

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 539.421

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-256-265

Модель предразрушения слоя с вырезом на основе концепции дуги взаимодействия¹

В. В. Глаголев, В. В. Козлов, А. А. Маркин

Глаголев Вадим Вадимович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: vadim@tsu.tula.ru

Козлов Виктор Вячеславович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: vkozlovtsu@mail.ru

Маркин Алексей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: markin.nikram@yandex.ru

Аннотация

Для упругого симметричного тела в виде слоя, ослабленного вырезом и нагружаемого по моде 1 вводится понятие дуги взаимодействия (ДВ). ДВ образует малая окрестность точки максимума удельной свободной энергии в срединном сечении слоя. Поток свободной энергии через ДВ представляется энергетическим произведением (ЭП) - произведением удельной свободной энергии на линейный параметр. Используя известные асимптотические выражения поля напряжений в окрестности вершины выреза получена связь между линейным параметром и радиусом кривизны вершины выреза, обеспечивающая независимость ЭП от радиуса кривизны и линейного параметра. При нулевом значении радиуса кривизны вырез вырождается в математический разрез. В этом случае ЭП сводится к формуле Ирвина. Таким образом, если какой-либо вырез, вырождается в математический разрез, то независимо от геометрии берегов выреза в пределе мы должны приходиться к одному и тому же коэффициенту интенсивности напряжений (КИН). В частности, используем полуэллиптический вырез. Предложена методика определения КИН-1, основанная на представлении аппроксимирующего КИН через безразмерные потоки свободной энергии, принимающие стационарное значение при стремлении радиуса кривизны к нулю. Полученные данным методом значения КИН совпадают с их значениями, приведенными в других источниках на основании анализа раскрытия математического разреза. В частности, рассмотрен слой прямоугольной формы, подвергаемый воздействию распределенной нагрузки. Решения получены МКЭ с использованием программного комплекса CAE Fidesys Разница с известными результатами составила менее одного процента.

Ключевые слова: дуга взаимодействия, энергетическое произведение, поток свободной энергии, коэффициент интенсивности напряжений

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

В. В. Глаголев, В. В. Козлов, А. А. Маркин. Модель предразрушения слоя с вырезом на основе концепции дуги взаимодействия // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 256–265.

¹Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 539.421

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-256-265

Prefracture model of a layer with a hole based on the interaction arc concept

V. V. Glagolev, V. V. Kozlov, A. A. Markin

Glagolev Vadim Vadimovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: vadim@tsu.tula.ru

Kozlov Viktor Vyacheslavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: vkozlovtsu@mail.ru

Markin Alexey Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: markin.nikram@yandex.ru

Abstract

For an elastic symmetric body in the form of a layer weakened by a hole and loaded in mode 1, the concept of an interaction arc (IA) is introduced. The IA forms a small neighborhood of the point of maximum specific free energy in the middle section of the layer. The free energy flow through IA is represented by the energy product (EP) - the product of the specific free energy and a linear parameter. Using the well-known asymptotic expressions for the stress field in the neighborhood of the hole apex, a relationship is obtained between the linear parameter and the radius of curvature of the hole apex, which ensures the independence of the EP from the radius of curvature and the linear parameter. When the radius of curvature is zero, the hole degenerates into a mathematical cut. In this case, the EP is reduced to the Irwin formula. Thus, if any hole degenerates into a mathematical cut, then regardless of the geometry of the cut edges, in the limit, we must come to the same stress intensity factor (SIF). In particular, we use a semi-elliptical hole. A technique for determining the SIF-1 is proposed, based on the representation of the approximating SIF in terms of dimensionless free energy flows that take a stationary value as the radius of curvature tends to zero. The values of the SIF obtained by this method coincide with their values given in other sources based on the analysis of the disclosure of the mathematical cut. In particular, a rectangular layer subjected to a distributed load is considered. The solutions were obtained by the FEM using the CAE Fidesys software package. The difference with the known results was less than one percent.

Keywords: interaction arc, energy product, free energy flow, stress intensity factor

Bibliography: 18 titles.

For citation:

V. V. Glagolev, V. V. Kozlov, A. A. Markin, 2023, "Prefracture model of a layer with a hole based on the interaction arc concept", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 256–265.

