

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-217-221

Гиперболическая дзета-функция двумерных диагональных унимодулярных решёток¹

А. П. Крылов, Н. М. Добровольский

Крылов Александр Петрович — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alek.krylov@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

В работе изучаются свойства гиперболической дзета-функции диагональных двумерных унимодулярных решёток. Доказывается теорема об аналитическом продолжении этой функции.

Ключевые слова: гиперболическая дзета-функция решёток, метрическое пространство решёток, унимодулярные решётки, диагональные решетки, фундаментальные решётки.

Библиография: 4 название.

Для цитирования:

А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Гиперболическая дзета-функция двумерных диагональных унимодулярных решёток // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 217–221.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-217-221

Hyperbolic zeta function of two-dimensional diagonal unimodular lattices²

A. P. Krylov, N. M. Dobrovolsky

Krylov Alexander Petrovich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: alek.krylov@gmail.com

Dobrovol'skii Nikolai Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

¹Исследование выполнено в рамках госзадания № 073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

²The study was carried out within the framework of state task No. 073-03-2022-117/7 on the topic “Number-theoretic methods in approximate analysis and their applications in mechanics and physics”.

Abstract

The paper studies the properties of the hyperbolic zeta function of diagonal two-dimensional unimodular lattices. A theorem on the analytic continuation of this function is proved.

Keywords: hyperbolic zeta function of lattices, metric lattice space, unimodular lattices, diagonal lattices, fundamental lattices.

Bibliography: 4 title.

For citation:

A. P. Krylov, N. M. Dobrovolsky, 2023, “Hyperbolic zeta function of two-dimensional diagonal unimodular lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 217–221.

1. Введение

В работе [3] была доказана полнота метрического пространства двумерных диагональных унимодулярных решёток. Каждая двумерная диагональная унимодулярная решётка является декартовой решёткой, а, следовательно, гиперболическая дзета-функция этой решётки имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость (см. [1], [4]).

Цель нашей работы — изучить свойства аналитического продолжения гиперболической дзета-функции двумерных диагональных унимодулярных решёток в левой полуплоскости.

2. Дзета-функция диагональных унимодулярных решёток

Диагональные решётки — самый простой класс решёток. Они получаются растяжением по координатам фундаментальной двумерной решётки $\mathbb{Z}^2$: $\Lambda(d_1, d_2) = \{(d_1 m_1, d_2 m_2) | m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, $(d_1, d_2 > 0)$.

Диагональная унимодулярная решётка $\Lambda(d) = \Lambda(d, \frac{1}{d})$, $d > 0$. Она имеет простой базис $\vec{\lambda}_1 = (d, 0)$, $\vec{\lambda}_2 = (0, \frac{1}{d})$ и базисную матрицу $M(d)$ вида

$$M(d) = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}.$$

Взаимная решётка $\Lambda^*(d) = \Lambda(\frac{1}{d}, d)$ имеет взаимную базисную матрицу

$$M^*(d) = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Поэтому, без ограничения общности, будем считать, что всегда в этой работе $d \geq 1$, так как взаимная решётка будет симметричной к ней диагональная решётка с параметром $\frac{1}{d} \leq 1$.

В работе [3] доказана лемма о расстояниях (определение метрики на пространстве решёток см. [2], стр.165).

ЛЕММА 1. Пусть $d_1 \geq d_2$, тогда $\rho(\Lambda(d_1), \Lambda(d_2)) \leq \ln \left(2 \frac{d_1}{d_2} - 1 \right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3]. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть $d_1 \geq d_2$, $\Lambda(d_1) = A \cdot \Lambda(d_2)$ и $\|A - E_2\| \leq \delta < 1$, тогда $d_1 - d_2 = d_2 \delta_1$, где $0 \leq \delta_1 \leq \frac{\delta}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3]. $\square$

Гиперболическая дзета-функция диагональной унимодулярной решётки $\Lambda(d) = \Lambda(d, \frac{1}{d})$ имеет вид:

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{dm^\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\frac{1}{d}m^\alpha} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{4}{dm^\alpha \cdot \frac{1}{d}n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1).$$

Нетрудно видеть, что $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda^*(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda(\frac{1}{d})|\alpha)$.

Пользуясь тем, что $d \geq 1$, и вводя обозначение

$$f(d|\alpha) = \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{1}{(\frac{1}{d}m)^\alpha} \right) = \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{d^\alpha}{m^\alpha} \right),$$

получим

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2\zeta(\alpha) \left(\frac{1}{d^\alpha} + d^\alpha \right) + 2f(d|\alpha) + 4\zeta^2(\alpha) + 4\zeta(\alpha)f(d|\alpha). \quad (1)$$

3. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток на пространстве диагональных унимодулярных решёток

Как было отмечено во введении, диагональная унимодулярная решётка является декартовой и поэтому имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением точки $\alpha = 1$, где у неё полюс второго порядка.

