

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-237-243

Трансцендентность некоторых 2-адических чисел¹

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В работе доказывается трансцендентность в поле 2-адических чисел хотя бы одного из двух 2-адических чисел, представляющих собой суммы в поле $\mathbb{Q}_2$ рядов типа Эйлера

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n z^n,$$

где λ представляет собой некоторое полиадическое лиувиллево число, $z = 1$. Как обычно, символ Похгаммера обозначается $(\gamma)_n$, по определению, $(\gamma)_0 = 1$, а при $n \geq 1$ имеем $(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)$. Рассматриваемые ряды сходятся в любом поле $\mathbb{Q}_p$. Мы рассматриваем поле $\mathbb{Q}_2$. Параметром рассматриваемых рядов типа Эйлера является полиадическое число Лиувилля. Напомним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Будем называть полиадическое число λ полиадическим числом Лиувилля (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < |A|^{-n}.$$

Ранее было доказано простое утверждение о том, что полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля $\mathbb{Q}_p$. Иными словами, полиадическое число Лиувилля - глобально трансцендентное число. Это позволяет, используя некоторое тождество для обобщённых гипергеометрических рядов и предыдущие результаты автора доказать, что существует бесконечное множество полей $\mathbb{Q}_p$, в которых трансцендентно хотя бы одно из значений рядов $f_0(z)$, $f_1(z)$. В этой работе доказывается трансцендентность значений в конкретном поле $\mathbb{Q}_2$.

Ключевые слова: трансцендентность, полиадическое число, полиадическое число Лиувилля.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

В. Г. Чирский. Трансцендентность некоторых 2-адических чисел // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 237–243.

¹Работа выполнена при поддержке проекта «Ведущие научные школы МГУ».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-237-243

Transcendence of certain 2-adic numbers

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grigor'evich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We prove here that at least one of the two 2-adic numbers which are the values at $z = 1$ of the sums in $\mathbb{Q}_2$ of the series

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n \lambda^n,$$

where λ is a certain polyadic Liouville number. The series considered converge in any field $\mathbb{Q}_p$. We deal here with $\mathbb{Q}_2$. The symbol $(\gamma)_n$ denotes Pochhammer symbol, i.e. $(\gamma)_0 = 1$, and for $n \geq 1$ we have $(\gamma)_n = \gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1)$. The values of these series were also calculated at polyadic Liouville number. The canonic expansion of a polyadic number λ is of the form

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

This series converges in any field of p -adic numbers $\mathbb{Q}_p$.

We call a polyadic number λ a polyadic Liouville number, if for any n and P there exists a positive integer A such that for all primes p , satisfying $p \leq P$ the inequality

$$|\lambda - A|_p < |A|^{-n}$$

holds.

It was proved earlier that the Liouville polyadic number is transcendental in any field $\mathbb{Q}_p$. In other words, the Liouville polyadic number is globally transcendental. It allowed to prove using some equality that there exists an infinite set of p -adic fields $\mathbb{Q}_p$ where at least one of the numbers $f_0(z), f_1(z)$. Here we prove the transcendence of values in the field $\mathbb{Q}_2$.

Keywords: transcendence, polyadic number, polyadic Liouville number,

Bibliography: 16 titles.

For citation:

