению цилиндрической функции Ганкеля [18]. Получаем $g_l(h) = \pm(-i)^{-l} H_l(2k_h d)$, где знаки плюс и минус относятся к абсолютно жесткой и акустически мягкой поверхностям соответственно.

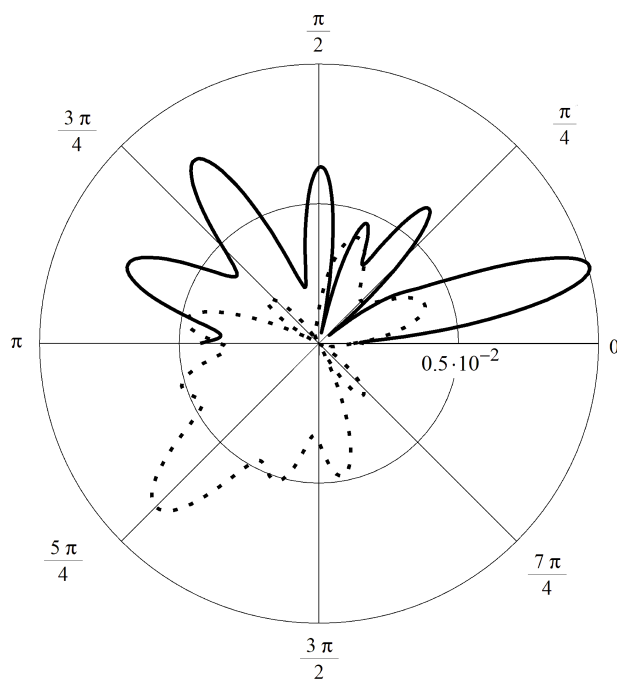


Рис. 2: Диаграммы направленности в случае упругой поверхности

На рис. 3 и 4 изображены диаграммы направленности рассеянного акустического поля для цилиндра с покрытием, расположенного вблизи абсолютно жесткой и акустически мягкой поверхностей соответственно. Значение волнового размера полагалось $kr_1 = 5$. При этом сплошные линии соответствуют случаю неоднородного покрытия, пунктирные – однородного покрытия.

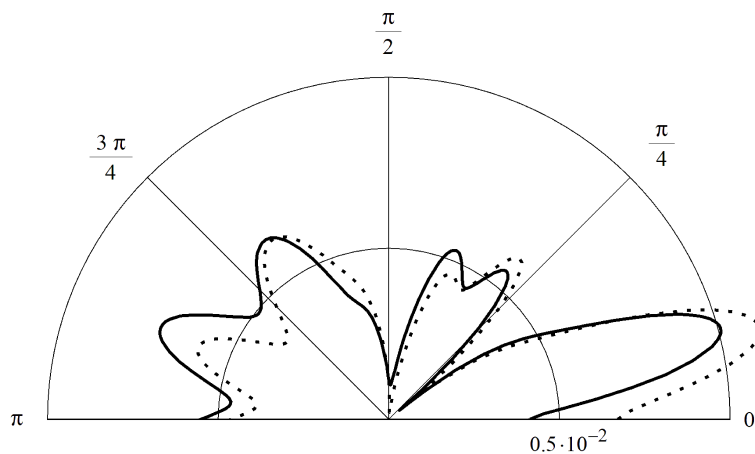


Рис. 3: Диаграммы направленности в случае абсолютно жесткой поверхности

Сравнивая кривые на рис. 1, 3 и 4 можно сделать вывод о том, что тип границы полупространства оказывает существенное влияние на рассеянное акустическое поле.

