

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-274-288

Дифракция звуковых волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины¹

Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Ефимов Дмитрий Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается дифракция звуковых волн неоднородной изотропной цилиндрической оболочкой конечной длины произвольной толщины. Полагается, что в полости цилиндрической оболочки — вакуум. Плотность и модули упругости материала оболочки описываются непрерывными функциями радиальной координаты. Первичное поле возмущений представляет собой плоскую гармоническую звуковую волну, наклонно падающую на тело.

Для рассеянного поля используется представление в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа. Показано, что использование квадратурных формул по параллелепipedальным сеткам Коробова позволяет сократить число вычислений при приближенном вычислении интегралов. Этот метод сравнивается с вычислением интегралов методом последовательного интегрирования по квадратурной формуле трапеций. Проведено сопоставление времени вычисления потенциала поля, рассеянного конечной цилиндрической оболочкой, двумя методами вычисления интегралов.

Выявлено существенное влияние неоднородности материала оболочки на звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел.

Ключевые слова: рассеяние, звуковые волны, конечная цилиндрическая оболочка, квадратурные формулы, периодизация, параллелепipedальные сетки Коробова.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников. Дифракция звуковых волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 274–288.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-274-288

Diffraction of sound waves on an inhomogeneous thick-walled elastic cylindrical shell of finite length

N. N. Dobrovol'skii, D. Yu. Efimov, L. A. Tolokonnikov

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University; Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Efimov Dmitrii Yurevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Abstract

The article considers the diffraction of sound waves by an inhomogeneous isotropic cylindrical shell of finite length of arbitrary thickness. It is assumed that there is a vacuum in the cavity of the cylindrical shell. The density and elastic modulus of the shell material are described by continuous functions of the radial coordinate. The primary field of disturbances is a plane harmonic sound wave falling obliquely on the body.

For the scattered field, a representation in the form of the Helmholtz-Kirchhoff integral is used. It is shown that the use of quadrature formulas for parallelepipedal Korobov grids makes it possible to reduce the number of calculations with approximate calculation of integrals. This method is compared with the calculation of integrals by the method of sequential integration using the quadrature formula of trapezoids. The calculation time of the field potential scattered by a finite cylindrical shell is compared by two methods of calculating integrals.

A significant effect of the inhomogeneity of the shell material on the sound-reflecting properties of elastic cylindrical bodies has been revealed.

Keywords: scattering, sound waves, a finite cylindrical shell, quadrature formulas, periodization, parallelepipedal Korobov grids.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, D. Yu. Efimov, L. A. Tolokonnikov, 2023, "Diffraction of sound waves on an inhomogeneous thick-walled elastic cylindrical shell of finite length", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 274–288.

1. Введение

Тело, имеющее форму конечного цилиндра, хорошо аппроксимирует многие реальные объекты и элементы конструкций. В настоящее время известно большое количество работ, посвященных исследованию дифракции звука на бесконечных идеальных и упругих цилиндрах. Конечные цилиндрические рассеиватели звука изучены в гораздо меньшей степени.

В [1] найдено приближенное решение задачи дифракции плоской гармонической звуковой волны на жестком цилиндре конечной длины в случае, когда длина цилиндра много больше

длины волны. Рассеяние плоской звуковой волны конечной упругой цилиндрической оболочкой и конечным упругим сплошным круговым цилиндром изучено в [2, 3]. В [4] экспериментально определено сечение обратного рассеяния сплошного упругого цилиндра конечной длины в водной среде при широком диапазоне изменения длины и радиуса цилиндра. Рассеяние звука упругим сплошным цилиндром, ограниченным на концах полусферами рассмотрено в [5]. Работы [6, 7] посвящены решению задачи рассеяния наклонно падающей плоской звуковой волны упругой цилиндрической оболочкой, ограниченной двумя абсолютно твердыми полусферами. В [10] построена приближенная формула для давления акустического поля, рассеянного конечным импедансным цилиндром, в дальней зоне. В [11] изучено рассеяние акустических полей упругими тонкостенными цилиндрами ограниченной длины. В [12] исследованы некоторые особенности рассеяния звука упругими цилиндрическими оболочками с полусферическими законцовками. В [13, 14] получена формула для звукового давления поля, рассеянного конечным сплошным цилиндром, в дальней зоне. В указанных выше работах полагалось, что цилиндрические рассеиватели являются однородными изотропными телами. Рассеяние плоской звуковой волны конечным упругим сплошным цилиндром с неоднородным упругим покрытием исследовано в [15].

В настоящей работе решается задача дифракции плоских звуковых волн на радиально-неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неоднородную изотропную упругую цилиндрическую оболочку конечной длины L . Оболочка имеет произвольную толщину. Ее внешний радиус – r_1 ($r_1 < L$), а внутренний – r_0 . Выберем прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат, связанные с телом, таким образом, что их координатные оси z совпадают с осью вращения цилиндра, а торцы цилиндра отстоят от центра координатной системы на расстоянии $L/2$ (рис. 1). Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного цилиндрического слоя являются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а плотность ρ – непрерывной функцией координаты r . Полагаем, что в полости цилиндрической оболочки – вакуум. Окружающая тело жидкость является идеальной сжимаемой, плотность и скорость звука которой соответственно равны ρ_1 и c .

