

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 51-72

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-244-255

Использование МКЭ для решения задачи дифракции акустической волны на совокупности упругих анизотропных тел

Д. Р. Бирюков

Бирюков Данила Русланович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: danilabirukov@rambler.ru

Аннотация

В работе рассматривается прямая задача дифракции гармонической звуковой волны на совокупности линейно упругих тел. Приведена постановка задачи о дифракции плоской акустической волны, распространяющейся в идеальной жидкости, на заданной совокупности неоднородных анизотропных упругих тел. Постановка задачи является двумерной. В качестве метода решения задачи предлагается модификация метода конечных элементов. Описывается как общая идея метода применительно к задачам дифракции, так и алгоритм решения данной поставленной задачи. Для дискретизации в пространстве, окружающем упругие тела, в двумерном случае выделяется область, ограниченная окружностью. Область разбивается на элементы: в данной работе предлагается использовать треугольные элементы первого порядка. Для каждого треугольного элемента строится локальная матрица, структура которой основывается на уравнении Гельмгольца (для жидких элементов) или общих уравнениях движения сплошной среды и законе Гука (для упругих элементов), а также граничных условиях. Локальные матрицы элементов позволяют сформировать разреженную глобальную матрицу для системы линейных алгебраических уравнений, решение которой определяет искомые значения давления и смещений в узлах сетки. Процедура интерполяции позволяет вычислить давление и смещения в произвольной точке внутри области, а граничные условия – определить рассеянную волну в точках вне области.

Ключевые слова: метод конечных элементов, гармоническая волна, плоская волна, идеальная жидкость, упругое тело.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:

Д. Р. Бирюков. Использование МКЭ для решения задачи дифракции акустической волны на совокупности упругих анизотропных тел // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 244–255.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 51-72

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-244-255

Using of the finite element method for solving the problem of diffraction of acoustic wave on a set of elastic inhomogeneous bodies

D. R. Biryukov

Biryukov Danila Ruslanovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: danilabirukov@rambler.ru

Abstract

The paper considers the direct problem of diffraction of a harmonic sound wave by a set of linearly elastic bodies. The statement of the problem of the diffraction of a plane acoustic wave propagating in an ideal fluid by a given set of inhomogeneous anisotropic elastic bodies is presented. The problem statement is two-dimensional. As a method for solving the problem, a modification of the finite element method is proposed. Both the general idea of the method as applied to diffraction problems and the algorithm for solving this problem are described. For discretization in the space surrounding elastic bodies, in the two-dimensional case, a region bounded by a circle is selected. The area is divided into elements: in this work, it is proposed to use triangular elements of the first order. For each triangular element, a local matrix is built, the structure of which is based on the Helmholtz equation (for liquid elements) or general equations of motion of a continuous medium and Hooke's law (for elastic elements), as well as boundary conditions. Local matrices of elements make it possible to form a sparse global matrix for a system of linear algebraic equations, the solution of which determines the required values of pressure and displacements at the grid nodes. The interpolation procedure makes it possible to calculate the pressure and displacements at an arbitrary point inside the region, and the boundary conditions determine the scattered wave at points outside the region.

Keywords: finite element method, harmonic wave, plane wave, ideal fluid, elastic body.

Bibliography: 11 titles.

For citation:

D. R. Biryukov, 2023, "Using of the finite element method for solving the problem of diffraction of acoustic wave on a set of elastic inhomogeneous bodies", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 244–255.

1. Введение

Среди численных методов решения краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных занимает метод конечных элементов [1-3]. Данный метод отличается своей универсальностью и возможностью существенно влиять на качество результата решения с помощью изменения многочисленных параметров (в том числе размером, формой и внутренней структурой конечных элементов). Математическая физика, в том числе механика сплошной среды – классические области применения метода конечных элементов. В частности, данный метод широко используется при численном решении задач механики упругих тел, гидродинамики, гидроакустики.

Хотя для задач дифракции (как прямых, так и обратных) гармонических звуковых волн найдено большое количество аналитических решений, большинство из них касаются дифракции звуковых волн на телах простой формы: плоской, цилиндрической или сферической. Аналитическое решение задач рассеяния звука на телах сложной формы может быть чрезвычайно трудоёмким или вовсе невозможным. Именно в этом случае оптимальным является использование метода конечных элементов как одного из наиболее универсальных численных методов. В качестве примеров работ, посвящённых применению метода конечных элементов к задачам дифракции акустических волн, можно привести [6-10].

Текущая работа посвящена подробному описанию алгоритма применения метода конечных элементов для численного решения задачи рассеяния плоской гармонической звуковой волны на совокупности линейно упругих тел, расположенных в идеальной жидкости. Подробно описываются постановка задачи, дискретизация области решения, построение локальных матриц элементов. Особенное внимание в работе уделяется особенностям, присущим конкретно дифракционным задачам при их решении с помощью метода конечных элементов.