1. Введение

В основополагающей статье Ирвина [1] получена связь между упругой энергией, выделяемой при продвижении трещины в виде математического разреза на единицу длины и коэффициентом интенсивности напряжений (КИН). По существу Ирвин связал чисто энергетический

подход Гриффитса [2] к описанию процессов разделения с распределением полей напряжений и перемещений в окрестности математического разреза в слое конечных размеров. При этом граница слоя и расположение математического разреза определяют величину КИН, пропорциональную внешней нагрузке. Решению данной задачи посвящены многочисленные публикации, в которых рассматриваются как теоретические [3-9], так и экспериментальные методы [10-13] определения КИН. В статьях [14-16] на основе концепции слоя взаимодействия показана стабилизация энергетического произведения (произведения удельной свободной энергии в торцевой части слоя на его толщину) при достижении толщиной слоя малого, но конечного значения. Таким образом устанавливается множество физических разрезов ЭП которых не зависит от их толщины и в энергетическом смысле эквивалентных математическому разрезу. В данной статье концепция ЭП распространяется на слои ослабленные симметричными вырезами, вырождающимися в математический разрез при нулевом значении радиуса кривизны в вершине выреза. Поток свободной энергии через дугу взаимодействия (ДВ) представляется ЭП - произведением удельной свободной энергии на линейный параметр. Используя известные асимптотические выражения поля напряжений в окрестности вершины выреза [17] получена связь между линейным параметром и радиусом кривизны, обеспечивающая независимость ЭП от радиуса кривизны и линейного параметра. В этом случае ЭП сводится к формуле Ирвина. Предложена методика определения K_1 на основе анализа сходимости безразмерного ЭП при уменьшении радиуса кривизны. Приведены примеры численного и аналитического определения КИН.

2. 1. Постановка задачи

Рассматривается материальный слой толщиной h , ослабленный вырезом. Уравнение выреза представим в виде

$$x_1 = x_1(\alpha_2), x_2 = x_2(\alpha_2) \quad (1)$$

где α_2 - параметр, отсчитываемый от точки $x_1 = a$; $x_2 = 0$, данная точка совпадает с точкой минимума кривизны с радиусом кривизны ρ .

При $\rho = 0$ вырез вырождается в математический разрез. В этом случае распределение напряжений в окрестности кончика разреза определяется выражением

$$\sigma_{ij} = \frac{K_1}{\sqrt{r}} \Phi_{ij}(\theta)$$

где r, θ - полярные координаты, отсчитываемые от кончика разреза; K_1 (КИН)- коэффициент концентрации напряжений, зависящий от размеров тела и распределения внешней нагрузки по поверхности тела.

Пусть максимальное значение плотности свободной энергии - ψ_0 достигается в точке минимума кривизны выреза. Определим поток свободной энергии через дугу взаимодействия (ДВ). ДВ - образует окрестность точки $\alpha_2 = 0$, с дуговой координатой $-\frac{S_P}{2} \leq S \leq \frac{S_P}{2}$. Поток свободной энергии через ДВ выражается формулой

$$2\gamma = \int_{-\frac{S_P}{2}}^{\frac{S_P}{2}} \vec{n} \cdot \vec{e} \psi ds \quad (2)$$

где \vec{n} - вектор единичной нормали к поверхности выреза; \vec{e} - единичный вектор вдоль вектора потока.

Представим выражение 2 в виде энергетического произведения [14]

$$2\gamma = \delta_0 \psi_0(\rho) \quad (3)$$

где δ_0 - линейный параметр (ЛП).

Из выражений 2 и 3 получим связь ДВ и ЛП в виде

$$\delta_0 = \int_{-\frac{s_p}{2}}^{\frac{s_p}{2}} \vec{n} \cdot \vec{e} \frac{\psi}{\psi_0} ds \tag{4}$$

Из 4 следует, что величина ЛП зависит от длины ДВ, при $s_p \rightarrow 0, \delta_0 \rightarrow 0$. Процесс нагружения внешних поверхностей выреза полагаем простым - внешние нагрузки пропорциональны параметру t . При этом плотность свободной энергии неограниченно растет с уменьшением радиуса кривизны при сколь угодно малом t и постоянном a . Потребуем, чтобы поток свободной энергии принимал конечное, не зависящее от радиуса кривизны значение, в некоторой окрестности $0 \leq \rho \leq \rho^*$.