Пусть из внешнего пространства на оболочку падает плоская гармоническая звуковая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}$, который лежит в плоскости xz и образует угол θ_0 с положительным направлением оси z .

Потенциал скорости падающей волны в системе координат x, y, z равен

$$\Psi_0 = A \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - i\omega t], \quad (1)$$

где A – амплитуда волны; ω – круговая частота; $\mathbf{R} = (x, y, z)$ – радиус-вектор; $\mathbf{k} = (k \sin \theta_0, 0, k \cos \theta_0)$ – волновой вектор; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; $k = |\mathbf{k}|$; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное конечной цилиндрической оболочкой.

3. Аналитическое решение

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [16]

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

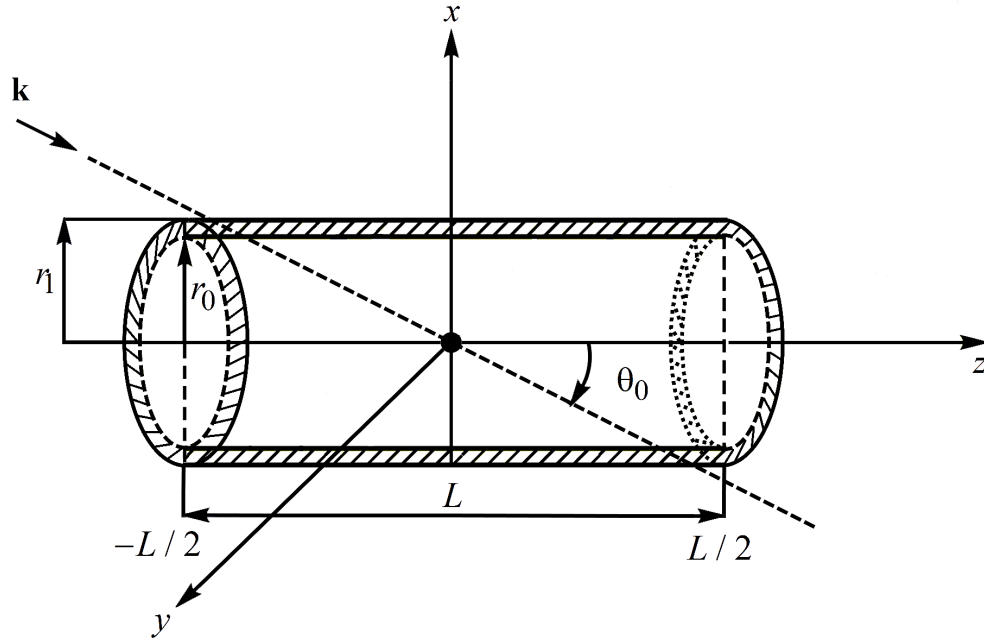


Рис. 1: Геометрия задачи

где $\Psi = \Psi_0 + \Psi_S$ – потенциал скорости полного акустического поля; Ψ_S – потенциал скорости рассеянной волны.

При этом скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяется по формулам:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi.$$

Потенциал скорости падающей плоской волны представим в виде [17]

$$\Psi_0 = A \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp(in\varphi), \quad (2)$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $\alpha = k \cos \theta_0$, $\beta = k \sin \theta_0$.

Рассеянное поле с учетом условий излучения на бесконечности будем искать в виде комбинации всевозможных цилиндрических волн, бегущих вдоль оси z с волновым числом h

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp(in\varphi) dh, \quad (3)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$. При $|h| > k$ величина k_h становится мнимой. Выбор знака корня $\sqrt{k^2 - h^2}$ из условия $\text{Im } k_h \geq 0$ обеспечивает условие излучения на бесконечности [16] для потенциала Ψ_S при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ при $-k \leq h \leq k$ и $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$ при $|h| > k$.

Уравнения движения упругого неоднородного цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды, которые в цилиндрической системе координат имеют вид [18]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\
\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \\
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= -\omega^2 \rho u_z,
\end{aligned} \tag{4}$$

где u_r, u_φ, u_z – компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ частиц неоднородного слоя; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Используя обобщенный закон Гука [18], соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом слое запишем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\
\sigma_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\
\sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \sigma_{\varphi z} = \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Будем считать, что конечная упругая неоднородная оболочка шарнирно закреплена по торцам в бесконечные цилиндрические абсолютно жесткие и неподвижные экраны. В этом случае при $z = \pm L/2$ должны выполняться краевые условия [15]

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \sigma_{zz} = 0. \tag{6}$$

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом слое будем искать в виде

$$\begin{aligned}
u_r(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \\
u_\varphi(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{2nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \\
u_z(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{3nq}(r) \cos[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi),
\end{aligned} \tag{7}$$

где $k_q = \pi q/L$. Выбор функций u_r, u_φ, u_z в виде (7) обеспечивает выполнение условий (6).