2. Постановка задачи

Рассматривается двумерное пространство, заполненное идеальной жидкостью с плотностью ρ_i . В жидкость помещено некоторое количество конечных по размеру линейно упругих тел $\{G_i\}_{i=1}^{N_B}$, где N_B – целое неотрицательное число. Тела G_i не имеют общих точек и границ. Граница тела G_i обозначается Γ_i . Физические свойства тел характеризуются скалярным полем плотности $\rho(\bar{r})$ и тензорным полем упругих постоянных $\Lambda(\bar{r})$: оба данных поля определены в области $\bigcup_{i=1}^{N_B} G_i$.

В жидкости, окружающей систему тел $\{G_i\}_{i=1}^{N_B}$, распространяется плоская звуковая волна давления [11]

$$p_0(\bar{r}, t) = Ae^{i(\bar{k}_0\bar{r} - \omega t)} \quad (1)$$

где A – амплитуда (имеет размерность давления); $\bar{k}_0$ – волновой вектор; $\bar{r} = (x, y) = (x_1, x_2)$ – радиус-вектор; $\omega = |\bar{k}_0| \cdot c$ – циклическая частота; c – скорость звука в идеальной жидкости. После рассеяния волны p_i на системе тел $\{G_i\}_{i=1}^{N_B}$ образуется результирующее волновое поле $p(\bar{r}, t)$. Разность результирующего и первичного полей $p_s(\bar{r}, t) = p(\bar{r}, t) - p_0(\bar{r}, t)$ есть искомое рассеянное акустическое поле.

В жидкости, окружающей тела G_i , выделяется круглая область Q с центром в начале координат такая, что все тела G_i лежат внутри Q . В дальнейшем в работе под точками области Q понимаются точки, лежащие в Q , но не внутри упругих тел G_i . Таким образом, граница Γ_i является границей между G_i и Q . Участок границы Q , не входящий ни в одно из множеств Γ_i , то есть внешняя граница Q , обозначается в дальнейшем Γ_0 . То есть, Γ_0 – граница между выделенной областью и внешним пространством. Внутри области Q рассматривается результирующее акустическое поле p , вне Q – падающее p_0 и рассеянное p_s поля. Если существуют 2 элемента с общей границей, один из которых принадлежит Q , а другой – G_i , то все их общие узлы лежат на Γ_i .

Поле давления p в Q удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k_0^2 p = 0 \quad (2)$$

где $k_0 = |\bar{k}_0|$. На границе Γ_0 должны выполняться граничные условия

$$p|_{\Gamma_0} = (p_0 + p_s)|_{\Gamma_0} \quad \frac{\partial p}{\partial \eta}|_{\Gamma_0} = \frac{\partial}{\partial \eta} (p_0 + p_s)|_{\Gamma_0} \quad (3)$$

где $\frac{\partial}{\partial \eta}$ – производная по направлению внешней нормали $\bar{\eta}$ к Γ_0 . Так как граница является окружностью с центром в начале координат, то $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial r}$, где радиальная координата $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Поля смещений $\bar{u}$ и напряжений σ в G_i удовлетворяют общим уравнениям движения сплошной среды (модифицированным для случая гармонических колебаний) и обобщённому закону Гука [4]

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \omega^2 \bar{u} = 0 \quad \sigma = \Lambda \cdot \nabla \bar{u} \quad (4)$$

Подставляя закон Гука – второе уравнение (4) – в первое, получаем уравнение относительно $\bar{u}$, описывающее распространение колебаний в G_i :

$$\nabla \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) + \rho \omega^2 \bar{u} = 0 \quad (5)$$

На границе Γ_i должны выполняться граничные условия:

$$\sigma_{\eta\eta}|_{\Gamma_i} = p\bar{\eta}|_{\Gamma_i} \quad \bar{u}|_{\Gamma_i} = \frac{\nabla p}{\rho_i \omega^2} \Big|_{\Gamma_i} \quad (6)$$

Таким образом, математическая постановка задачи состоит в совместном интегрировании уравнений (2), (5) с граничными условиями (3), (6).

3. Дискретизация области решения задачи

Операция дискретизации выполняется для областей Q и G_i . Совокупность данных областей разбивается на треугольные конечные элементы. Узлы конечно-элементной сетки нумеруются от 1 до M_U , элементы – от 1 до M_E . Узлы внутри элемента имеют также локальную нумерацию от 1 до 3. Сетка строится таким образом, чтобы каждый элемент можно было однозначно определить как принадлежащей жидкой области Q или одному из тел G_i (при этом допускается, что участок элемента может выходить за пределы обозначенной области или тела, но подобными участками при решении пренебрегаем).