В статье [17] приведены асимптотические формулы распределения напряжений в окрестности точки $x_1 = a; x_2 = 0$ произвольного выреза, вырождающегося в математический разрез. Используется полярная система координат с центром в точке $x_1 = a - \frac{\rho}{2}; x_2 = 0$. Распределение напряжений вдоль осевой прямой $x_1 \geq a; x_2 = 0$ имеет вид

$$\sigma_{11} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \frac{\rho}{2r}\right); \sigma_{22} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \frac{\rho}{2r}\right); r \geq \frac{\rho}{2} \tag{5}$$

При $\rho = 0$ имеем распределение напряжений на продолжении математического разреза. Напряжения в точке $x_1 = a; x_2 = 0$ получаем из 5

$$\sigma_{11} = 0, \sigma_{22} = \frac{2K_1}{\sqrt{\pi\rho}} \tag{6}$$

Находим выражение свободной энергии в точке максимума. Используя 6, получим

$$\psi_0 = \frac{2K_1^2}{\hat{E}\pi\rho} \tag{7}$$

Условие независимости потока свободной энергии будет выполнено, если положить зависимость радиуса кривизны от ЛП в виде

$$\rho = \frac{2\delta_0}{\pi} \tag{8}$$

Из формул (1.3), (1.7) и (1.8) получим следующее выражение потока через ДВ для асимптотических вырезов на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^*$:

$$2\gamma_0 = \frac{K_1^2}{\hat{E}} \tag{9}$$

Таким образом на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^*$ поток энергии не зависит от конфигурации кончика выреза и непосредственно от величины радиуса кривизны и определяется формулой Ирвина 9, при этом раскрытие математического разреза не рассматривается.

Распространим 9 на вырезы с $\rho < \rho^* + \Delta\rho$. Получим представление аппроксимирующего потока в виде

$$2\gamma_\rho = \frac{1}{2}\psi_0(\rho, t)\pi\rho > \psi_0(\rho, t)\delta_0^* \tag{10}$$

В отличие от 9 аппроксимирующий поток зависит от радиуса кривизны, но при стремлении выреза к математическому разрезу выполняется условие

$$2\gamma|_{\rho \rightarrow 0} = 2\gamma_0 = \frac{K_1^2}{\hat{E}} \tag{11}$$

Исходя из (1.10) и 11 введем при $\rho < \rho^* + \Delta\rho$ аппроксимирующий КИН, зависящий от радиуса кривизны

$$K_{1\rho}^2 = \frac{1}{2}\pi\hat{E}\rho\Psi_0(\rho, t).$$

При стремлении ρ к нулю выполняется условие

$$K_1 = \lim K_{1\rho}|_{\rho \rightarrow 0} \quad (12)$$

Внешнюю нагрузку, распределенную по поверхности выреза представим в виде

$$\vec{P}(\vec{x}_\Sigma, t) = tP_0(\vec{x}_\Sigma)\vec{e}_2,$$

где \vec{x}_Σ - радиус- вектор поверхностных точек.

Учитывая линейную зависимость $K_{1\rho}$ от параметра t запишем аппроксимирующий КИН в виде

$$K_{1\rho} = t\left(\frac{1}{2}\pi\hat{E}\rho\Psi_0(\rho, P_0(x_\Sigma))\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Выделим в выражении 13 составляющую, зависящую от распределения внешней нагрузки и от радиуса кривизны

$$C_{1\rho} = \left(\frac{1}{2}\rho\Psi_0(\rho, P_0(x_\Sigma))\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Теперь, с учетом 14, представим аппроксимирующий КИН 13 в виде

$$K_{1\rho} = t\sqrt{\pi\hat{E}}C_{1\rho} \quad (15)$$

При вырождении выреза в математический разрез из 12 и 15 находим соответствующий КИН как

$$K_1 = t\sqrt{\pi\hat{E}}\lim C_{1\rho}|_{\rho \rightarrow 0} \quad (16)$$

Таким образом, если для какого либо выреза, вырождающегося в математический разрез при $\rho \rightarrow 0$, установлена аналитически или численно зависимость 14, то независимо от геометрии берегов выреза в пределе мы должны, в соответствии с условием 16, приходиться к одному и тому же КИН. В частности, используем полуэллиптический вырез с полуосями $a \gg b$. Уравнение выреза имеет вид

$$\hat{x}_1 = \cos \alpha_2; \hat{x}_2 = \sqrt{\hat{\rho}} \sin \alpha_2; 0 \leq \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

где $\hat{x}_1 = \frac{x_1}{a}$; $\hat{x}_2 = \frac{x_2}{a}$ - безразмерные координаты; $\hat{\rho} = \frac{b^2}{a^2}$ - безразмерный радиус кривизны в точке A , где $\hat{x}_1 = 1$; $\hat{x}_2 = 0$.