V. G. Chirskii, 2023, "Transcendence of certain 2-adic numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 237–243.

1. Введение

Работа относится к теории трансцендентных чисел в неархимедовски нормированных областях. Теория трансцендентных чисел достаточно подробно освещена в [1]. Лиувиллевы числа, с изучения которых фактически и началась теория трансцендентных чисел, изучались во многих работах. Отметим две из них, [2],[3], наиболее близких по содержанию к настоящей работе. Объекты, названные в этой работе полиадическими числами Лиувилля, рассматриваются относительно недавно. Они представляют собой важную составляющую работ автора [4], где параметром рассматриваемого ряда типа Эйлера является полиадическое число Лиувилля и [5], где значения рядов рассматриваются в полиадической точке Лиувилля. В работах [6]- [10] содержатся результаты автора, относящиеся к развитию метода Зигеля-Шидловского и ряду других вопросов теории трансцендентных чисел в областях с неархимедовскими нормированиями. Отметим работу Е.Ю. Юденковой [11], в которой значения F - рядов рассматриваются в полиадических точках Лиувилля, работу В.Ю. Матвеева [12], работу Е.С. Крупицына [13], где установлены оценки многочленов от совокупностей полиадических чисел Лиувилля. В упомянутых выше работах доказывалось существование бесконечного множества полей p - адических чисел, в которых заданный многочлен от значений рассматриваемых рядов не обращается в ноль. Исследования арифметических свойств рядов рассматриваемого типа в конкретном поле p - адических чисел представляет собой значительно более трудную задачу. См. например, [14]. В работе автора [15] установлено существование бесконечного множества полей p - адических чисел, в которых хотя бы одно из двух значений некоторых гипергеометрических рядов трансцендентно.

Напомним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле p - адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m |a_n n!|_p = 0.$$

Так как $a_n \in \mathbb{Z}$, имеем $|a_n|_p \leq 1$, кроме того,

$$|n!|_p = p^{-\frac{n - S_n}{p-1}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Здесь S_n обозначает сумму цифр p -ичного разложения числа n . Разумеется, ряд, члены которого - целые числа, сходящийся во всех полях p - адических чисел, представляет собой целое полиадическое число.

Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p - адических чисел по всем простым числам p . Элементы λ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых в соответствующем кольце целых p - адических чисел обозначаем $\lambda^{(p)}$.

Будем называть полиадическое число λ полиадическим числом Лиувилля (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < |A|^{-n}.$$

Точнее говоря, следовало бы писать

$$|\lambda^{(p)} - A|_p < |A|^{-n},$$

однако мы условимся, что при рассмотрении поля p -адических чисел под символом λ подразумевается сумма $\lambda^{(p)}$ этого ряда.

2. Основное тождество и его следствия

Для гипергеометрических рядов общего вида

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\alpha_1)_n \dots \alpha_r)_n}{((\beta_1)_n \dots \beta_s)_n} z^n,$$

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\alpha_1 + 1)_n \dots \alpha_r + 1)_n}{((\beta_1 + 1)_n \dots \beta_s + 1)_n} z^n$$

справедливо тождество

$$F_0(z) = 1 + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_s} z F_1(z).$$

Это равенство означает, что если все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ и значение z - алгебраические, то оба значения $F_0(z), F_1(z)$ либо одновременно алгебраические, либо трансцендентные числа. Если же число $\frac{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_s} z$ трансцендентное и число $F_1(z) \neq 0$, то хотя бы одно из этих чисел является трансцендентным. Высказанные выше утверждения относятся как к полю комплексных чисел, так и к любому полю $\mathbb{Q}_p$. В работе [15] рассмотрены ряды

$$\Psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\alpha_1)_n \dots \alpha_m)_n z^n,$$

$$\Psi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\alpha_1 + 1)_n \dots \alpha_m + 1)_n z^n$$

и доказано, что если $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - полиадические числа Лиувилля и если ξ - натуральное число или если Ξ - полиадическое число Лиувилля, то существует бесконечное множество полей $\mathbb{Q}_p$, в которых хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi), \Psi_1(\xi)$ (соответственно, $\Psi_0(\Xi), \Psi_1(\Xi)$) является трансцендентным числом. Цель этой работы - рассмотрение конкретного поля $\mathbb{Q}_2$.