Подставляя разложения (7) в уравнения (4) с учетом (5), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r)$ для каждого n и q

$$\hat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}_{nq}'' + \hat{\mathbf{B}}_{nq} \mathbf{U}_{nq}' + \hat{\mathbf{C}}_{nq} \mathbf{U}_{nq} = 0, \tag{8}$$

где $\mathbf{U}_{nq} = (U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r))^T$; $\hat{\mathbf{A}}_{nq} = (a_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\hat{\mathbf{B}}_{nq} = (b_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\hat{\mathbf{C}}_{nq} = (c_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned}
a_{nq11} &= (\lambda + 2\mu) r^2, \quad a_{nq22} = a_{nq33} = \mu r^2, \quad a_{nqpm} = 0, \quad (p \neq m), \\
b_{nq11} &= (\lambda' + 2\mu') r^2 + (\lambda + 2\mu) r, \quad b_{nq12} = b_{nq21} = in(\lambda + \mu) r, \quad b_{nq13} = -k_q(\lambda + \mu) r^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{nq22} &= b_{nq33} = \mu' r^2 + \mu r, & b_{nq23} &= b_{nq32} = 0, & b_{nq31} &= k_q (\lambda + \mu) r^2, \\
c_{nq11} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu (k_q^2 r^2 + n^2 + 2) + \lambda' r - \lambda, & c_{nq12} &= i n (\lambda' r - \lambda - 3\mu), & c_{nq13} &= -k_q \lambda' r^2, \\
c_{nq21} &= i n (\mu' r + \lambda + 3\mu), & c_{nq22} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu' r - n^2 \lambda - \mu (2n^2 + k_q^2 r^2 + 1), \\
c_{nq23} &= -i n k_q (\lambda + \mu) r, & c_{nq31} &= k_q (\mu' r + \lambda + \mu) r, \\
c_{nq32} &= i n k_q (\lambda + \mu) r, & c_{nq33} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu (2k_q^2 r^2 + n^2) - k_q^2 \lambda r^2.
\end{aligned}$$

Коэффициенты $A_n(h)$ разложения (3) и функции $U_{1nq}(r)$, $U_{2nq}(r)$, $U_{3nq}(r)$ в разложениях (7) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности оболочки заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

при $r = r_1$

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (9)$$

На внутренней поверхности оболочки должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных составляющих тензора напряжений:

при $r = r_0$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (10)$$

Воспользуемся следующей парой преобразований Фурье

$$\tilde{f}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihz} f(z) dz, \quad f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \tilde{f}(h) dh.$$

Используя формулу [19]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} dz = \delta(h)$$

и принимая во внимание четность дельта-функции Дирака $\delta(x)$, найдем преобразования Фурье по z потенциала падающей звуковой волны, определяемого (2)

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_0(h) &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp(in\varphi) \delta(h - \alpha), \\
\Psi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{\Psi}_0(h) dh.
\end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая то, что $u_r = 0$ при $|z| > L/2$, преобразование Фурье по z радиального смещения неоднородного упругого слоя будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r(h) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) g_q(h) \exp(in\varphi), \\
u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{u}_r(h) dh,
\end{aligned} \quad (12)$$

где

$$g_q(h) = (-i)^{q-1} \frac{L}{4\pi} \left[\frac{\sin k_q^{(+)} }{k_q^{(+)} } - (-1)^q \frac{\sin k_q^{(-)} }{k_q^{(-)} } \right],$$

$$k_q^{(+)} = (hL + \pi q) / 2, \quad k_q^{(-)} = (hL - \pi q) / 2.$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ с учетом (3), (11), (12) находим коэффициенты $A_n(h)$, выраженные через $U_{1nq}(r)$

$$A_n(h) = -\frac{1}{k_h H'_n(k_h r_1)} \left[A i^n \beta J'_n(\beta r_1) \delta(h - \alpha) + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r_1) g_q(h) \right]. \quad (13)$$

Здесь и далее штрихами обозначено дифференцирование по аргументу.

Подставим во второе граничное условие (9) выражения (2), (3) и (7), домножим обе части равенства на $\sin[k_q(z + L/2)]$ и проинтегрируем по z в пределах от $-L/2$ до $L/2$. В результате, учитывая выражение для вронскиана [20], получим

$$\begin{aligned} & (\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U'_{1nq}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{(r_1)} [U_{1nq}(r_1) + inU_{2nq}(r_1) - k_q r_1 U_{3nq}(r_1)] = \\ & = (-1)^{q+1} 4 \frac{\omega \rho_1}{L} \left[\frac{2i^n A g_q(\alpha)}{\beta r_1 H'_n(\beta r_1)} - \pi \omega \sum_{m=1}^{\infty} U_{1nm}(r_1) Z_{nmq} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$Z_{nmq} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_m(h) g_q(h) dh. \quad (15)$$

Подробный анализ интеграла вида (15) приведен в работе [15].