Каждый ξ -ый элемент снабжается локальной системой координат (e_1, e_2) , связанной с глобальной декартовой системой (x, y) посредством соотношений:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{\beta=1}^3 \begin{pmatrix} x^{(\beta\xi)} \\ y^{(\beta\xi)} \end{pmatrix} N_{\beta}(e_1, e_2) \quad (7)$$

где $x^{(\beta\xi)}$ и $y^{(\beta\xi)}$ – глобальные координаты β -ого узла ξ -ого элемента, $N_{\beta}(e_1, e_2)$ – функции формы (координатные функции), определяемые для треугольного элемента первого порядка по формулам

$$N_1 = 1 - e_1 - e_2 \quad N_2 = e_1 \quad N_3 = e_2 \quad (8)$$

Локальные координаты элемента могут принимать значения в следующих пределах: $0 \leq e_1 \leq 1$, $0 \leq e_2 \leq 1$, $0 \leq e_1 + e_2 \leq 1$. Значения искомых величин p , u_x , u_y в β -ом узле (в глобальной нумерации) обозначаются $p^{(\beta)}$, $u_x^{(\beta)}$, $u_y^{(\beta)}$. При необходимости использования локальной нумерации, значения искомых величин p , u_x , u_y в β -ом узле ξ -ого элемента обозначаются $p^{(\beta\xi)}$, $u_x^{(\beta\xi)}$, $u_y^{(\beta\xi)}$. Как давление, так и смещения считаются определёнными во всех узлах сетки. При этом в случае, если β -ый узел лежит вне жидкости, принимается $p^{(\beta)} = 0$. Если β -ый узел лежит вне упругих тел, принимается $u_x^{(\beta)} = 0$, $u_y^{(\beta)} = 0$. Пусть q – какая-либо из величин p , u_x , u_y . Тогда в произвольной точке ξ -ого элемента значение q определяется как

$$q = \sum_{\beta=1}^3 q^{(\beta\xi)} N_{\beta}(e_1, e_2) \quad (9)$$

В соответствии с технологией метода конечных элементов, уравнения (2), (5) и граничные условия (3), (6) необходимо заменить дискретными аналогами.

Одной из основных операций, выполнение которой необходимо в процессе решения задачи дифракции с помощью метода конечных элементов, является вычисление градиента функции формы: ∇N_{β} . Несмотря на то, что N_{β} определяется как функция локальных координат элемента, производные берутся по глобальным координатам:

$$\nabla N_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial N_{\beta}}{\partial e_j} \begin{pmatrix} \frac{\partial e_j}{\partial x} \\ \frac{\partial e_j}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Производные $\frac{\partial N_{\beta}}{\partial e_j}$ определяются из формул (8). Для вычисления производных $\frac{\partial e_j}{\partial x}$ и $\frac{\partial e_j}{\partial y}$ необходимо выразить локальные координаты через глобальные, используя формулу (7), и выполнить дифференцирование. Решая уравнение (7) с учётом (8) относительно e_1 и e_2 , получаем:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(2\xi)} - x^{(1\xi)} & x^{(3\xi)} - x^{(1\xi)} \\ y^{(2\xi)} - y^{(1\xi)} & y^{(3\xi)} - y^{(1\xi)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - x^{(1\xi)} \\ y - y^{(1\xi)} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Вычисляя производные $\frac{\partial e_j}{\partial x}$ и $\frac{\partial e_j}{\partial y}$ с помощью (11) и подставляя их в (10), получаем искомые производные $\frac{\partial N_{\beta}}{\partial x}$ и $\frac{\partial N_{\beta}}{\partial y}$. Одним из применений формулы (10) является дифференцирование искомых величин p , u_x и u_y :

$$\nabla q = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial y} \end{pmatrix} = \sum_{\beta=1}^3 q^{(i\xi)} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} \end{pmatrix} = \sum_{\beta=1}^3 \left[q^{(\beta\xi)} \sum_{l=1}^2 \frac{\partial N_{\beta}}{\partial e_l} \begin{pmatrix} \frac{\partial e_l}{\partial x} \\ \frac{\partial e_l}{\partial y} \end{pmatrix} \right] \quad (12)$$

4. Построение локальной матрицы упругого элемента

Рассмотрим элемент E_{ξ} сетки с номером ξ , принадлежащий упругой области G_k . Колебания в элементе удовлетворяют (5). Если участок границы ∂E_{ξ} элемента находится на Γ_k , то выполняются граничные условия (6). В соответствии с методом Галеркина [5], умножим обе части (5) на функцию формы N_{β} и проинтегрируем по площади элемента E_{ξ} :

$$\int_{E_{\xi}} N_{\beta} (\nabla \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) + \rho \omega^2 \bar{u}) dS = 0$$

где dS – элемент площади элемента E_{ξ} . Преобразуем полученное уравнение:

$$\int_{E_{\xi}} \nabla \cdot (N_{\beta} \Lambda \cdot \nabla \bar{u}) dS - \int_{E_{\xi}} \nabla N_{\beta} \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) dS + \int_{E_{\xi}} N_{\beta} \rho \omega^2 \bar{u} dS = 0 \quad (13)$$

На основе формулы Гаусса-Остроградского, первый интеграл в (13) равен

$$\int_{E_{\xi}} \nabla \cdot (N_{\beta} \Lambda \cdot \nabla \bar{u}) dS = \int_{\partial E_{\xi}} (N_{\beta} \Lambda \cdot \nabla \bar{u}) \cdot \bar{\eta} dL$$

