ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 5.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-222-227

Алгоритмические вопросы построения обобщённых параллелепипедальных сеток[1]

А. В. Родионов

Родионов Александр Валерьевич — Тульский государственный педагогический университет (г. Тула).
e-mail: rodionovalexnandr@mail.ru

Аннотация

Определение обобщённой параллелепипедальной сетки не даёт простого представления того, каким образом её строить. В статье предложены алгоритмы построения обобщённых параллелепипедальных сеток, соответствующих целочисленным решёткам.

Ключевые слова: целочисленные решётки, обобщённые параллелепипедальные сетки.

Библиография: 2 названия.

Для цитирования:
А. В. Родионов. Алгоритмические вопросы построения обобщённых параллелепипедальных сеток // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 222–227.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 5.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-222-227

Algorithmic issues of constructing generalized parallelepipedal grids

A. V. Rodionov

Rodionov Alexander Valer'evich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: rodionovalexnandr@mail.ru

Abstract

The definition of a generalized parallelepipedal net does not provide a simple idea of how to construct it. The article proposes algorithms for constructing generalized parallelepipedal nets corresponding to integer lattices.

Keywords: integer lattices, generalized parallelepipedal grids.

Bibliography: 2 titles.

For citation:
A. V. Rodionov, 2023, "Algorithmic issues of constructing generalized parallelepipedal grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 222–227.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение №073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

1. Введение

При решении задач многомерного численного интегрирования большую роль играет выбор сеток, с помощью которых строятся квадратурные формулы.

Использование равномерных сеток в этом случае затруднено в силу «проклятья размерности», а при применении случайных или псевдослучайных последовательностей нельзя на классе аналитических функций получить оценку погрешности лучшую, чем $|R_N[f]| = O(N^{-1})$, где N — число точек сетки.

В 1959 году Н. М. Коробов предложил квадратурные формулы с использованием параллелепипедальных сеток с оптимальными коэффициентами.

Для этих формул на классе E_s^α выполняется оценка погрешности $|R_N[f]| = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right)$, где γ зависит только от размерности s и порядка гладкости α.

Точность найденных формул численного интегрирования значительно превосходит точность как классических, так и вероятностных формул при определенном соотношении между величинами N, α и s. Более того, полученная оценка тем точнее, чем больше гладкость рассматриваемой функции.

Подробнее о классах функций и погрешностях интегрирования с использованием различных видов сеток см., например [1].

Данная работа посвящена алгоритмам построения одного из видов таких сеток — обобщённых параллелепипедальных сеток.

Определение 1. *Пусть в вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$ задана линейно независимая система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$. Совокупность Λ всех векторов вида*

$$n_1\vec{a}_1 + \ldots + n_s\vec{a}_s,$$

где n_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется решеткой в $\mathbb{R}^s$, а сами векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ — базисом этой решетки.

Определение 2. *Взаимной решеткой к решетке Λ называется множество Λ^*, заданное равенством*

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s | \forall \vec{y} \in \Lambda \ \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}^s\}. \tag{1}$$

Если $\vec{a}_j = (a_{j\,1}, a_{j\,2}, \ldots, a_{j\,s})\,(1 \leqslant j \leqslant s)$ — произвольный базис решетки Λ, то взаимную решетку Λ^* можно задать взаимным базисом $\vec{a}_j^* = (a_{j\,1}^*, a_{j\,2}^*, \ldots, a_{j\,s}^*)\,(1 \leqslant j \leqslant s)$, который определяется равенством

$$(\vec{a}_j, \vec{a}_i^*) = \delta_{j\,i} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = i, \\ 0, & \text{если} \quad j \neq i, \end{cases} \qquad (1 \leqslant j,\, i \leqslant s).$$

Из определения взаимного базиса и свойств определителей обратных и транспонированных матриц следует, что $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$.

Символом G_s будем обозначать полуоткрытый единичный s-мерный куб $G_s = [0; 1)^s$.

Определение 3. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется пересечение взаимной решетки к решетке Λ с единичным s-мерным кубом $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Среди рассматриваемых нами решёток особый интерес представляют целочисленные, так как получаемые в этом случае параллелепипедальные сетки — рациональные, и квадратурные формулы с использованием таких сеток будут с равными весами.