Для дальнейшего нам потребуется функциональное уравнение для дзета-функции Римана:

$$\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha), \quad M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2} - \text{множитель Римана}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma < 0.$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма функция Эйлера.

ЛЕММА 3. *Для гиперболической дзета-функции диагональной унимодулярной решётки справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2M(\alpha)\zeta(1-\alpha) \left(\frac{1}{d^\alpha} + d^\alpha \right) + 2f(d|\alpha) + 4(M(\alpha)\zeta(1-\alpha))^2 + 4M(\alpha)\zeta(1-\alpha)f(d|\alpha)$$

при $\alpha = \sigma + it, \quad \sigma < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, функция $f(d|\alpha)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, поэтому, подставляя в выражение для гиперболической дзета-функции диагональной унимодулярной решётки функциональное уравнение для дзета-функции Римана, получим утверждение леммы. $\square$

ТЕОРЕМА 1. *Для любой диагональной унимодулярной решётки $\Lambda(d)$ ($d \geq 1$) гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha)$ является аналитической функцией на всей комплексной плоскости кроме точки $\alpha = 1$, в которой у неё полюс второго порядка с вычетом*

$$\text{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2 \left(\frac{1}{d} + d \right) + 8\gamma + 4 \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{d}{m} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, дзета-функция Римана мероморфна с единственным полюсом первого порядка при $\alpha = 1$ и раскладывается в ряд Лорана в точке $\alpha = 1$

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^n,$$

где

$$\gamma_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^m \frac{(\ln k)^n}{k} \right) - \frac{(\ln m)^{n+1}}{n+1} \right)$$

— константы Стильеса, а $\gamma_0 = \gamma$ — константа Эйлера.

Таким образом, для дзета-функции Римана справедливо равенство

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} + \gamma + r(\alpha),$$

где

$$r(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^n = (\alpha - 1)r_1(\alpha), \quad r_1(\alpha) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^{n-1}$$

и функции $r(\alpha)$ и $r_1(\alpha)$ — голоморфные функции на всей комплексной области.

Отсюда следует, что

$$\zeta^2(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - 1)^2} + \frac{2\gamma}{\alpha - 1} + 2r_1(\alpha) + (\gamma + r(\alpha))^2, \quad \text{Res}_1 \zeta^2(\alpha) = 2\gamma.$$

Так как все функции, стоящие в правой части равенства (1) являются либо голоморфными, либо мероморфными кроме точки $\alpha = 1$, то и левая часть является мероморфной функцией на всей комплексной плоскости кроме точки $\alpha = 1$, в которой у неё полюс второго порядка. Для вычета в этой точке имеем равенство

$$\text{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2 \left(\frac{1}{d} + d \right) + 8\gamma + 4 \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{d}{m} \right)$$

и теорема полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 2. На метрическом пространстве двумерных диагональных унимодулярных решёток гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha)$ и её вычет в точке $\alpha = 1$ являются непрерывными функциями, как функции от параметра d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda^*(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda(\frac{1}{d})|\alpha)$, то при $0 < d < 1$ необходимо положить $f(d|\alpha) = f(\frac{1}{d}|\alpha)$, тогда равенство (1) будет справедливо для любого $d > 0$.

Все функции, стоящие в правой части равенства (1) являются непрерывными функциями от d при $d > 0$, поэтому и левая часть будет непрерывной функцией от d .

Аналогично, имеем

$$\text{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2 \left(\frac{1}{d} + d \right) + 8\gamma + 4f(d|1),$$

поэтому вычет в точке $\alpha = 1$ является непрерывной функцией от d .

Так как метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток гооморфно пространству $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, то теорема полностью доказана. $\square$

4. Заключение

Из доказанных теорем возникает вопрос о справедливости их на пространстве всех диагональных решёток. Ответ на этот вопрос будет темой нашей следующей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.
2. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.
3. А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Вып. 1, С. 37–41.
4. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.
2. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], *Mir, Moscow*, (Russia).
3. Krylov, A. P., Dobrovolsky, N. M. 2022, "Metric space of two-dimensional diagonal unimodular lattices", *Notes of scientific seminars of the Tula School of Number Theory*, Iss. 1, pp. 37–41.
4. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 211, pp. 23–62.

Получено: 28.07.2023

Принято в печать: 21.12.2023