Из третьего и четвертого граничных условий (9) с учетом (5) находим

$$\begin{aligned} inU_{1nq}(r_1) + r_1 U'_{2nq}(r_1) - U_{2nq}(r_1) &= 0, \\ k_q U_{1nq}(r_1) + U'_{3nq}(r_1) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из граничных условий (10) получим следующие краевые условия для системы (8):

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}'_{nq} + \mathbf{F}_{nq} \mathbf{U}_{nq} \right)_{r=r_0} = 0, \quad (17)$$

где $\mathbf{F}_{nq} = (f_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрица третьего порядка с элементами

$$\begin{aligned} f_{nq11} &= \lambda(r)/r, \quad f_{nq12} = in\lambda(r)/r, \quad f_{nq13} = -\lambda(r)k_q, \\ f_{nq21} &= in\mu(r)/r, \quad f_{nq22} = -\mu(r)/r, \quad f_{nq23} = f_{nq32} = f_{nq33} = 0, \quad f_{nq31} = k_q\mu(r). \end{aligned}$$

Построенная краевая задача (8), (14), (16), (17) может быть решена каким-либо аналитическим или численным методом.

Теперь представим рассеянное поле в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа, позволяющего определить рассеянное акустическое поле в произвольной точке пространства по известным потенциалу поля и его нормальной производной на поверхности рассеивателя [10]

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega, \quad (18)$$

где $\mathbf{R}_2$ – радиус-вектор точки, находящейся на внешней боковой поверхности цилиндрической оболочки; $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ – функция Грина для свободного пространства; Ω – боковая поверхность цилиндра; $d\Omega = r_1 d\varphi_2 dz_2$; $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$; $z_2 \in [-L/2, L/2]$.

Применение формулы (18) вызвано необходимостью устранения вклада в рассеянное поле цилиндрических абсолютно жестких экранов и учета только рассеяния звука цилиндрической оболочкой конечной длины.

Выберем функцию Грина в виде потенциала точечного источника и в цилиндрической системе координат имеет вид [17]

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_o(\xi) d\xi, \quad (19)$$

где

$$\tilde{G}_o(\xi) = \frac{i}{8\pi} e^{i\xi(z-z_2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi - \varphi_2)] \begin{cases} H_m(\eta r_2) J_m(\eta r), & r < r_2; \\ J_m(\eta r_2) H_m(\eta r), & r > r_2. \end{cases}$$

$$\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}.$$

Подставляя (3), (11), (19) в (18) с учетом (13) и формулы [10]

$$\int_a^b f(h) \delta(h - \alpha) dh = f(\alpha), \text{ если } \alpha \text{ лежит внутри } [a, b],$$

а также осуществляя интегрирование по переменной φ_2 с учетом свойства ортогональности экспоненциальных множителей, получим выражение для потенциала Ψ_S

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \frac{ir_1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[W_{1n} I_{1n} + W_{2n} I_{2n} + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} [I_{4nq} - I_{3nq}] U_{1nq}(r_1) \right] \exp(in\varphi), \quad (20)$$

где

$$W_{1n} = -\frac{Ai^n J'_n(\beta r_1) H_n(\beta r_1)}{H'_n(\beta r_1)}, \quad W_{2n} = Ai^n \beta J'_n(\beta r_1),$$

$$I_{1n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 d\xi,$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 d\xi,$$

$$I_{3nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(h - \xi)z_2] \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_q(h) \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 dh d\xi,$$

$$I_{4nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(h - \xi)z_2] g_q(h) J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 dh d\xi.$$

Важно отметить, что для того, чтобы выражение (20) удовлетворяло условиям излучения на бесконечности, аналогично выражению (3), в интегралах I_{1n} , I_{2n} , I_{3nq} , I_{4nq} следует полагать $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ при $-k \leq \xi \leq k$ и $\eta = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$ при $|\xi| > k$.

Интегралы, входящие в (20), подлежат вычислению каким-либо численным методом. Для вычисления интегралов по переменным h , ξ может быть применен прием обрезания бесконечных пределов и интегрирование по вещественной прямой заменено интегрированием по конечному отрезку.

4. Построение теоретико-числовой сетки

Для вычисления интегралов из выражения потенциала рассеянного поля (20) вне поверхности тела использовались два метода:

- метод (А), основанный на последовательном интегрировании по квадратурной формуле трапеций ;
- метод (В) на основе квадратурных формул по параллелепедальным сеткам Коробова.

Интегрирование по квадратурной формуле трапеций (метод А) является классическим методом численного интегрирования и подробно изложен, например, в [21].

Интегрирование по методу (В) сводится к построению параллелепедальной сетки $M(\vec{a}, N)$ состоящей из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{N} \right\}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

где N — количество узлов параллелепедальной сетки; $\vec{a}$ — набор оптимальных коэффициентов. Данный метод и способы периодизации интегрируемых функций подробно изложены в [24].