где dL – элемент длины границы элемента E_{ξ} , $\bar{\eta}$ – внешняя нормаль к границе элемента. Тогда (13) принимает вид

$$\int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) dS - \int_{E_\xi} N_\beta \rho \omega^2 \bar{u} dS - \int_{\partial E_\xi} (N_\beta \Lambda \cdot \nabla \bar{u}) \cdot \bar{n} dL = 0$$

Граница ∂E_ξ в общем случае состоит из участков, лежащих на Γ_k , и участков границы между несколькими упругими элементами. Последними можно пренебречь, так как они вносят взаимно противоположные вклады в глобальную матрицу (внешние нормали $\bar{n}$ граничащих элементов противоположны). Следовательно, последнее уравнение можно записать в виде

$$\int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) dS - \int_{E_\xi} N_\beta \rho \omega^2 \bar{u} dS - \int_{\Gamma_{kj}} (N_\beta \Lambda \cdot \nabla \bar{u}) \cdot \bar{n} dL = 0 \quad (14)$$

где $\Gamma_{k\xi}$ – участок границы элемента E_ξ , отождествляемый с участком Γ_k . Для дальнейшего преобразования уравнения (14) следует рассмотреть условия (6). Первое условие для его использования в численном алгоритме следует модифицировать, дополнив его вектором дополнительных неизвестных $\bar{f}$, равным нулю во всех узлах, кроме находящихся на границе Γ_k . Домножим обе части модифицированного первого условия (6) на N_β и проинтегрируем по $\Gamma_{k\xi}$:

$$\int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta (\bar{n} \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) + \bar{f} - p\bar{n}) dL = 0$$

Сравнивая данное условие с (14), можем преобразовать (14):

$$\int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot (\Lambda \cdot \nabla \bar{u}) dS - \int_{E_\xi} N_\beta \rho \omega^2 \bar{u} dS - \int_{\Gamma_{kj}} N_\beta (p\bar{n} - \bar{f}) dL = 0 \quad (15)$$

Домножим обе части второго условия (6) на N_β и проинтегрируем по $\Gamma_{k\xi}$:

$$\int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta \bar{n} \left(\bar{u} - \frac{\nabla p}{\rho_0 \omega^2} \right) dS = 0 \quad (16)$$

Локальная матрица W_ξ упругого элемента строится на основе векторных уравнений (15) и (16), записанных для каждой функции формы N_n . 3 узла элемента имеют всего 15 неизвестных комплексных параметров ($p^{(\beta\xi)}$, $u_x^{(\beta\xi)}$, $u_y^{(\beta\xi)}$, $f_x^{(\beta\xi)}$, $f_y^{(\beta\xi)}$ для каждого β -ого узла данного ξ -ого элемента). Каждому из параметров соответствует отдельная строка матрицы и отдельный столбец. Сумма коэффициентов при произвольном параметре $q^{(\alpha\xi)}$ в 1-ой и 2-ой компонентах уравнения (15) есть элемент матрицы в строках соответственно $u_x^{(\beta\alpha i)}$ и $u_y^{(\beta\xi)}$, столбце $q^{(\alpha\xi)}$. Сумма коэффициентов при произвольном параметре $q^{(\alpha\xi)}$ в 1-ой и 2-ой компонентах уравнения (16) есть элемент матрицы в строках соответственно $f_x^{(\beta\xi)}$ и $f_y^{(\beta\xi)}$, столбце $q^{(\alpha\xi)}$. Свободные члены уравнений образуют правые части расширенных матриц в соответствующих строках: в случае упругого элемента правая часть равна нулю, так как свободные члены отсутствуют. Строка $p^{(\beta\xi)}$ в случае упругого элемента также является нулевой (до построения глобальной матрицы).

Содержимое ячейки матрицы упругого элемента на пересечении строки $u_I^{(\beta\xi)}$ и столбца $u_I^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$\int_{E_\xi} \left\{ \sum_{J=1}^2 \left[\frac{\partial N_\beta}{\partial x_J} \sum_{m,n=1}^2 \frac{\Lambda_{IJ\alpha\beta}}{2} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_m} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_n} \right) \right] - N_\beta N_\alpha \rho \omega^2 \right\} dS$$

Содержимое ячейки матрицы упругого элемента на пересечении строки $u_I^{(\beta\xi)}$ и столбца $f_I^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$\int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta N_\alpha dL$$

Содержимое ячейки матрицы упругого элемента на пересечении строки $u_I^{(\beta\xi)}$ и столбца $p^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$-\rho_0\omega^2 \int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta N_\alpha \eta_I dL$$

Содержимое ячейки матрицы упругого элемента на пересечении строки $u_I^{(\beta\xi)}$ и столбца $u_I^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$\int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta N_\alpha dL$$

Содержимое ячейки матрицы упругого элемента на пересечении строки $u_I^{(\beta\xi)}$ и столбца $p^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$-\frac{1}{\rho_0\omega^2} \int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_I} dL$$

Интегралы, входящие в описанные ячейки матриц, могут быть посчитаны численно. Следует помнить, что в общем случае компоненты Λ и плотность ρ являются функциями координат, что учитывается при интегрировании. Ячейки матрицы упругого элемента, не упомянутые в списке выше, равны нулю.