В дальнейшем в статье будут рассматриваться только целочисленные решётки и соответствующие им рациональные сетки.

Пусть базис целочисленной решетки Λ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0,$$

где $a_{\nu\mu}$ — целые числа $(\nu, \mu = 1, \dots, s)$. Тогда базис взаимной решетки Λ^* задается матрицей

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{s1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1s} & \dots & b_{ss} \end{pmatrix},$$

где $b_{\nu\mu} = \frac{A_{\nu\mu}}{\det \Lambda}$, а величина $A_{\nu\mu}$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{\nu\mu}$ в матрице A.

Отметим, что базису $\vec{\lambda}_\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu s})$ $(\nu = 1, \dots, s)$ решетки Λ взаимным базисом $\vec{\lambda}^*_\nu$ $(\nu = 1, \dots, s)$ взаимной решетки Λ^* будут векторы

$$\vec{\lambda}^*_\nu = \left(\frac{A_{\nu 1}}{\det \Lambda}, \dots, \frac{A_{\nu s}}{\det \Lambda}\right) \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Из определения сетки $M(\Lambda)$ следует, что

$$M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, 0 \leqslant x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \ldots + k_s A_{s\nu}}{\det \Lambda} < 1 \,(\nu = 1, \dots, s);\ \vec{k} \in \mathbb{Z}^s \right\}. \tag{2}$$

Из определения обобщённой параллелепипедальной сетки легко увидеть, что она состоит из $\det \Lambda$ узлов.

Равенство (2) не даёт простого представления того, каким образом строить обобщённую параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$. Вопросу построения такой сетки посвящён следующий раздел.

2. Приведение базиса решётки к треугольному виду

Как было сказано выше, обобщённая параллелепипедальная сетка с рациональными узлами представляет собой пересечение решётки, взаимной к целочисленной, с s-мерным единичным кубом. Построение такой сетки будет наиболее удобным, если базис соответствующей целочисленной решётки представлен в виде $\vec{b}_\nu = (b_{\nu 1}, \dots, b_{\nu\nu}, 0, \dots, 0)$.

Другими словами, базисная матрица решётки имеет треугольный вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Более того, базисные векторы можно выбрать таким образом, что все их ненулевые компоненты удовлетворяли условию $0 \leqslant a_{\nu\mu} < a_{\mu\mu}$ $(1 \leqslant \mu < \nu \leqslant s)$.

Существование такого базиса следует из теоремы 1 монографии Дж. В. С. Касселса «Введение в геометрию чисел» [2].

Далее нам потребуются некоторые сведения из теории цепных дробей.

Пусть p и q — произвольные натуральные числа. Тогда дробь $\frac{p}{q}$ можно представить в виде конечной цепной дроби

$$\frac{p}{q} = (a_0; a_1, \dots, a_n) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Отрезки этой дроби $\frac{p_k}{q_k} = (a_0; a_1, \ldots, a_k)$ $(k \leqslant n)$ называются подходящими дробями к данному числу $\frac{p}{q}$. Понятно, что $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$.

Сформулируем некоторые свойства подходящих дробей.

1. Для всех $0 \leqslant k \leqslant n$ подходящая дробь $\frac{p_k}{q_k}$ — несократима.

2. Для всех $0 \leqslant k \leqslant n$ выполнено равенство $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$.

Лемма 1. *Пусть $\vec{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{is})$ и $\vec{a}_j = (a_{j1}, \ldots, a_{js})$ — два произвольных вектора, принадлежащие некоторому базису целочисленной решётки Λ, при чём для некоторого t $(1 \leqslant t \leqslant s)$ числа a_{it} и a_{jt} — натуральные. Пусть, также, дроби $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{it}}{a_{jt}}$ — подходящие дроби к числу $\frac{a_{it}}{a_{jt}}$.*

Тогда набор векторов, полученный заменой в данном базисе векторов $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_j$ соответственно на векторы

$$\vec{b} = -q_n \vec{a}_i + p_n \vec{a}_j \quad \vec{c} = (-1)^{n+1} \left(q_{n-1} \vec{a}_i - p_{n-1} \vec{a}_j\right),$$

также является базисом этой решётки, при этом:

1) $b_t = 0$;

2) $c_t = (a_{it}, a_{jt})$, где (a_{it}, b_{it}) — наибольший общий делитель чисел a_{it} и a_{jt}.