В данной работе применяется простейшая периодизация, предложенная в работе [25], позволяющая далее применять Фурье-интерполяцию.

5. Численные исследования

На основе полученного решения были проведены расчеты зависимости $|\Psi_S/A|$ от координаты φ в плоскости $z = 0$ при $r = r_*$. В этом случае интегралы из (20) принимают вид

$$\begin{aligned} I_{1n} &= \int_{-W}^W \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 d\xi, \\ I_{2n} &= \int_{-W}^W \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] J_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 d\xi, \\ I_{3nq} &= \int_{-W}^W \int_{-Q}^Q \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(h - \xi)z_2] \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_q(h) \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 dh d\xi, \\ I_{4nq} &= \int_{-W}^W \int_{-Q}^Q \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(h - \xi)z_2] g_q(h) J_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 dh d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

Полагалось, что толстостенная цилиндрическая оболочка из поливинилбутирала ($r_1 = 1$ м, $r_0 = 0.5$ м) располагается в свободном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Рассматривалась как однородная цилиндрическая оболочка с характерными плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ н/м², так и неоднородная, физико-механические характеристики которой изменялись по закону

$$\lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad \rho = \rho^0 \cdot f(r),$$

$$f(r) = 0.75 \left[(r_1 - r)^2 / (r_1 - r_0)^2 + 1 \right], \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Расчеты выполнены при волновом размере тела $kr_1 = 4$, угле падения $\theta_0 = \pi/2$, для значений $L/r_1 = 5, 50, 100$ и $r_* = 100$ м.

Решение краевой задачи (8), (14), (16), (17) получено методом сплайн-коллокации [22].

Суммирование в (20) проводилось в диапазоне от $-S$ до S по индексу n и от 1 до S по индексу q , где $S = 2[kr_1] + 1$, $[\cdot]$ – целая часть числа.

Вычисления интегралов (21) проводилось двумя методами (А и В): последовательным интегрированием по квадратурной формуле трапеций [21] на равномерной сетке и по квадратурной формуле на основе параллелепедальной сетки Коробова [24]. При расчетах по формуле трапеций использовались следующие параметры: $M_1 = 2(W \times L)/h_1^2$, $M_2 = 4(W \times Q \times L)/h_2^3$ – число узлов сеток для расчета двойных и тройных интегралов из (21) соответственно, h_1 и h_2 – шаги этих сеток.

В первой серии численных экспериментов определялись параметры M_1 , M_2 , N_1 , N_2 сеток разбиения методов А и В так, чтобы обеспечивалась достаточная точность вычисления $\Psi_S(\varphi)$. Через N_1 , N_2 обозначено количество узлов параллелепедальных сеток для вычисления двойных и тройных интегралов соответственно. С целью подбора оптимальных параметров сеток использовалось предположение, сделанное на основании работы [15], что при $L/r_1 \gg 1$ поле $\Psi_S(\varphi)$, рассеянное цилиндрической оболочкой конечной длины, должно совпадать с рассеянным полем $\Psi_S^{(\infty)}(\varphi)$, полученным при дифракции на цилиндрической оболочке бесконечной длины. Решение задачи рассеяния плоской звуковой волны однородной упругой цилиндрической оболочкой бесконечной длины получено в работе [23], не содержит интегралов и может служить базой при выборе параметров M_1 , M_2 , N_1 , N_2 . При этом степень согласованности результатов оценивалось величинами

$$R_A = \int_0^{2\pi} \left| \Psi_S^{(A)}(\varphi) - \Psi_S^{(\infty)}(\varphi) \right|^2 d\varphi, \quad R_B = \int_0^{2\pi} \left| \Psi_S^{(B)}(\varphi) - \Psi_S^{(\infty)}(\varphi) \right|^2 d\varphi.$$