В качестве примера определим по предложенной методике КИН прямоугольного в плане тела с размерами $0 \leq x_1 \leq l$; $0 \leq x_2 \leq \frac{h}{2}$. На внешних плоскостях $x_2 = \pm \frac{h}{2}$ тело нагружается растягивающей нагрузкой постоянной интенсивности P . При фиксированном значении внешней нагрузки с помощью МКЭ находим зависимость (1.14) от ρ , уменьшая радиус кривизны выреза.

3. 2. Последовательность решения задачи

С учетом компонент напряжений σ свободная энергия в точке максимума принимает вид

$$\psi_0 = \frac{\sigma_{22}^2}{2\hat{E}} \quad (18)$$

Используя (2.1) и (1.8) представим поток энергии \mathcal{Z} в следующем виде:

$$2\gamma = \frac{\sigma_{22}^2}{4\hat{E}}\pi\rho. \quad (19)$$

Введем безразмерный (приведенный) поток энергии для полуэллиптического выреза 17

$$2\hat{\gamma} = C_2^2\hat{\rho} \quad (20)$$

где $C_2 = \frac{\sigma_{22}}{P}$ - коэффициент концентрации напряжений.

С учетом 20 и 17 выражение потока энергии 19 получим в виде

$$2\gamma = \frac{P^2}{4\hat{E}}\pi a 2\hat{\gamma}$$

Используя формулу 20 для последовательности уменьшающихся $\hat{\rho}$, с помощью МКЭ находим численное стационарное значение $2\hat{\gamma} = 2\hat{\gamma}_0, \rho < \rho^*$. Зная $2\hat{\gamma}_0$ из условия 11 находим соответствующий КИН, который представим в известной форме

$$K_1 = P\sqrt{\pi a} \cdot Y \quad (21)$$

Здесь $Y = \frac{\sqrt{2\hat{\gamma}_0}}{2}$ - поправочный множитель, который определяется через найденное значение $2\hat{\gamma}_0$.

Для параметров $l = 0.1$ м, $h = 0.2$ м, $a = 0.03$ м, $E = 3 \cdot 10^7$ Па, $\nu = 0.3$, $P = 10^6$ Па на рис. 2.1 показан график зависимости КИН $K_{1Fem}(\lg \rho)$, определенный формулой (2.4). Значения получены из расчетов МКЭ моделей с различными относительными размерами слоя.

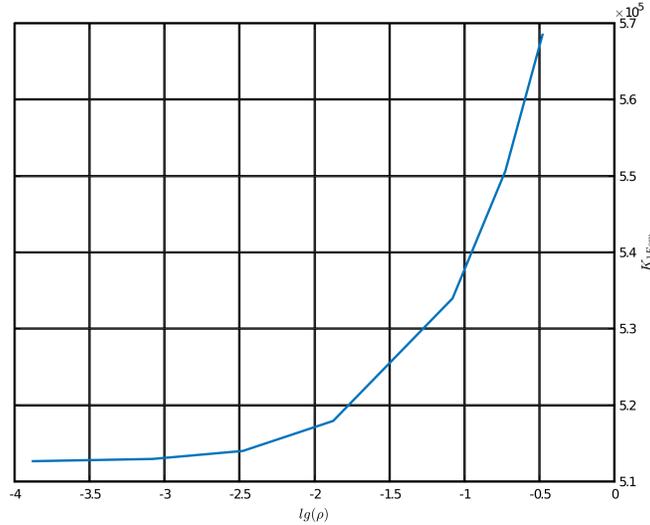


Рис. 1: Зависимость $K_{1Fem}(\lg \rho)$

Из графика устанавливаем пороговое значение радиуса кривизны $\rho^* \approx 10^{-3}$, соответствующее переходу выреза к трещиноподобному дефекту, когда аппроксимирующий КИН достигает стационарного значения - $K_{1Fem}(\rho^*) = K_{1Fem}^* \approx 5.127 \cdot 10^5$ кг $\sqrt{м}/с^2$.