Доказательство. Первое свойство следует из равенства $\frac{a_t}{a_t} = \frac{p_n}{q_n}$.

Для доказательства второго свойства воспользуемся тем, что дробь $\frac{p_n}{q_n}$ несократима. Тогда $a_t = (a_t, b_t) \cdot p_n$, $b_t = (a_t, b_t) \cdot q_n$. Получим $c_t = (-1)^{n+1}\big((a_t, b_t) \cdot q_{n-1} p_n - (a_t, b_t) \cdot p_{n-1} q_n\big) = (a_t, b_t)$.

Покажем теперь, что новый набор векторов также является базисом данной решётки. Если A — исходный базис решётки, то указанное преобразование задаётся матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & -q_n & \ldots & p_n & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \ldots & (-1)^{n+1} q_{n-1} & \ldots & (-1)^n p_{n-1} & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В матрице B элементы $b_{ii} = -q_n$, $b_{ij} = p_n$, $b_{ji} = (-1)^{n+1} q_{n-1}$, $b_{jj} = (-1)^n p_{n-1}$; прочие элементы главной диагонали — единицы; остальные элементы матрицы — нули.

Модуль определителя $|\det B| = \big|(-1)^{n+1}(q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1})\big| = 1$, из чего следует, что данное преобразование является унимодулярным, а значит матрица $B \cdot A$ является базисной для данной решётки. $\square$

Теперь опишем *алгоритм приведения базиса решётки Λ к нижнему треугольному виду.*

Шаг 1. Запишем базисную матрицу решётки Λ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем $i = s$.

Шаг 2. Каждую строку матрицы с первой по i-тую, для которой $a_{ji} < 0$ $(1 \leqslant j \leqslant i)$ заменим на противоположную. Если $a_{ii} = 0$, то поменяем местами i-тую строку с произвольной j-той строкой $(1 \leqslant j \leqslant i)$, в которой $a_{ji} \neq 0$.

Заметим, что матрица, полученная в результате указанных преобразований будет являться базисной матрицей решётки Λ. Существование такой строки, в которой $a_{ji} \neq 0$ следует из линейной независимости базисных векторов.

В результате выполнения первого шага получим базисную матрицу решётки Λ, в которой все элементы $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ii}$ неотрицательны, при этом $a_{ii} \neq 0$.

Шаг 3. Для строки с номером $j = 1$ выполним следующую операцию. Если $a_{ji} \neq 0$, заменим первую строку матрицы на строку $-q_n\vec{a}_i + p_n\vec{a}_j$, а i-тую строку на $(-1)^{n+1}(q_{n-1}\vec{a}_i - p_{n-1}\vec{a}_j)$. Здесь $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_j$ — i-тая и j-тая строки матрицы соответственно, p_{n-1}, p_n — числители, q_{n-1}, q_n — знаменатели подходящих дробей к дроби $\frac{a_{ii}}{a_{ij}}$ $(\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{ii}}{a_{ij}})$.

Повторим *шаг 3* для значений j: $2 \leqslant j \leqslant i - 1$.

Согласно лемме 1 в результате выполнения этого шага мы получим матрицу, в которой $a_{1i} = a_{2i} = \ldots = a_{i-1\,i} = 0$, $a_{ii} > 0$.

Повторим *шаги 2–3* для $i = s - 1, \ldots, \ldots, 1$. В результате получим базисную матрицу решётки Λ, приведённую к верхнему треугольному виду.

Заметим, что в полученной матрице все элементы на главной диагонали положительны, а прочие ненулевые элементы могут принимать произвольные значения.

3. Построение обобщённой параллелепипедальной сетки

Пусть базис целочисленной решётки Λ имеет нижний треугольный вид, причём все её элементы неотрицательны (элементы на главной диагонали строго положительны в силу полноты решётки):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \geqslant 0 \ (i, j = 1, \ldots, s). \tag{3}$$

Её детерминант равен $\det\Lambda = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{ss}$.