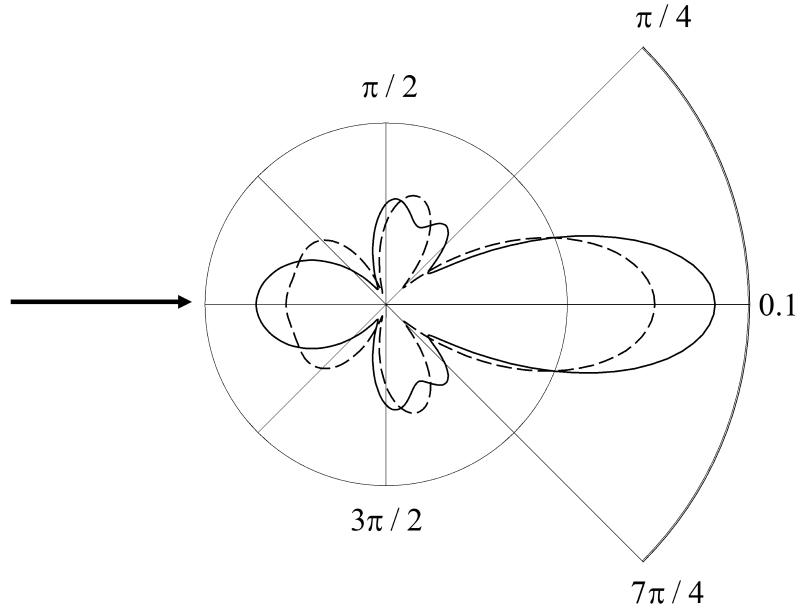
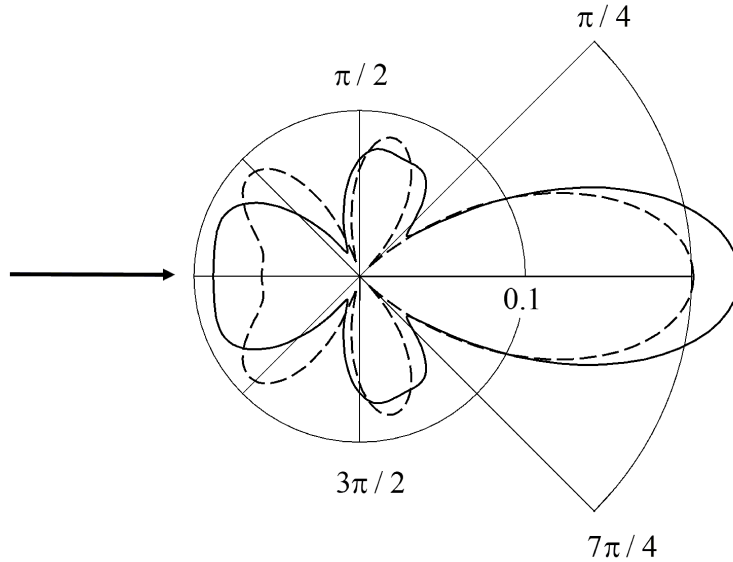
В результате было получено, что для достижения ошибки $R_A, R_B < 10^{-6}$ следует выбрать значения $M_1 = 3.2 \cdot 10^5$, $M_2 = 5.12 \cdot 10^6$, $N_1 = 96077$ ($a = 35489$), $N_2 = 907956$ ($a_1 = 178379$, $a_2 = 657577$). В скобках указаны значения оптимальных коэффициентов $\vec{a}$.

Следует отметить, что вычисление интегралов (21), входящих в (20), сопряжено с некоторыми трудностями, связанными с тем, что цилиндрическая функция Ганкеля первого рода $H_n(x)$ при $x = 0$ имеет полюс n -го порядка при $n \neq 0$ и логарифмическую особенность при $n = 0$. При численных расчетах интегралов (21) отрезки интегрирования по переменным ξ , h разбивались на участки $(-Y, -k - \varepsilon)$, $(-k - \varepsilon, -k + \varepsilon)$, $(-k + \varepsilon, k - \varepsilon)$, $(k - \varepsilon, k + \varepsilon)$, $(k + \varepsilon, Y)$, где $Y = W, Q$ соответственно, $\varepsilon > 0$ малый параметр. На участках $(\pm k - \varepsilon, \pm k + \varepsilon)$ цилиндрические волновые функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка n , а также их производные заменялись асимптотическими формулами при малых значениях аргумента [20], так как в окрестностях точек ξ , $h = \pm k$ значения η , k_h малы.

На рис. 2-4 представлены диаграммы направленности амплитуды рассеянного акустического поля для значений $L/r_1 = 5, 50, 100$ соответственно. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ , а стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны. Штриховые линии соответствуют однородной цилиндрической оболочке, сплошные линии – неоднородной оболочке.

Сравнение кривых на рис. 3 и 4 показывает, что при достаточно больших значениях L/r_1 поведение амплитуды рассеяния звука отличается незначительно.

Важно отметить, что штриховая кривая на рис. 4, построенная для случая однородной упругой оболочки при $L/r_1 = 100$, полностью повторяет кривую, построенную с использова-

Рис. 2: Диаграммы направленности рассеянного поля, $L/r_1 = 5$.Рис. 3: Диаграммы направленности рассеянного поля, $L/r_1 = 50$.

нием аналитического решения из [23], что позволяет сделать вывод о корректности используемых методов численного интегрирования. Установлено, что пределы интегрирования W , Q имеют сильную зависимость от значения волнового числа внешней области k , поэтому для различных значений частоты падающей волны ω следует подбирать параметры сеток индивидуально, основываясь на величинах R_A, R_B .