3. Формулировка и доказательство теоремы

Пусть

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n z^n.$$

Мы рассматриваем $p = 2$, т.е. поле $\mathbb{Q}_2$, однако будем рассматривать ряд, сходящийся в любом поле $\mathbb{Q}_p$. Положим

$$\lambda_0 = 1, s_0 = [\exp \lambda_0] + 1 = 3.$$

Пусть λ_1 - произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p , удовлетворяющего неравенству

$$p \leq s_0 + 2\lambda_0^2$$

выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \lambda_1 \geq 2s_0 \ln s_0$$

и положим

$$s_1 = [\exp \lambda_1] + 1.$$

Для $k \geq 1$ пусть λ_{k+1} - произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p , удовлетворяющего неравенству

$$p \leq s_k + 2\lambda_k^2 = 5$$

выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \lambda_{k+1} \geq 2s_k \ln s_k$$

и полагаем

$$s_{k+1} = [\exp \lambda_{k+1}] + 1.$$

Ряд

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$$

сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$.

ТЕОРЕМА. *Хотя бы одно из 2-адических чисел $f_0(1), f_1(1)$ - трансцендентное 2-адическое число.*

Для доказательства теоремы заметим, что ввиду тождества

$$f_0(z) = 1 + \lambda z f_1(z)$$

достаточно доказать, что, во-первых, λ - трансцендентное 2-адическое число и, во-вторых, что $f_1(1) \neq 0$ в поле $\mathbb{Q}_2$. Докажем, что λ - полиадическое число Лиувилля. Пусть выбраны величины n и P . В качестве натурального числа A выберем число λ_k при достаточно большом k . Предполагаем, что

$$P \leq s_k + 2\lambda_k^2, n \leq 2s_k.$$

Тогда

$$|\lambda - \lambda_k|_p \leq |\lambda_{k+1}|_p \leq p^{-2s_k \ln s_k} \leq \lambda_k^{-2s_k},$$

что и утверждалось. В работе [16] доказана теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля $\mathbb{Q}_p$. Иными словами, полиадическое число Лиувилля - глобально трансцендентное число.*

Таким образом, λ - трансцендентное 2-адическое число. Для доказательства того, что $f_1(1) \neq 0$ в поле $\mathbb{Q}_2$ рассмотрим разложение

$$f_1(1) = 1 + (\lambda + 1) + (\lambda + 1)(\lambda + 2) + \dots$$

Заметим, что при $n \geq 1$ выполняется неравенство $\text{ord}_2(\lambda + 1)_n \geq 1$. Действительно,

$$\lambda_0 = 1, \text{ord}_2 \lambda_1 \geq 6 \ln 3 \geq 6.$$

Более того, по условию, значения $\text{ord}_2 \lambda_k$ быстро возрастают. Поэтому

$$\text{ord}_2(\lambda + 1) \geq 1.$$

Ряд $f_1(1)$ сходится и представляет собой сумму числа 1 и 2-адического числа

$$(\lambda + 1) + (\lambda + 1)(\lambda + 2) + \dots,$$

для которого

$$\text{ord}_2((\lambda + 1) + (\lambda + 1)(\lambda + 2) + \dots) \geq 1.$$

Из этого следует неравенство $f_1(1) \neq 0$ и доказываемая теорема.

