

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-208-216

Геометрические свойства сред, разбитых трещинами на блоки¹

А. Я. Канель-Белов, В. В. Павлова, В. О. Кирова

Канель-Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, профессор, Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова (г. Магнитогорск).

e-mail: kanelster@gmail.com

Павлова Виолетта Вячеславовна — Институт проблем механики Российской академии наук (г. Москва).

e-mail: kanelster@gmail.com

Кирова Валерия Орлановна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: kirova_vo@mail.ru***Аннотация**

Рассматривается разбиение трещинами массивов горных пород на блоки. Взяв за основу модель, в которой трещины представляют собой системы неограниченных эквидистантных (то есть параллельных и равноотстоящих) систем плоскостей, в статье изучено распределение блоков по объемам и формам и представлен метод, который позволяет находить распределение блоков не только по объемам, как все разработанные ранее методы, но и по другим геометрическим параметрам.

Ключевые слова: Комбинаторная геометрия, разбиение пространства, самозаклинивающиеся структуры

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

А. Я. Канель-Белов, В. В. Павлова, В. О. Кирова. Геометрические свойства сред, разбитых трещинами на блоки // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 208–216.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-208-216

Geometric properties of rocks, broken into blocks by cracks

A. Ya. Kanel-Belov, V. V. Pavlova, V. O. Kirova

¹Работы выполнены при поддержке гранта РНФ 22-19-20073.

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Magnitogorsk State Nosov Technical University (Magnitogorsk).

e-mail: kanelster@gmail.com

Pavlova Violetta Vyacheslavovna — Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: kanelster@gmail.com

Kirova Valeria Orlanovna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: kirova_vo@mail.ru

Abstract

The splitting of rock massifs into blocks by cracks is considered. Taking as a basis a model in which cracks are systems of unlimited equidistant (i.e. parallel and equidistant) plane systems, the article examines the distribution of blocks by volumes and shapes and presents a method that allows you to find the distribution of blocks not only by volume, as all previously developed methods, but also by other geometric parameters.

Keywords: Combinatorial geometry, space partitioning, self-locking structures

Bibliography: 13 titles.

For citation:

A. Ya. Kanel-Belov, V. V. Pavlova, V. O. Kirova. 2023, “Geometric properties of rocks, broken into blocks by cracks”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 208–216.

1. Введение

Массивы горных пород часто бывают разбиты трещинами на блоки. Геомеханические свойства трещиноватого массива горной породы зависят как от физических характеристик составляющей его породы, так и от геометрии слагающих его блоков. Знание геометрии блоков, их числа необходимо также для решения ряда задач горного дела, например, при разработке месторождений облицовочного камня, а также может быть полезным при решении ряда задач фильтрации.

Геометрическая классификация трещин горных пород была разработана С. Н. Чернышевым [4]. В соответствии с этой классификацией одной из моделей, в ряде случаев верно описывающих действительность, является модель, в которой трещины представляют собой системы неограниченных эквидистантных (то есть параллельных и равноотстоящих) систем плоскостей.

Данная работа посвящена изучению распределения блоков по объемам и формам для вышеописанной модели, а также сравнению полученных теоретических и экспериментальных данных. Оказывается, что в ряде случаев законы распределения объемов блоков носят бимодальный характер.

Рядом авторов рассматривались ранее методы изучения геометрических свойств блоков массивов, описываемых такими моделями, например [1], [7]. Однако эти методы основаны на простом моделировании, что является неэффективным для протяженных областей. Кроме того, разработанные ранее методы позволяют оценивать только объемы блоков и не учитывают их геометрии.

Метод, предлагаемый в данной работе, не требует явного моделирования и позволяет находить распределения блоков не только по объемам, но и по другим геометрическим параметрам, например таким, как количество и ориентация граней блоков. Как отмечается в работе Р. Гудмена [5], в некоторых случаях ориентация граней блока определяет его подвижность.

Предлагаемый метод позволяет также строить распределения площадей граней блоков в заданных направлениях, что может быть полезным при решении ряда задач фильтрации.