В соответствии с [18] следует эталонное значение $K_1 \approx 5.096 \cdot 10^5$ кг $\sqrt{м}/с^2$. Таким образом, относительная погрешность K_{1Fem}^* по сравнению со справочным значением составляет 0.603

В случае бесконечной пластины зависимость σ_{22} от $\hat{\rho}$ может быть представлена в виде

$$\sigma_{22} = P \frac{2 + \sqrt{\hat{\rho}}}{\sqrt{\hat{\rho}}} \quad (22)$$

Из (2.3) и (2.5) получим

$$2\hat{\gamma}_0 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(2 + \sqrt{\rho})^2}{\hat{\rho}} \hat{\rho} = 4$$

В результате приходим к классическому значению КИН-1 для бесконечной плоскости с математическим разрезом

$$K_1 = P\sqrt{\pi a}$$

4. Заключение

Предложенное представление потока свободной энергии через дугу взаимодействия в виде энергетического произведения позволило, используя асимптотические формулы, установить связь между ЛП и радиусом кривизны, обеспечивающую независимость потока от радиуса кривизны при его стремлении к нулю, при переходе к математическому разрезу данное представление сводится к формуле Ирвина.

Предложена методика определения КИН-1, основанная на представлении аппроксимирующего КИН через безразмерные потоки свободной энергии, принимающие стационарное значение при стремлении радиуса кривизны к нулю. Полученные данным методом значения КИН совпадают с их значениями приведенными в других источниках на основании анализа раскрытия математического разреза.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Irwin G. R. Fracture dynamics // *Fracturing of Metals*. American Society for Metals, Cleveland. 1948. P. 147-166.
2. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1920. A221. P. 163-198.
3. Vainshtok V.A., Kravets P.Y. Calculation of the stress intensity factors and nominal stresses in the plane of a crack from the opening of its edges // *Strength of Materials*. 1990. Vol. 22. P. 807–815. <https://doi.org/10.1007/BF00767438>
4. Гудков Н.А., Чернягин А.С. Расчет параметров механики разрушения на основе эвристического подхода к определению положения вершины трещины // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2018. Т. 2 (119). С. 4-16. <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2018-2-4-16>
5. Дильман В.Л., Уткин П.Б. Двухпараметрический метод определения коэффициента интенсивности напряжений KI трещиноподобных дефектов методом голографической интерферометрии // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. 2022. Т. 14, № 3. С. 60-67. <https://doi.org/10.14529/mmph220307>
6. Захаров А.П., Шлянников В.Н., Иштыряков И.С. Пластический коэффициент интенсивности напряжений в задачах механики разрушения // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2019. № 2. С. 100-115. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.08>
7. Miyazaki N., Ikeda T., Munakata T. Analysis of stress intensity factor using the energy method combined with the boundary element method // *Computers and Structures*. 1989. Vol. 33, Issue 3. P. 867-871. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90261-7](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90261-7)

8. Hellen T.K., Blackburn W.S. The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading // *International Journal of Fracture*. 1975. Vol. 11. P. 605–617. <https://doi.org/10.1007/BF00116368>
9. Diaz F., Patterson E., Yates, J. Assessment of effective stress intensity factors using thermoelastic stress analysis // *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 2009. Vol. 44. P. 621-632. <https://doi.org/10.1243/03093247JSA515>
10. Chandra R. Experimental determination of stress intensity factors in patched cracked plates // *Engineering Fracture Mechanics*. 1989. Vol. 33. Issue 1. P. 65-79. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(89\)90055-6](https://doi.org/10.1016/0013-7944(89)90055-6)
11. Cerniglia D., Nigrelli V., Pasta A. Experimental and numerical determination of stress intensity factor in composite materials // *Proceedings of the 1999 International Conference on Composite Materials*. 1999. P. 1-8.
12. Lopez-Crespo P. The stress intensity of mixed mode cracks determined by digital image correlation // *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 2008. Vol. 43, № 8. P. 769-780. <https://doi.org/10.1243/03093247JSA419>
13. Camacho Reyes A., Vasco-Olmo J.M., Lopez-Alba E., Felipe-Sese L., Molina-Viedma A. J., Almazan-Lazano J. A., Diaz F. Evaluation of the Effective Stress Intensity Factor Using Thermoelastic Stress Analysis and 2D Digital Image Correlation // *The 19th International Conference on Experimental Mechanics*. 2022. P. 1-7. <https://doi.org/10.3390/psf2022004027>
14. Glagolev, V.V., Markin, A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *Int. J. Solids and Struct.* 2019. Vol. 158. P. 141-149. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>
15. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters // *International Journal of Solids and Structures* 2020. Vol. 193-194. P. 447–454. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.02.039>
16. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2018. № 4. P. 93–97. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.4.08>
17. Creager M. The elastic stress field near the tip of a blunt crack / *Masters Thesis*. Lehigh University. 1966. P. 40.
18. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений в 2-х томах. Том 2. М.: Мир. 1990. 568 с.