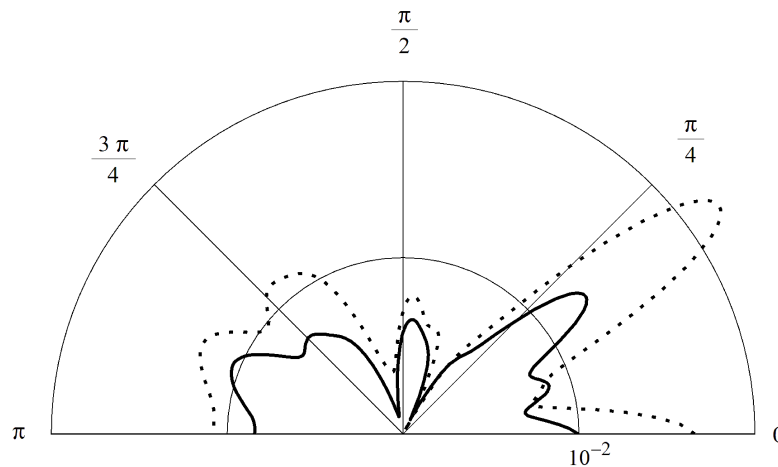


Рис. 4: Диаграммы направленности в случае акустически мягкой поверхности

6. Заключение

В настоящей работе получено точное решение задачи дифракции сферической звуковой волны на упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства. На основе полученного аналитического решения проведены численные расчеты, показывающие возможность изменять звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел с помощью непрерывно-неоднородных покрытий.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Л.А. Толоконникову за постановку задачи, постоянное внимание и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. Vol. 23, № 4. P. 405–418.
2. Flax L., Varadan V. K., Varadan V. V. Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. Vol. 68, № 6. P. 1832–1835.
3. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265–274.
4. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242–250.
5. Lee F. A. Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder // Acustica. 1963. Vol. 13, № 3. P. 26–31.
6. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460–472.
7. Клещев А. А. Дифракция звука от точечного источника на упругой цилиндрической оболочке // Акустический журн. 2004. Т. 50, № 1. С. 86–89.

8. Li T., Ueda M. Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1990. Vol. 87, № 5. P. 1871–1879.
9. Толоконников Л. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // *Чебышевский сборник*. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 215–226.
10. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // *Прикладная механика и техническая физика*. 2017. № 4. С. 189–199.
11. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // *Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки*. 2018. Вып. 9. С. 276–289.
12. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О влиянии неоднородного покрытия упругого цилиндра на рассеяние звука в присутствии плоской поверхности // *Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки*. 2020. Вып. 9. С. 111–118.
13. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // *Чебышевский сборник*. 2020. Т. 21. Вып. 4. С. 369–381.
14. Ефимов Д. Ю. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами в полупространстве // *Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки*. 2021. Вып. 4. С. 125–133.
15. Шендеров Е. Л. Дифракция звука на упругом цилиндре, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // *Акустический журн.* 2002. Т. 48. № 2. С. 266–276.
16. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // *Прикладная математика и механика*. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 779–791.
17. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
18. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
19. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
20. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
21. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
22. Ильин А. М., Данилин А. Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
23. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.

REFERENCES

1. Faran, J. J. 1951, “Sound scattering by solid cylinders and spheres”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no. 4, pp. 405–418.

2. Flax, L., Varadan, V.K. & Varadan, V.V. 1980, "Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 68, no. 6, pp. 1832-1835.
3. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].
4. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no 2, pp. 164-169.
5. Lee F. A. 1963, "Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder", *Acustica*, vol. 13, no. 3, pp. 26-31.
6. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D.Yu. 2021, "Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with radially inhomogeneous coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460-472, [in Russian].
7. Kleshchev A. A. 2004, "Diffraction of point-source-generated sound by an elastic cylindrical shell", *Acoustical physics*, vol. 50, no. 1, pp. 74-76.
8. Li T., Ueda M. 1980, "Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 87, no. 5, pp. 1871-1879.
9. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215-226, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no. 4, pp. 733-742.
11. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating situated near to a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 276-289, [in Russian].
12. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2020, "About influence of an inhomogeneous coating of an elastic cylinder on sound scattering in the presence of the flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 111-118, [in Russian].
13. Tolokonnikov, L. A. & Efimov D.Yu. 2020, "Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating situated near to a flat surface", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 369-381, [in Russian].
14. Efimov, D. Yu. 2021, "Modeling of a continuously non-uniform coating of an elastic cylinder with specified sound-reflecting properties in a half-space", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 4, pp. 125-133, [in Russian].
15. Shenderov, E. L. 2002, "Diffraction of sound by an elastic cylinder near the surface of an elastic halfspace", *Acoustical Physics*, vol. 48, no. 2, pp. 225-234.
16. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D.Yu. 2021, "Diffraction of sound waves at an elastic cylinder with an inhomogeneous coating in the vicinity of the boundary of an elastic half-space", *Mechanics of Solids*, vol. 56, no. 8, pp. 1657-1667.
17. Shenderov, E. L. 1989, "Emission and Scattering of Sound", *Sudostroenie*, Leningrad, 304 p, [in Russian].

18. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", *Nauka i tekhnika*, Minsk, 584 p., [in Russian].
19. Brekhovskikh, L. M. 1973, "Waves in Layered Media", *Nauka*, Moscow, 344 p., [in Russian].
20. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprezystosci", *PWN*, Warszawa.
21. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, "Spline function methods", *Nauka*, Moscow, 352 p., [in Russian].
22. Ilyin, A. M. & Danilin, A. R. 2009, "Asymptotic Methods in Analysis", *Fizmatlit*, Moscow, 248 p., [in Russian].
23. Lebedev, N. N. 1963, "Special Functions and their Applications", *Fizmatgiz*, Moscow, 358 p., [in Russian].

Получено: 15.08.2023

Принято в печать: 21.12.2023