5. Построение локальной матрицы жидкого элемента

Рассмотрим элемент E_ξ сетки с номером ξ , принадлежащий жидкой области. Колебания в элементе удовлетворяют (2). Если участок границы элемента находится на Γ_0 , то выполняются граничные условия (3). Если участок границы элемента находится на Γ_k , то выполняются граничные условия (6). В соответствии с методом Галеркина [1, 2, 3], умножим обе части (2) на функцию формы N_β и проинтегрируем по площади элемента E_ξ :

$$\int_{E_\xi} N_\beta (\Delta p + k_0^2 p) dS = 0$$

где dS – элемент площади элемента E_ξ . Преобразуем полученное уравнение:

$$\int_{E_\xi} \nabla \cdot (N_\beta \nabla p) dS - \int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot \nabla p dS + \int_{E_\xi} N_\beta k_0^2 p dS = 0 \quad (17)$$

На основе формулы Гаусса-Остроградского, первый интеграл в (17) равен

$$\int_{E_\xi} \nabla \cdot (N_\beta \nabla p) dS = \int_{\partial E_\xi} N_\beta \nabla p \cdot \bar{\eta} dL$$

где dL – элемент длины границы элемента E_ξ , $\bar{\eta}$ – внешняя нормаль к границе элемента. Тогда (17) принимает вид

$$\int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot \nabla p dS - \int_{E_\xi} N_\beta k_0^2 p dS - \int_{\partial E_\xi} N_\beta \nabla p \cdot \bar{\eta} dL = 0$$

Граница ∂E_j в общем случае состоит из участков, лежащих на Γ_0 ; участков, лежащих на Γ_k ; участков границы между несколькими жидкими элементами. Последними можно пренебречь, так как они вносят взаимно противоположные вклады в глобальную матрицу (внешние нормали $\bar{\eta}$ граничащих элементов противоположны). Следовательно, последнее уравнение можно записать в виде

$$\int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot \nabla p dS - \int_{E_\xi} N_\beta k_0^2 p dS - \int_{\Gamma_{0\xi}} N_\beta \nabla p \cdot \bar{\eta} dL - \int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta \nabla p \cdot \bar{\eta} dL = 0 \quad (18)$$

где $\Gamma_{0\xi}$ – участок границы элемента E_ξ , отождествляемый с участком Γ_0 ; $\Gamma_{k\xi}$ – участок границы элемента E_ξ , отождествляемый с участком Γ_k . Для дальнейшего преобразования (18) следует рассмотреть граничные условия. Из второго условия (6) получаем равенство $\nabla p = \rho_0 \omega^2 \bar{u}$. При его подстановке в (18) получаем:

$$\int_{E_\xi} \nabla N_\beta \cdot \nabla p dS - \int_{E_\xi} N_\beta k_0^2 p dS - \int_{\Gamma_{0\xi}} N_\beta \nabla p \cdot \bar{\eta} dL - \rho_0 \omega^2 \int_{\Gamma_{k\xi}} N_\beta u_\eta dL = 0 \quad (19)$$

где $u_\eta = \bar{u} \cdot \bar{\eta}$ – смещение в направлении внешней нормали $\bar{\eta}$.

Далее следует рассмотреть условия (3). Падающую p_0 и рассеянную p_s волны вне области Q представим в виде бесконечных сумм:

$$p_0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m J_m(k_0 r) e^{im\varphi} \quad p_s = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m H_m(k_0 r) e^{im\varphi} \quad (20)$$

где $\gamma_m = A i^m$; A_m – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий; J_m – цилиндрическая функция Бесселя порядка m ; H_m – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка m ; r и φ – цилиндрические координаты, связанные с декартовыми посредством соотношений $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$.

Подставляя (20) в первое условие (3), получаем:

$$p|_{r=R} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\gamma_m J_m(k_0 R) + A_m H_m(k_0 R)) e^{im\varphi}$$

где R – радиус внешней поверхности области Q . Левую часть равенства следует выразить через узловые значения давления на пов-ти Γ_0 . Введём обозначение: $\vartheta_{\beta\xi} = 1$, если участок границы ξ -ого элемента, содержащий β -ый узел данного элемента (в локальной нумерации), лежит на Γ_0 ; и $\vartheta_{\beta\xi} = 0$ в противном случае. Тогда последнее равенство переписывается в виде:

$$\sum_{\xi=1}^{M_E} \sum_{\beta=1}^3 p^{(\beta\xi)} \vartheta_{\beta\xi} N_\beta = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\gamma_m J_m(k_0 R) + A_m H_m(k_0 R)) e^{im\varphi}$$