Отметим, что используемые параметры N_1, N_2, M_1, M_2 обеспечивают достаточное сов-

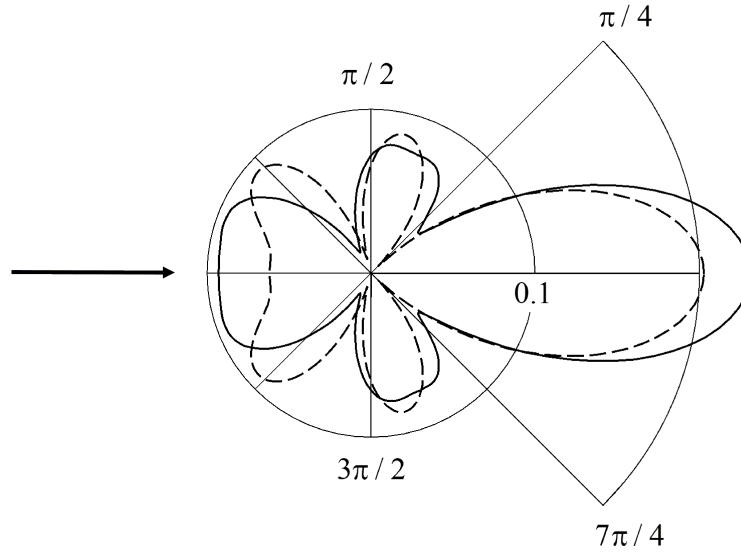


Рис. 4: Диаграммы направленности рассеянного поля, $L/r_1 = 100$.

падение результатов, полученных двумя методами (А и В) вычисления интегралов (21), где согласованность результатов оценивалась величиной

$$R = \int_0^{2\pi} \left| \Psi_S^{(A)}(\varphi) - \Psi_S^{(B)}(\varphi) \right|^2 d\varphi.$$

Поэтому на диаграммах построено только по одной линии для каждого набора входных геометрических и физико-механических параметров.

Заметим, что отношение числа точек $M_1/N_1 \approx 3.33$, $M_2/N_2 \approx 5.63$, однако уменьшение времени расчета всей диаграммы на интервале $\varphi \in [0, 2\pi]$ методом В – t_B по отношению к t_A составляет только 10-12% для двойных и 14-17% для тройных интегралов.

6. Заключение

Сравнение двух подходов приближенного вычисления интегралов показывает, что для получения погрешности в решении, не превышающей 10^{-6} по абсолютной величине, при использовании второго метода можно получить сокращение времени вычислений интегралов от 10% до 12% для двойных и от 14% до 17% для тройных интегралов.

Установлено, что неоднородность материала оболочки позволяет эффективно изменять характеристики рассеяния цилиндрического тела при соответствующем выборе законов неоднородности материала.

Использование теоретико-числовых сеток при решении задач механики может обеспечить повышение эффективности процедур вычисления интегралов, в частности в задачах о рассеянии звуковых волн упругими телами на основе представления акустического поля в форме Гельмгольца-Кирхгофа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Williams W.E., Lighthill M.J. Diffraction by a cylinder of finite length // Math. Proceed. Camb. Phil. Soc. 1956. V.52. no. 2. P. 322-335.
2. Лямшев Л. М. Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой цилиндрической оболочке // Доклады АН СССР. 1957. Т. 115. № 2. С. 271-273.
3. Лямшев Л. М. Рассеяние звука тонким ограниченным стержнем // Акустический журнал. 1958. Т. 4. № 1. С. 51-58.
4. Андреева И. Б., Самоволькин В. Г. Рассеяние звука упругими цилиндрами конечной длины // Акустический журнал. 1976. Т. 22. № 5. С. 637-643.
5. Su J.-H., Varadan V. V., Varadan V. K., Flax L. Acoustic wave scattering by a finite elastic cylinder in water // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 68, No 2. P. 686-691.
6. Музыченко В. В., Рыбак С. А. Амплитуда резонансного рассеяния звука ограниченной цилиндрической оболочкой в жидкости // Акустический журнал/ 1986. Т. 32. № 1. С. 129-131.
7. Музыченко В. В., Рыбак С. А. Некоторые особенности рассеяния звука ограниченными цилиндрическими оболочками // Акустический журнал. 1986. Т. 32. № 5. С. 699-701.
8. Белогорцев А. С., Музыченко В. В. Влияние ограниченности цилиндрической оболочки на амплитуду обратного рассеяния // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 2. С. 228-234.
9. Доценко И. Е., Музыченко В. В., Рыбак С. А. Рассеяние звука на ограниченной цилиндрической упругой оболочке с полусферическими заглушками // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 5. С. 922-932.
10. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 302 с.
11. Лебедев А. В., Хилько А. И. Рассеяние звука упругими тонкостенными цилиндрами ограниченной длины // Акустический журнал. 1992. Т. 38. № 6. С. 1057-1065.
12. Белогорцев А. С., Бугаев В. В., Музыченко В. В. Некоторые особенности рассеяния звука упругими оболочками в жидкости // Акустический журнал. 1993. Т. 39. № 4. С. 598-604.
13. Косарев О. И. Вторичное гидроакустическое поле, создаваемое твердым конечным цилиндром в дальнем поле // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2015. №4. С. 99-103.
14. Косарев О. И. Дифракция звука на конечном твердом цилиндре в дальнем поле // Вестник научно-техн. развития. 2017. № 3. С. 30-37.
15. Толоконников Л. А., Ефимо Д. Ю. Рассеяние звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием // Математическое моделирование. 2023. Т. 35. №4. С. 3-23.
16. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
17. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
18. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

19. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
20. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.
21. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Физматлит, 1978. 512 с.
22. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
23. Векслер Н. Д., Корсунский В. М., Рыбак С. А. Рассеяние плоской наклонно падающей волны круговой цилиндрической оболочкой // Акустический журнал. 1990. Т. 36. № 1. С. 12-16.
24. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
25. Добровольский Н. Н., Скобелыцын С. А., Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 368-382.