В этом случае базисная матрица взаимной решётки Λ^* будет верхней треугольной:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1s} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{ss} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

- при $i > j \quad b_{ij} = 0$;
- при $i = j \quad b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$;
- при $i < j \quad b_{ij} = -\frac{1}{a_{jj}} \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ki}a_{jk}$.

Её детерминант равен $\det\Lambda^* = \frac{1}{\det\Lambda}$.

Теорема 1. *Пусть базисная матрица целочисленной решётки Λ задана равенством (3), а базисная матрица взаимной решётки Λ^* — равенством (4). Тогда обобщённая параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ имеет вид*

$$M(\Lambda) = \left\{ \left\{ k_1\vec{b}_1 + \ldots + k_s\vec{b}_s \right\} \middle| k_i = 0, \ldots, a_{ii} - 1, i = 1, \ldots, s \right\}, \tag{5}$$

где $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$ — дробная часть вектора $\vec{x}$.

Доказательство. Символом M обозначим конечное подмножество векторов решётки Λ^*

$$M = \left\{ k_1\vec{b}_1 + \ldots + k_s\vec{b}_s \middle| k_i = 0, \ldots, a_{ii} - 1, i = 1, \ldots, s \right\}. \tag{6}$$

Поскольку $k_i = 0, \ldots, a_{ii} - 1$, $i = 1, \ldots, s$, то мощность $|M| = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{ss} = |M(\Lambda)|$.

Покажем теперь, что разность любых двух различных векторов из множества M вида $\vec{x}_1 = k_1\vec{b}_1 + \ldots + k_s\vec{b}_s$ и $\vec{x}_2 = m_1\vec{b}_1 + \ldots + m_s\vec{b}_s$ не является целым вектором.

Так как векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ различны, то найдётся такое значение t, что $k_t \neq m_t$. Будем считать, что $k_t > m_t$, и t — наименьшее среди таких значений, то есть $k_i = m_i$, при $i < t$.

Рассмотрим t-тую компоненту разности $\vec{y} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

$$y_t = (k_1 - m_1)b_{1t} + \ldots + (k_{t-1} - m_{t-1})b_{t-1\,t} + (k_t - m_t)b_{tt} + (k_{t+1} - m_{t+1})b_{t+1\,t} + \ldots + (k_s - m_s)b_{st}.$$

В ней $k_1 - m_1 = \ldots = k_{t-1} - m_{t-1} = 0$, так как значение t выбрано минимальным, для которого $k_t \neq m_t$. С другой стороны, $b_{t+1\,t} = \ldots = b_{st} = 0$, так как базисная матрица решётки Λ^* имеет верхний треугольный вид.

Таким образом, получаем $y_t = (k_t - m_t)b_{tt}$. Поскольку $0 \leqslant m_t < k_t < a_{tt}$, то $0 < k_t - m_t < a_{tt}$. Из данных неравенств и равенства $b_{tt} = \frac{1}{a_{tt}}$ имеем $0 < y_t = (k_t - m_t)b_{tt} < a_{tt}b_{tt} = 1$.

Из сказанного следует, что разность любых двух векторов из множества M имеет хотя бы одну нецелую компоненту y_t, а значит дробные части этих векторов различны, что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

4. Заключение

Определение обобщённой параллелепипедальной сетки не даёт простого представления того, каким образом её строить. В данной работе предложен алгоритм построения обобщённых параллелепипедальных сеток, соответствующих целочисленным решёткам.

С вопросами построения параллелепипедальных сеток связаны вопросы нахождения оптимальных алгоритмов построения абсолютно минимальной полной гиперболической системы вычетов и гиперболических параметров решётки. Эти вопросы требуют дополнительного исследования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.

2. J. W. S. Cassels. An Introduction to the Geometry of Numbers. 345 pp.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, "On classical number-theoretic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 118–176.

2. J. W. S. Cassels. An Introduction to the Geometry of Numbers. 345 pp.

Получено: 13.10.2023
Принято в печать: 21.12.2023