Учитывая равенство $\int_0^{2\pi} e^{im_1\varphi} e^{-im_2\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{m_1 m_2}$ (где $\delta_{m_1 m_2} = \begin{cases} 1, & m_1 = m_2 \\ 0, & m_1 \neq m_2 \end{cases}$ – символ Кронекера), применим к обеим частям последнего равенства оператор скалярного произведения, домножив их на $e^{-im\varphi}$ и проинтегрировав по окружности $r = R$. В итоге, выразив из полученной формулы A_m , для каждого целого m получим:

$$A_m = -\frac{\gamma_m J_m(k_0 R)}{H_m(k_0 R)} + \frac{1}{2\pi R H_m(k_0 R)} \sum_{\xi=1}^{M_E} \sum_{\beta=1}^3 p^{(\beta\xi)} \vartheta_{\beta\xi} \langle N_\beta, e^{-im\varphi} \rangle \quad (21)$$

где $\langle N_\beta, e^{-im\varphi} \rangle = \int_0^{2\pi} N_\beta e^{-im\varphi} dL = 2\pi R \int_0^{2\pi} N_\beta e^{-im\varphi} d\varphi$. Теперь подставим (20) во второе условие (3), получим:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \eta} \right|_{r=R} = (\nabla p \cdot \bar{\eta})|_{r=R} = k_0 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\gamma_m J'_m(k_0 R) + A_m H'_m(k_0 R) \right) e^{im\varphi}$$

Подставим в данную формулу представление (21), получим:

$$\begin{aligned} (\nabla p \cdot \bar{\eta})|_{r=R} = \sum_{\xi=1}^{M_E} \sum_{\beta=1}^3 \left[p^{(\beta\xi)} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{k_0 H'_m(k_0 R) \langle N_{\beta}, e^{-im\varphi} \rangle}{2\pi R H_m(k_0 R)} \right] + \\ + k_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \left(\gamma_m J'_m(k_0 R) - \frac{\gamma_m J_m(k_0 R) H'_m(k_0 R)}{H_m(k_0 R)} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

В итоге, правая часть подставляется в интеграл по $\Gamma_{0\xi}$ в уравнении (19) вместо $\nabla p \cdot \bar{\eta}$. Можно видеть, что в данном выражении присутствуют значения давления для узлов, не входящих в элемент E_{ξ} . Это является особенностью дифракционных задач: если в других задачах механики непосредственно друг с другом связаны только узлы, расположенные в одном элементе, то в задачах дифракции связаны друг с другом все узлы, находящиеся на внешней поверхности области Q , для которой выполнена дискретизация. Это не позволяет в дальнейшем рассматривать матрицу системы как «приближённо диагональную». В связи с данным фактом, матрицы для каждого жидкого элемента, получаемые из (19), удобно разделить на два типа: матрицы, учитывающие связи узлов внутри элемента (обычные локальные матрицы); и матрицы, учитывающие связи узлов всей внешней границы Q (далее они называются матрицами внешних узлов).

Локальная матрица W_{ξ} жидкого элемента строится на основе скалярного уравнения (19) без учёта интеграла по $\Gamma_{0\xi}$, записанного для каждой функции формы N_{β} . Каждому из параметров $p^{(\beta\xi)}$, $u_x^{(\beta\xi)}$, $u_y^{(\beta\xi)}$, $f_x^{(\beta\xi)}$, $f_y^{(\beta\xi)}$ для каждого узла соответствует отдельная строка матрицы и отдельный столбец. Сумма коэффициентов при произвольном параметре $q^{(\alpha\xi)}$ в уравнении (19) есть элемент матрицы в строке $p^{(\beta\xi)}$, столбце $q^{(\alpha\xi)}$. Свободные члены уравнений образуют правые части расширенных матриц в соответствующих строках: в случае жидкого элемента без учёта интеграла по $\Gamma_{0\xi}$ правая часть равна нулю. Строки $u_x^{(\beta\xi)}$, $u_y^{(\beta\xi)}$, $f_x^{(\beta\xi)}$, $f_y^{(\beta\xi)}$ в случае жидкого элемента являются нулевыми (до построения глобальной матрицы).