REFERENCES

1. Williams, W.E. & Lighthill, M.J. 1956., "Diffraction by a cylinder of finite length", *Math. Proceed. Camb. Phil. Soc.*, vol. 52. no. 2. P. 322-335.
2. Lyamshev, L.M. 1957, "Sound diffraction on a thin bounded elastic cylindrical shell", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 115, no. 2, pp. 271-273, [in Russian].
3. Lyamshev, L.M. 1958, "Sound scattering by a thin rod of finite length", *Akust. Zhurnal*, vol. 4, no. 1, pp. 51-58, [in Russian].
4. Andreeva, I.B. & Samovol'kin, V.G. 1976, "Sound scattering by elastic cylinders of finite length", *Akust. Zhurnal*, vol. 22, no. 5, pp. 637-643, [in Russian].
5. Su J.-H., Varadan, V.V., Varadan, V.K. & Flax L. 1980, "Acoustic wave scattering by a finite elastic cylinder in water", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 68. no. 3. P. 686-691.
6. Muzychenko, V.V. & Rybak, S.A. 1986, "Amplitude of resonant sound scattering by a finite cylindrical shell in a liquid", *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no. 1, pp. 129-131, [in Russian].
7. Muzychenko, V.V. & Rybak, S.A. 1986, "Some features of sound scattering by finite cylindrical shells", *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no. 5, pp. 699-701, [in Russian].
8. Belogortsev, A.S. & Muzychenko, V.V. 1991, "Influence of a restriction of a cylindrical shell on a backscattering amplitude", *Akust. Zhurnal*, vol. 37, no. 2, pp. 228-234, [in Russian].
9. Dotsenko, I.E., Muzychenko, V.V. & Rybak, S.A. 1991, "Sound scattering on the limited elastic cylindrical shell with semispherical endings", *Akust. Zhurnal*, vol. 37, no. 5, pp. 922-932, [in Russian].
10. Shenderov, E.L. 1989, "*Radiation and Scattering of Sound*", Sudostroenie, Leningrad, 302 p. [in Russian].
11. Lebedev, A.V., & Khil'ko, A.I. 1992, "Sound scattering by limited length elastic cylindrical shells with thin walls", *Akust. Zhurnal*, vol. 38, no. 6, pp. 1057-1065, [in Russian].

12. Belogortsev, A. S., Bugayev, V. V. & Muzychenko, V. V. 1991, "Sound scattering on the limited elastic cylindrical shell with semispherical endings", *Akust. Zhurnal*, vol. 39, no. 4, pp. 598-604, [in Russian].
13. Kosarev, O. I. 2015, "Secondary hydroacoustic field generated by a solid finite cylinder in the far field", *Probl. Mashinostr. Avtom.*, no. 4, pp. 99-103, [in Russian].
14. Kosarev, O. I. 2017, "Diffraction of sound by a hard cylinder of finite length in the far field", *Vestn. Nauchno-Tekh. Razvit.*, no. 3 (115), pp. 30-37, [in Russian].
15. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2023, "Scattering of Sound Waves by a Finite Length Elastic Cylinder with an Inhomogeneous Coating", *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 15, no. 5, pp. 863-876.
16. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
17. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
18. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprężystości", PWN, Warszawa.
19. Kurant, R. 1964, "Partial Differential Equations", Mir, Moscow, 830 p., [in Russian].
20. Lebedev, N. N. 1963, "Special Functions and their Applications", Fizmatgiz, Moscow, 358 p., [in Russian].
21. Kalitkin, N. N. 1978, "Numerical methods", Fizmatgiz, Moscow, 512 p., [in Russian].
22. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, "Spline function methods", Nauka, Moscow, 352 p., [in Russian].
23. Veksler, N. D., Korsunskii, V. M. & Rybak, S. A. 1990, "Scattering of an obliquely incident plane acoustic wave by circular cylindrical shell", *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no. 1, pp. 12-16, [in Russian].
24. Korobov, N. M. 2004, "Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]", 2nd ed., MTSNMO, Moscow, Russia.
25. Dobrovolskii, N. N., Skobel'tsyn, S. A., Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2021, "About application of number-theoretic grids in problems of acoustics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 368-382, [in Russian].

Получено: 15.10.2023

Принято в печать: 21.12.2023