4. Заключение

Полученная теорема представляет собой первый результат подобного типа. Здесь удалось не только доказать существование бесконечного множества полей, в которых хотя одно из значений рассматриваемых рядов трансцендентно, но и доказать это утверждение в конкретном поле.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа.-М.: «Наука».-1987.-448 с.(Английский перевод:[3] Andrei B.Shidlovskii. Transcendental Numbers. W.de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467pp.).
2. Adams W. On the algebraic independence of certain Liouville numbers.//J.Pure and Appl. Algebra. -1978.-13.-pp.41-47.
3. Waldschmidt M. Independance algebrigue de nombres de Liouville.//Lect.Notes Math.-1990.-1415.-pp.225-235.
4. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлера типа с полиадическим лиувилевым параметром.// Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2020.-т.494, с. 69-70.(Английский перевод Chiskii V. G., Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter. Dokl. Math. 2020.-v.102,no.2. pp.412-413.)
5. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлера типа с полиадическим лиувилевым параметром.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 304 – 312
6. Чирский В. Г. Обобщение понятия глобального соотношения.//Труды по теории чисел. Зап.научн.сем.ПОМИ.-322.-ПОМИ,Спб.-2005.-220-232.
7. Чирский В. Г. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем.,мех.-1994.-№ 3.-с.93-95.
8. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers. // Russ. J. Math. Phys. 2019.- v.26, no.3, pp.286-305.
9. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric F -series. // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, no.2, pp.175-184.
10. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений обобщенных гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами. //Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2022.-т.506.-с.95-107.
11. Юденкова Е. Ю. Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F -рядов в полиадических лиувилевых точках.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 334 – 346
12. Матвеев В. Ю., Свойства элементов прямых произведений полей // Чебышевский сборник. -2019. -т.20. - вып. 2.-с. 383 – 390
13. Крупицын Е. С. Арифметические свойства рядов некоторых классов // Чебышевский сборник. -2019. -т. 20. - вып. 2.-с. 374 – 382
14. Ernvall-Hytonen A.-M.;Matala-aho T.;Seppala I. Euler's factorial series, Hardy integral, and continued fractions.//J.Number Theory. 2023.-v.244.-pp.224-250.
15. Чирский В. Г. Трансцендентность p -адических значений обобщенных гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами. //Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2023.-т.510.-с.29-32.
16. Чирский В. Г. Полиадические числа Лиувилля.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 3.-с. 245 – 255

REFERENCES

1. Shidlovskii, A.B. 1989, "Transcendental Numbers", *W.de Gruyter.-Berlin.-New York*.467pp.
2. Adams. W. 1990, "On the algebraic independence of certain Liouville numbers", *J.Pure and Appl.Algebra.*, Vol, 13, pp.41-47.
3. Waldschmidt. M. 1990, "Independance algebrigue de nombres de Liouville", *Lect.Notes Math.*, Vol, 1415, pp.225-235.
4. Chiskii V.G. 2020, "Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter", *Dokl. Math.*, Vol.102,no.2. pp.412-413.
5. Chiskii V.G.,2021, " Arithmetic properties of values at polyadic Liouvillean point of Euler-type series with polyadic Liouvillean parameter", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp.304-312.
6. Chiskii V.G. 2006, "Generalization of the Notion of a Global Relation", *J. Math. Sci(N.Y)*, Vol.137, no.2, pp.4744-4754.
7. Chiskii V.G.V.G. 1994, "Qn series which are algebraically independent in all local fields", *Vestn.Mosc.univ.Ser.1.,Math.,mech.*, n0.3, pp.93-95.
8. Chirskii V.G. 2019, "Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers", *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, no.3, pp.286-305.
9. Chirskii V.G. 2020, " Arithmetic properties of generalized hypergeometric F- series", *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, no.2, pp.175-184.
10. Chirskii V.G. 2022, " Arithmetic properties of the values of generalized hypergeometric series with polyadic transcendental parameter", *Dokl. Math.*, Vol. 106, no.2, pp.386-397
11. Yudenkova E.Yu. 2021, " Infinite linear and algebraic independence pf values of F-series at polyadic Liouvillean point", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp.334-346.
12. Matveev V.Yu. 2019, " Properties of elements of direct products of fields", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, no.2, pp.383-390.
13. Krupitsin E.S. 2019, " Arithmetic properties of series of certain classes", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, no.2, pp.374-382.
14. Ernvall-Hytonen A.-M.;Matala-aho T.;Seppala I. 2023, " Euler's factorial series, Hardy integral, and continued fractions", *J.Number Theory*, Vol. 244, pp.224-250.
15. Chirskii V.G. 2023, "Transcendence of p-adic values of generalized hypergeometric series with transcendental polyadic parameter", *Dokl. Math.*, Vol. 107, no.2, pp.109-111.
16. Chirskii V.G. 2021, " Polyadic Liouvillean numbers", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.3, pp.245-255.

Получено: 15.10.2023

Принято в печать: 21.12.2023