REFERENCES

1. Irwin, G. R 1948, “Fracture dynamics”, *Fracturing of Metals. American Society for Metals, Cleveland*, pp. 147-166.
2. Griffith A.A. 1920, “The phenomenon of rupture and flow in solids”, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A221, pp. 163-198.
3. Vainshtok V.A. & Kravets P.Y. 1990, “Calculation of the stress intensity factors and nominal stresses in the plane of a crack from the opening of its edges”, *Strength of Materials*, vol. 22, pp. 807–815. doi: 10.1007/BF00767438

4. Gudkov N.A. & Chernyatin A.S. 2018, “Computing parameters of fracture mechanics based on a heuristic approach to determining the location of the crack tip”, *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman*, vol. 2 (119), pp. 4-16. doi: 10.18698/0236-3941-2018-2-4-16
5. Dilman V.L. & Utkin P.B. 2022, “Two-parameter method of determining stress intensity factor KI of crack-like defects using holographic interferometry”, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, vol. 14, issue 3, pp. 60–67. doi: 10.14529/mmph220307
6. Zakharov A.P., Shlyannikov V.N. & Ishtyryakov I.S. 2019, “Plastic stress intensity factor in fracture mechanics”, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 100-115. doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.08
7. Miyazaki N., Ikeda T. & Munakata T. 1989, “Analysis of stress intensity factor using the energy method combined with the boundary element method”, *Computers and Structures*, vol. 33, issue 3, pp. 867-871. doi: 10.1016/0045-7949(89)90261-7
8. Hellen T.K. & Blackburn W.S. 1975, “The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading”, *International Journal of Fracture*, vol. 11, pp. 605–617. doi: 10.1007/BF00116368
9. Diaz F., Patterson E. & Yates J. 2009, “Assessment of effective stress intensity factors using thermoelastic stress analysis”, *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 44, pp. 621-632. doi: 10.1243/03093247JSA515
10. Chandra R. 1989, “Experimental determination of stress intensity factors in patched cracked plates”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 33, issue 1, p. 65-79. doi: 10.1016/0013-7944(89)90055-6
11. Cerniglia D., Nigrelli V. & Pasta A. 1999, “Experimental and numerical determination of stress intensity factor in composite materials”, *Proceedings of the 1999 Internatoinal Conference on Composite Materials*, pp. 1-8.
12. Lopez-Crespo P. 2008, “The stress intensity of mixed mode cracks determined by digital image correlation”, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 43, no. 8, p. 769-780. doi: 10.1243/03093247JSA419
13. Camacho Reyes A., Vasco-Olmo J.M., Lopez-Alba E., Felipe-Sese L., Molina-Viedma A. J., Almazan-Lazano J. A. & Diaz F. 2022, “Evaluation of the effective stress intensity factor using thermoelastic stress analysis and 2D digital image correlation”, *The 19th International Conference on Experimental Mechanics*, pp. 1-7. doi: 10.3390/psf2022004027
14. Glagolev, V.V. & Markin, A.A. 2019, “Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter”, *Int. J. Solids and Struct.*, vol. 158, pp. 141-149. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
15. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V. & Markin A.A. 2020 “Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 193-194, pp. 447–454. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.02.039
16. Berto F., Glagolev V.V. & Markin A.A. “A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter”, *PNRPU Mechanics Bulletin*, no. 4, pp. 93–97. doi:10.15593/perm.mech/2018.4.08
17. Creager M. 1966, “The elastic stress field near the tip of a blunt crack”, *Masters thesis, Lehigh University*, p. 40.

18. Murakami Yu. 1990, "Spravochnik po koeffitsiyentam intensivnosti napryazheniy v 2-kh tomakh. Tom 2." ,*Handbook of stress intensity factors in 2 volumes. Vol. 2, Moscow: Mir*, p. 568

Получено: 26.04.2023

Принято в печать: 21.12.2023