Содержимое ячейки матрицы жидкого элемента на пересечении строки $p^{(\beta\xi)}$ и столбца $p^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$\int_{E_{\xi}} \left(-k_0^2 N_{\beta} N_{\alpha} + \sum_{J=1}^2 \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_J} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x_J} \right) dS$$

Содержимое ячейки матрицы жидкого элемента на пересечении строки $p^{(\beta\xi)}$ и столбца $u_I^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$-\rho_0 \omega^2 \int_{\Gamma_{k\xi}} N_{\beta} N_{\alpha} \eta_I dL$$

Матрица внешних узлов W'_{ξ} (и правая часть $\bar{F}_{\xi}$ расширенной матрицы) строится на основе интеграла по $\Gamma_{0\xi}$ в составе скалярного уравнения (19), записанного для каждой функции формы N_{β} данного элемента ξ , для которой верно равенство $\vartheta_{\beta\xi} = 1$. Каждому из параметров $p^{(\beta\xi)}$, $u_x^{(\beta\xi)}$, $u_y^{(\beta\xi)}$, $f_x^{(\beta\xi)}$, $f_y^{(\beta\xi)}$ каждого узла, для которого верно равенство $\vartheta_{\beta\xi} = 1$, соответствует отдельная строка матрицы. Каждому узлу с глобальным номером α соответствуют столбцы $p^{(\alpha)}$, $u_x^{(\alpha)}$, $u_y^{(\alpha)}$, $f_x^{(\alpha)}$, $f_y^{(\alpha)}$, которые могут быть ненулевыми только в случае, если для некоторого элемента ξ' , содержащего узел α (локальный номер узла в данном элементе равен α') верно $\vartheta_{\alpha'\xi'} = 1$. Сумма коэффициентов при произвольном параметре $q^{(\alpha'\xi')}$ в уравнении

(19) есть элемент матрицы в строке $p^{(\beta\xi)}$, столбце $q^{(\alpha'\xi')}$. Свободные члены уравнений образуют правые части расширенных матриц в соответствующих строках. Строки $u_x^{(\beta\xi)}$, $u_y^{(\beta\xi)}$, $f_x^{(\beta\xi)}$, $f_y^{(\beta\xi)}$ в случае данной матрицы являются нулевыми (до построения глобально).

Содержимое ячейки матрицы внешних узлов на пересечении строки $p^{(\beta\xi)}$ и столбца $p^{(\alpha'\xi')}$ имеет вид

$$-\int_{\Gamma_{0\xi}} N_\beta \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{k_0 H'_m(k_0 R)}{2\pi R H_m(k_0 R)} \times \langle N_{\alpha'}, e^{-im\varphi} \rangle \right) dL$$

Содержимое правой части (столбца свободных членов) расширенной матрицы внешних узлов на пересечении строки $p^{(\beta\xi)}$ и столбца $u_I^{(\alpha\xi)}$ имеет вид

$$\int_{\Gamma_{0\xi}} k_0 N_\beta \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \left(\gamma_m J'_m(k_0 R) - \frac{\gamma_m J_m(k_0 R) H'_m(k_0 R)}{H_m(k_0 R)} \right) dL$$

Интегралы, составляющие ячейки матриц жидких элементов и внешних узлов, могут быть посчитаны численно. Интегралы в ячейке матрицы внешних узлов на пересечении строки $p^{(\beta\xi)}$ и столбца $p^{(\alpha'\xi')}$ суммируются по всем элементам ξ' , содержащим узел $p^{(\alpha'\xi')}$.

6. Построение глобальной матрицы и определение рассеянной волны

После формирования локальных матриц W_ξ , матриц внешних узлов W'_ξ и векторов свободных членов $\bar{F}_\xi$ расширенных матриц внешних узлов для каждого элемента ξ на их основе строится глобальная матрица W_{glob} и вектор $\bar{F}_{glob}$. Каждый элемент глобальной матрицы W_{glob} можно вычислить по формуле:

$$\begin{aligned} (W_{glob})_{\substack{5(I-1)+a \\ 5(J-1)+a}} = \sum_{\xi=1}^{M_E} \left[\sum_{\beta=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 \left(\delta_{I \ u_{\beta\xi}} \cdot \delta_{J \ u_{\alpha\xi}} \cdot (W_\xi)_{\substack{5(\beta-1)+a \\ 5(\alpha-1)+a}} \right) \right] + \\ + \sum_{\xi=1}^{M_E} \left[\sum_{\beta=1}^3 \left(\delta_{I \ u_{\beta\xi}} \cdot (W'_\xi)_{\substack{5(\beta-1)+a \\ 5(J-1)+a}} \right) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

где $u_{\beta\xi}$ – глобальный номер β -ого узла ξ -ого элемента; параметр a принимает натуральные значения от 1 до 5. Матрицу, построенную по формуле (23), следует подвергнуть следующей процедуре модификации: в нулевых строках следует задать единичное значение в ячейке, расположенной на диагонали. Вообще говоря, это касается строк, соответствующих давлению в узлах, не входящих в жидкую область, и соответствующих смещениям и вспомогательным неизвестным в узлах, не входящих в упругие области.

