

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-228-236

Неравенство типа Колмогорова в пространстве Бергмана B_2 и некоторые его приложения

Д. К. Тухлиев

Тухлиев Дилшод Камаридинович — кандидат физико-математических наук, Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова (г. Худжанд, Таджикистан).

e-mail: dtukhliev@mail.ru

Аннотация

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $A(U)$ — множество аналитических в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций, B_2 — пространство Бергмана функций $f \in A(U)$, наделенных конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

Для $f \in A(U)$ обычную производную порядка $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $f^{(m)}(z)$ и введём класс функций

$$B_2^{(m)} := \left\{ f \in B_2 : \|f^{(m)}\|_2 < \infty \right\}.$$

Пусть $E_{n-1}(f)_2$ — величина наилучшего приближения функции $f \in B_2$ комплексными алгебраическими полиномами степени $\leq n-1$. В данной работе найден ряд точных неравенств между величиной наилучшего приближения промежуточных производных $E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2$ ($\nu = 1, 2, \dots, m-1; m \geq 2$) и наилучшего приближения $E_{n-m-1}(f^{(m)})_2$ старшей производной $f^{(m)}$.

Пусть $W_2^{(m)} := W_2^{(m)}(U)$ ($m \in \mathbb{N}$) — класс функций $f \in B_2^{(m)}$, для которых $\|f^{(m)}\|_2 \leq 1$. В работе доказано, что при любых $n, m \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{Z}_+, n > m \geq \nu$ имеет место равенство

$$E_{n-\nu-1}(W_2^{(m)})_2 = \sup\{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 : f \in W_2^{(m)}\} = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}},$$

а также для функций $f \in B_2^{(m)}$ при всех $1 \leq \nu \leq m-1, m \geq 2$ найдено точное неравенство типа Колмогорова

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq A_{m,\nu}(n)(E_{n-1}(f)_2)^{1-\nu/m} \cdot (E_{n-m-1}(f^{(m)})_2)^{\nu/m},$$

где постоянная $A_{m,\nu}(n)$ явно выписывается. Дано некоторые приложения полученного неравенства.

Ключевые слова: пространство Бергмана, точные неравенства, среднее квадратическое приближение, наилучшее полиномиальное приближение, экстремальные задачи, неравенство типа Колмогорова.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

Д. К. Тухлиев. Неравенство типа Колмогорова в пространстве Бергмана B_2 и некоторые его приложения // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 228–236.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-228-236

Kolmogorov's type inequalities in Bergman space B_2 and some of its applications

D. K. Tukhliev

Tukhliev Dilshod Kamaridinovich — candidate of physical and mathematical sciences, Khujand State University (Khujand, Tajikistan).

e-mail: dtukhliev@mail.ru

Abstract

Let $\mathbb{N}$ be the set of natural numbers, $\mathbb{Z}_+$ be the set of non-negative integers, $\mathbb{C}$ be the set of complex numbers, $A(U)$ be the set of analytic functions in the unit circle $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, B_2 — be the Bergman spaces of functions $f \in A(U)$, endowed with a finite norm

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

For $f \in A(U)$, we denote the usual derivative of order $m \in \mathbb{N}$ by $f^{(m)}(z)$ and introduce a class of functions

$$B_2^{(m)} := \left\{ f \in B_2 : \|f^{(m)}\|_2 < \infty \right\}.$$

Let $E_{n-1}(f)_2$ be the magnitude of the best approximation of function $f \in B_2$ by complex algebraic polynomials of degree $\leq n-1$. In this paper, a number of exact inequalities are found between the value of the best approximation of intermediate derivatives $E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2$ ($\nu = 1, 2, \dots, m-1; m \geq 2$) and the best approximation $E_{n-m-1}(f^{(m)})_2$ of the highest derivative $f^{(m)}$.

Let $W_2^{(m)} := W_2^{(m)}(U)$ ($m \in \mathbb{N}$) be a class of functions $f \in B_2^{(m)}$ for which $\|f^{(m)}\|_2 \leq 1$. In this paper is proved that for any $n, m \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{Z}_+, n > m \geq \nu$, the equality of takes place

$$E_{n-\nu-1}(W_2^{(m)})_2 = \sup\{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 : f \in W_2^{(m)}\} = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}},$$

and also, in the space B_2 for functions $f \in B_2^{(m)}$ for all $1 \leq \nu \leq m-1, m \geq 2$, an exact inequality of the Kolmogorov type

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq A_{m,\nu}(n)(E_{n-1}(f)_2)^{1-\nu/m} \cdot (E_{n-m-1}(f^{(m)})_2)^{\nu/m},$$

is found, where the constant $A_{m,\nu}(n)$ is explicitly written out. Some applications of the resulting inequality are given.