Аналогично, каждая компонента вектора свободных членов $\bar{F}_{glob}$ представим в виде:

$$(\bar{F}_{glob})_I = \sum_{\xi=1}^{M_E} \left[\sum_{\beta=1}^3 \left(\delta_{I \ u_{\beta\xi}} \cdot (\bar{F}_\xi)_{5(\beta-1)+a} \right) \right] \quad (24)$$

После формирования матрицы W_{glob} по формуле (23) и вектора $\bar{F}_{glob}$ по формуле (24) решается следующее СЛАУ:

$$W_{glob} \cdot X = \bar{F}_{glob} \quad (25)$$

Решение СЛАУ (25) позволяет отыскать значения давления и смещений в каждом узле множества Q : $p^{(\beta)} = X_{5\beta+1}$, $u_x^{(\beta)} = X_{5\beta+2}$, $u_y^{(\beta)} = X_{5\beta+3}$. Ввиду того, что большинство элементов матрицы W_{glob} являются нулевыми (так как в большинстве случаев взаимодействуют друг с другом только узлы, находящиеся в одном элементе), матрица W_{glob} является разреженной, что значительно упрощает решение СЛАУ (25).

После вычисления узловых значений давления следует воспользоваться формулой (21) для вычисления коэффициентов A_m рассеянной волны (заметим, что для этого используются только значения давления во внешних узлах). Затем – второй формулой (20) для определения рассеянной волны p_s . Таким образом, задача решена.

7. Заключение

В работе описано использование метода конечных элементов для решения задачи плоской звуковой волны на жидкой области, содержащей произвольную конфигурацию линейно упругих тел. Приведена соответствующая постановка задачи. Подробно описан процесс дискретизации задачи, в том числе особенность дифракционного типа задач, при котором особую важность имеет выражение локальных координат элемента сетки через глобальные. Приведены формулы элементов локальных матриц упругих и жидких элементов сетки. Выявлена отличительная особенность дифракционных задач, в которых связь может существовать между узлами, не лежащими в одном элементе. Таким образом, описан процесс применения МКЭ к дифракционным задачам вне зависимости от конфигурации рассеивающих звук тел.

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н., проф. Скобельцыну Сергею Алексеевичу за помощь в подготовке материала.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация – М.: Мир, 1986. 318 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике – М.: Мир, 1975. 543 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. Скобельцын С.А. Программа расчета коэффициента линейной неоднородности плотности упругого слоя по отражению монохроматической плоской звуковой волны. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015663467, 18.12.2015. 1 с.
6. Скобельцын С.А., Королев А.Н. Использование МКЭ для решения задачи о рассеянии звука ограниченной неоднородной анизотропной термоупругой пластиной // Вестник ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 13, вып. 2. С. 172–182.
7. Скобельцын С.А., Королев А.Н. Метод конечных элементов в задаче о рассеянии плоской упругой волны неоднородным цилиндром // Изв. ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11. Вып. 5. С. 187–200.

8. Скобельцын С.А., Королев А.Н. Особенности конечно-элементной формулировки задач о рассеянии звука // Матер. междунар. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики" Тула: ТулГУ, 2007. С. 205–207.
9. Скобельцын С.А. Решение задач акустики с использованием метода конечных элементов / Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 224 с.
10. Скобельцын С.А. Решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны неоднородным упругим цилиндром с помощью МКЭ // Матер. междунар. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики" Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. С. 298–300.
11. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение. 1972. 348 с.

REFERENCES

1. Gallagher R. 1984, "Finite element method. Basics", *M.: Mir*, 428 p.
2. Zenkevich O., Morgan K. 1986, "Finite elements and approximation", *M.: Mir*, 318 p.
3. Zenkevich O. 1975, "Finite element method in technology", *M.: Mir*, 543 p.
4. Novatsky V. 1975, "Theory of elasticity", *M.: Mir*, 872 p.
5. Skobeltsyn S.A. A program for calculating the coefficient of linear inhomogeneity of the density of an elastic layer based on the reflection of a monochromatic plane sound wave. Certificate of state registration of a computer program No. 2015663467, 12/18/2015. 1 с.
6. Skobeltsyn S.A., Korolev A.N. 2007, "Using FEM to solve the problem of sound scattering by a limited inhomogeneous anisotropic thermoelastic plate", *Bulletin of TulGU. Series Mathematics. Mechanics. Computer science*, Vol. 13, no. 2. pp. 172–182.
7. Skobeltsyn S.A., Korolev A.N. 2005, "Finite element method in the problem of scattering of a plane elastic wave by an inhomogeneous cylinder", *Izv. Tula State University. Series Mathematics. Mechanics. Computer science*, Vol. 11. Iss. 5. pp. 187–200.
8. Skobeltsyn S.A., Korolev A.N. 2007, "Features of the finite element formulation of sound scattering problems", *Mater. international scientific conf. "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"*, *Tula: Tula State University*, pp. 205–207.
9. Skobeltsyn S.A. 2018, "Solving acoustics problems using the finite element method", *Tula: Tula State University Publishing House*, 224 p.
10. Skobeltsyn S.A. 2008, "Solution of the problem of scattering of a plane sound wave by an inhomogeneous elastic cylinder using FEM", *Mater. international scientific conf. "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"* *Tula: Tula State University Publishing House*, pp. 298–300.
11. Shenderov E.L. 1972, "Wave problems of hydroacoustics", *L.: Shipbuilding*, 348 p.

Получено: 22.09.2023

Принято в печать: 21.12.2023