Keywords: Bergman space, exact inequalities, mean-square approximations, best polynomial approximation, extremal problems, Kolmogorov type inequality.

Bibliography: 5 titles.

For citation:

D. K. Tukhliev, 2023, "Kolmogorov's type inequalities in Bergman space B_2 and some of its applications", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 228–236.

1. Введение

В работах [1], [2] рассмотрена экстремальная задача о совместном полиномиальном приближении аналитических в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций и их промежуточных производных в пространстве Бергмана B_2 . Здесь мы продолжим наши исследования в этом направлении и докажем ряд точных неравенств о совместном полиномиальном приближении функции $f \in B_2$ и её промежуточных производных.

Введём нужные нам в дальнейшем вспомогательные факты и определения. Через $A(U)$ обозначим множество аналитических в круге U функций. Будем говорить, что функция $f \in A(U)$ принадлежит пространству Бергмана B_2 , если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ —элемент площади.

Известно, [3, стр.44], что функция $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)z^k \in A(U)$ имеет производные $f^{(m)}(z)$ любых порядков $m \in \mathbb{N}$, которые определяются формулой

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m} c_k(f) z^{k-m},$$

где

$$\alpha_{k,m} := k(k-1)(k-2) \cdots (k-m+1), \quad k \geq m, \quad k \in \mathbb{N}, \alpha_{k,0} \equiv 1, \alpha_{k,1} \equiv k,$$

$c_k(f)$ —тейлоровы коэффициенты функции $f(z)$. Всюду далее полагаем

$$B_2^{(m)} := \left\{ f \in B_2; \|f^{(m)}\|_2 < \infty \right\}, m \in \mathbb{Z}_+, B_2^{(0)} \equiv B_2.$$

Пусть P_{n-1} — множество комплексных алгебраических полиномов степени не более $n-1$:

$$P_{n-1} := \left\{ p_{n-1}(z) : p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ равенством

$$E_{n-1}(f)_2 := E_{n-1}(f, P_{n-1})_2 = \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_2 : p_{n-1}(z) \in P_{n-1} \} -$$

определим наилучшее среднеквадратическое полиномиальное приближение функции $f \in B_2$ элементами множества P_{n-1} в метрике пространства B_2 . Хорошо известно, что [4, стр.209]

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k -$$

— частная сумма n -го порядка разложения функции $f \in A(U)$ в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k.$$

Очевидно, что для функции $f \in B_2^{(m)}$ все её последовательные производные $f^{(\nu)}(z)$ ($1 \leq \nu \leq m-1$) также принадлежат пространству B_2 : Так как

$$f^{(\nu)}(z) = \sum_{k=\nu}^{\infty} \alpha_{k,\nu} c_k(f) z^{k-\nu}.$$

то легко доказать, что

$$\begin{aligned} E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 &= \inf \left\{ \|f^{(\nu)} - p_{n-1}^{(\nu)}\|_2 : p_{n-1} \in P_{n-1} \right\} = \\ &= \|f^{(\nu)} - S_{n-1}(f^{(\nu)})\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-\nu+1} \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$S_{n-1}(f^{(\nu)}) = \sum_{k=\nu}^n \alpha_{k,\nu} c_k(f) z^{k-\nu}.$$

В работе [2] установлено, что для любой функции $f \in B_2^{(m)}$ при всех $m, n \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq 2$ и $n > m \geq \nu$, справедливо точное неравенство

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot E_{n-m-1}(f^{(m)})_2, \quad (3)$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(m)}$.

Введём в рассмотрение класс $W_2^{(m)} := W_2^{(m)}(U)$, ($m \in \mathbb{N}$)–функций $f \in B_2^{(m)}$, для которых $\|f^{(m)}\|_2 \leq 1$. Далее, при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in W_2^{(m)}$ в соотношениях общего характера условимся, что $f \notin P_m$. Исходя из неравенства (3), можно убедиться в том, что если $f \in B_2^{(m)}$ ($m \in \mathbb{N}, m \geq 2$), то $f \in B_2^{(\nu)}$ при любом $\nu \in \mathbb{N}$ таком, что $\nu < m$. В связи с этим представляет определённый интерес найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 := \sup \left\{ E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 : f \in W_2^{(m)} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. При любых $n, m \in \mathbb{N}, 1 \leq \nu \leq m-1, m \geq 2$, для которых выполняется ограничение $n > m > \nu$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 &= \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} = \\ &= \frac{1}{(n-\nu)(n-\nu-1) \cdots (n-m+1)} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, для произвольной функции $f \in W_2^{(m)}$, в силу неравенства $E_{n-m-1}(f^{(m)})_2 \leq \|f^{(m)}\|_2 \leq 1$ из соотношения (3) получаем

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}},$$

откуда сразу следует, что

$$\mathcal{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 \leq \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}. \quad (5)$$

Оценку снизу для величины, расположенной в левой части равенства (4), получаем для функции $g_0(z) = \frac{\sqrt{n-m+1}}{\alpha_{n,m}} \cdot z^n$, $n > m$, для которой в силу (1) имеем

$$E_{n-1}(g_0)_2 = \frac{1}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}}. \quad (6)$$

Кроме того, так как

$$g_0^{(\nu)}(z) = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{n-m+1} \cdot z^{n-\nu}, \quad E_{n-\nu-1}(g_0^{(\nu)})_2 = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \quad (7)$$

$E_{n-m-1}(g_0^{(m)})_2 = \|(g_0^{(m)})\|_2 = 1$, то функция $g_0 \in W_2^{(m)}$, а потому учитывая (7), запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 \geq E_{n-\nu-1}(g_0^{(\nu)})_2 = \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}. \quad (8)$$

Первое равенство в (4) вытекает из сопоставления неравенств (5) и (8). Далее, при $n > m > \nu$ пользуясь равенством

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} &= \frac{n(n-1) \cdots (n-\nu+1)}{n(n-1) \cdots (n-m+1)} = \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-\nu+1)}{\underbrace{n(n-1) \cdots (n-\nu+1)} \cdot (n-\nu)(n-\nu-1) \cdots [(n-\nu)-(m-\nu)+1]} = \\ &= \frac{1}{(n-\nu)(n-\nu-1) \cdots (n-m+1)} = \frac{1}{\alpha_{n-\nu,m-\nu}}, \end{aligned}$$

первое равенство в (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} E_{n-\nu-1}(W_2^{(m)})_2 &= \frac{1}{\alpha_{n-\nu,m-\nu}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} = \\ &= \frac{1}{(n-\nu)(n-\nu-1) \cdots (n-m+1)} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}}, \end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.

При фиксированном $\nu \in [1, m-1]$ вводим обозначение

$$A_m(k) := \left(\frac{k-m+1}{k+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{k+1}{k-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{(\alpha_{k,m}^2)^{\nu/m}}$$

и докажем следующее утверждение.

ЛЕММА. При любых $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq m-1$, удовлетворяющих ограничению $n > m > \nu$, справедливо равенство

$$\max_{k \geq n} A_m(k) = A_m(n) := \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m}^2)^{\nu/m}}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь равенством $\alpha_{n,m} = \alpha_{n,\nu} \cdot \alpha_{n-\nu,m-\nu}$, полученным в завершающей части доказательства теоремы 1, запишем $A_m(k)$ в следующем виде:

$$A_m(k) = \left(\frac{k-m+1}{k+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{k+1}{k-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{k,\nu}^{2(1-\nu/m)}}{(\alpha_{k-\nu,m-\nu}^2)^{\nu/m}} =$$

$$= \left(\frac{k-m+1}{k+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{k+1}{k-\nu+1} \cdot \frac{[k(k-1) \cdots (k-\nu+1)]^{2(1-\nu/m)}}{[(k-\nu)(k-\nu-1) \cdots (k-\nu-(m-\nu)-1)]^{2\nu/m}}. \quad (10)$$

Так как при всех $k > n > m$ функция натурального аргумента $A_m(k) > 0$, то прологарифмировав обе части соотношения (10), получаем

$$\begin{aligned} \ln A_m(k) &= \frac{\nu}{m} \left[\ln(k-m+1) - \ln(k+1) \right] + \ln(k+1) - \ln(k-\nu+1) + \\ &\quad + 2 \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \ln \alpha_{k,\nu} - \frac{2\nu}{m} \ln \alpha_{k-\nu, m-\nu} = \\ &= \frac{\nu}{m} \left[\ln(k-m+1) - \ln(k+1) \right] + \ln(k+1) - \ln(k-\nu+1) + \\ &\quad + 2 \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \sum_{s=0}^{\nu-1} \ln(k-s) - \frac{2\nu}{m} \cdot \sum_{s=\nu}^{m-\nu-1} \ln(k-s) := B_m(k) + C_m(k), \end{aligned} \quad (11)$$

где положено

$$B_m(k) = \frac{\nu}{m} \left[\ln(k-m+1) - \ln(k+1) \right] + \ln(k+1) - \ln(k-\nu+1), \quad (12)$$

$$C_m(k) = 2 \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \sum_{s=0}^{\nu-1} \ln(k-s) - \frac{2\nu}{m} \cdot \sum_{s=\nu}^{m-\nu-1} \ln(k-s). \quad (13)$$

Переходя к функции непрерывного аргумента, из равенств (11)–(13) получаем

$$\frac{A'_m(x)}{A_m(x)} = B'_m(x) + C'_m(x), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} B'_m(x) &= \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{x-\nu+1} - \frac{\nu}{m} \cdot \frac{1}{x-m+1} \right), \\ C'_m(x) &= 2 \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \sum_{s=0}^{\nu-1} \frac{1}{x-s} - \frac{2\nu}{m} \cdot \sum_{s=\nu}^{m-\nu-1} \frac{1}{x-s}. \end{aligned}$$

В [5, стр.682] доказано, что при всех $x \geq n$ производная $C'_m(x) < 0$, то есть, $C_m(x)$ является монотонно убывающей при $x \geq n$. Докажем, что и $B'_m(x) < 0$, при $x \geq n$. Так как $1 \leq \nu \leq m-1$, то учитывая неравенство $x-m+1 > x-\nu+1$, и пользуясь тем, что

$$-\frac{1}{x-\nu+1} < -\frac{1}{x-m+1},$$

получаем

$$\begin{aligned} B'_m(x) &= \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{\nu}{m} \cdot \frac{1}{x-m+1} - \frac{1}{x-\nu+1} \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \frac{1}{x+1} + \left(\frac{\nu}{m} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x-m+1} = \\ &= \left(1 - \frac{\nu}{m} \right) \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-m+1} \right) = -\frac{m-\nu}{(x+1)(x-m+1)} < 0. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (10) $A_m(k) > 0$ при всех $k \geq n > m \geq \nu$, то из (14) следует, что производная $A'_m(x) < 0$, при $x \geq n$. Таким образом, функция $A_m(k)$ при $k \geq n > m \geq \nu$ является монотонно убывающей. Следовательно,

$$\sup \{A_m(k) : k \geq n\} = A_m(n)$$

и имеет место равенство (9). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть числа $n, m, \nu \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ удовлетворяют ограничениям $n > m > \nu$. Тогда для любого $1 \leq \nu \leq m - 1$ имеет место точное неравенство типа Колмогорова

$$\begin{aligned} E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 &\leq \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/(2m)} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}} \times \\ &\times \left(E_{n-m+1}(f^{(m)})_2 \right)^{\nu/m} \cdot \left(E_{n-1}(f)_2 \right)^{1-\nu/m}. \end{aligned} \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $f \in B_2^{(m)}$, используя соотношения (2),(1) и равенство

$$E_{n-m-1}(f^{(m)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1},$$

представим $E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2$ в виде

$$\begin{aligned} E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2 &= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-\nu+1} = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right)^{1-\nu/m} \cdot \left(\alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1} \right)^{\nu/m} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{k-m+1}{k+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{k+1}{k-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{k,\nu}}{(\alpha_{k,m})^{\nu/m}}, \end{aligned}$$

и применяя неравенство Гельдера для сумм

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i|^p \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q \right), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

положив $p = \frac{m}{m-\nu}$, $q = \frac{m}{\nu}$, получаем

$$\begin{aligned} &E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2 < \\ &< \sup\{A_m(k) : k \geq n\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right)^{1-\nu/m} \cdot \left(\alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1} \right)^{\nu/m} = \\ &= A_m(n) \cdot \left(E_{n-1}^2(f)_2 \right)^{1-\nu/m} \cdot \left(E_{n-m-1}^2(f^{(m)})_2 \right)^{\nu/m} = \\ &= \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m}^2)^{\nu/m}} \cdot \left(E_{n-1}^2(f)_2 \right)^{1-\nu/m} \cdot \left(E_{n-m-1}^2(f^{(m)})_2 \right)^{\nu/m}, \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (15).

Теперь докажем, что неравенство (15) для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(m)}$, $n, m, \nu \in \mathbb{N}$, $n > m > \nu$, $1 \leq \nu \leq m - 1$, $m \geq 2$ обращается в равенство. Для функции f_0 имеем

$$E_{n-1}^2(f_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

$$E_{n-\nu-1}^2(f_0^{(\nu)})_2 = \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{n-\nu+1}, \quad E_{n-m-1}^2(f_0^{(m)})_2 = \frac{\alpha_{n,m}^2}{n-m+1}.$$

Пользуясь этими равенствами, непосредственным вычислением получаем

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m}^2)^{\nu/m}} \cdot \left(E_{n-1}^2(f_0)_2 \right)^{1-\nu/m} \cdot \left(E_{n-m-1}^2(f_0^{(m)})_2 \right)^{\nu/m} = \\ & = \frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m}^2)^{\nu/m}} \cdot \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1-\nu/m} \cdot \left(\frac{\alpha_{n,m}^2}{n-m+1} \right)^{\nu/m} = \\ & = \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{n-\nu+1} = E_{n-\nu-1}^2(f_0)_2. \end{aligned}$$

Точность неравенства (15) установлена, чем и завершаем доказательство теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq m-1$, $m \geq 2$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in W_2^{(m)}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{E_{n-1}^{1-\nu/m}(f)_2} = \left\{ \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \right\}^{1/2} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную функцию $f \in W_2^{(m)}$, $m \geq 2$, которая не является элементом подпространства P_m . Для такой функции имеем

$$E_{n-m-1}(f^{(m)})_2 \leq \|f^{(m)}\|_2 \leq 1. \quad (17)$$

Учитывая (17) из неравенства (15) получаем

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq \left\{ \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \right\}^{1/2} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}} \cdot \left(E_{n-1}(f)_2 \right)^{1-\nu/m}.$$

Из последнего неравенства сразу вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (10):

$$\sup_{f \in W_2^{(m)}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{E_{n-1}^{1-\nu/m}(f)_2} \leq \left\{ \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \right\}^{1/2} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}}. \quad (18)$$

Оценку снизу указанной величины получаем для функции $g_0(z) = \frac{\sqrt{n-m+1}}{\alpha_{n,m}} \cdot z^n \in W_2^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, ранее использованной нами при доказательстве теоремы 1.

Воспользуясь равенствами (6) и (7), получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in W_2^{(m)}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{E_{n-1}^{1-\nu/m}(f)_2} \geq \frac{E_{n-\nu-1}(g_0^{(\nu)})_2}{E_{n-1}^{1-\nu/m}(g_0)_2} = \\ & = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \left(\alpha_{n,m} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n-m+1}} \right)^{1-\nu/m} = \\ & = \left\{ \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \right\}^{1/2} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь требуемое равенство (16) получаем из сравнения оценок (18) с оценкой снизу (19). Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабозов М. Ш., Тухлиев Д. К. О совместном приближении функций и их последовательных производных в пространстве Бергмана // ДАН Таджикистана. 2018. Т. 61. № 5. С. 419-426.
2. Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Труды ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25. № 2. С. 258-272.
3. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. —М.: Наука. 1969. 239 с.
4. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. —М.—Л.: Наука. 1964. 440 с.
5. Вакарчук С. Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева–Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2014. Т. 95. № 5. С. 666-684.

REFERENCES

1. Shabozov, M. Sh., Tukhliev, D. K. 2018, "On the joint approximation of functions and their successive derivatives in the Bergman space", *DAN Tajikistan*, vol. 61, no. 5, pp. 419-426.
2. Shabozov, M. Sh., Saidusajnov, M. S. 2019, "Mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems", *Trudy IMM UrO RAN*, vol. 25, no. 2, pp. 258-272.
3. Bitsadze, A. V. 1969, "Fundamentals of the theory of analytical functions of a complex variable", —*Moscow.: Nauka*, 239 p (in Russian).
4. Smirnov, V. I., Lebedev, N. A. 1964, "Constructive theory of functions of a complex variable", —*M.—L.: Nauka*, 440 p (in Russian).
5. Vakarchuk, S. B. 2014, "Mean Approximation of Functions on the Real Axis by Algebraic Polynomials with Chebyshev–Hermite Weight and Widths of Function Classes", *Math. Notes*, vol. 95, no. 5, pp. 666-684.

Получено: 27.07.2023

Принято в печать: 21.12.2023