В центре внимания работы находится исследование модели, для которой трещины моделируются несколькими системами равноотстоящих плоскостей. По мнению авторов, разбиение n -мерного пространства $k > n$ системами равноотстоящих плоскостей интересно геометрически и одной из целей данной работы является привлечение внимания к данному объекту, возникшему из решения прикладных задач.

2. Метод эргодичности в применении к изучению блочности

Предлагаемый в данной работе метод определения блочности эффективен для протяженных областей массивов, явное моделирование которых требует значительных ресурсов либо невозможно.

Заметим, что число блоков пропорционально кубу размера рассматриваемой области, поэтому даже сравнительно небольшой по размерам участок содержит значительное число блоков, что и является препятствием к изучению блочности массивов методами явного моделирования с помощью ЭВМ.

В данной работе для решения вышеописанной проблемы предлагается подход, основанный на соображениях эргодичности. Идея состоит в том, чтобы описать локальные участки массива, то есть вычислить характеристики каждого участка. Усреднение этих характеристик дает характеристику всего массива. Применительно к рассматриваемой задаче это означает следующее.

Заметим, что, поскольку в случае трех систем плоскостей ($n = 3$) задача имеет тривиальное решение (пространство разбивается такими системами на параллелепипеды), то рассматривается случай, когда $n > 3$.

Из всех систем равноотстоящих плоскостей мы выберем три, находящиеся в общем положении, то есть разбивающие пространство массива на параллелепипеды, которые и будем считать локальными областями. Каждая такая локальная область (параллелепипед) разбивается плоскостями остальных $n - 3$ систем на монолитные блоки. Оказывается, что разбиение каждого параллелепипеда можно описать $n - 3$ параметрами, характеризующими сдвиги систем с номерами $4, \dots, n$ относительно этого параллелепипеда. Можно доказать, что все сдвиги равновероятны и независимы (см. ниже). Поэтому процедура вычисления содержания блоков с заданными свойствами состоит, в общем виде, в следующем:

1. Генерации параметров, определяющих сдвиги систем и являющихся реализациями равномерно-распределенной случайной величины,
2. Вычислении содержания блоков с заданными свойствами в локальных областях, соответствующих каждому параметру сдвига,
3. Усреднении всех полученных величин.

На основе вышеописанного метода разработана программа для ЭВМ, которая строит распределения блоков по объемам, типам форм, а также распределения площадей граней блоков вдоль направлений систем плоскостей. Тип формы блока в рассматриваемой модели определяется набором номеров систем, плоскости которых ограничивают блок.

Распределение блоков по типам форм может быть полезным, поскольку тип формы в рассматриваемой модели определяет ориентацию граней блока, то есть, согласно Р. Гудмену [5], его подвижность.

3. Примеры вычислений и их сравнение с экспериментальными данными

Пример 1.

Параметры систем плоскостей:

NN систем	1	2	3	4
угол падения ($^{\circ}$)	0	90	90	54. 75
азимут простирания ($^{\circ}$)	0	0	90	45
расстояния между соседними трещинами (м)	1	1	1	0.557

То есть первые три системы разбивают пространство на единичные кубы; четвертая система нормальна к диагонали куба, и расстояния в этой системе близки к трети диагонали куба.

Построенная гистограмма распределения блоков по объемам имеет вид:

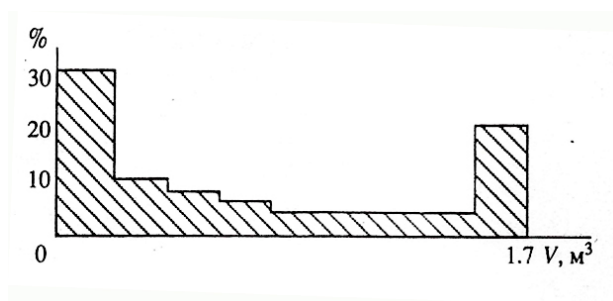


Рис. 1: гистограмма распределения блоков по объемам

Гистограмма, полученная Никитиным В. В. [8] для аналогичного случая, имеет вид:

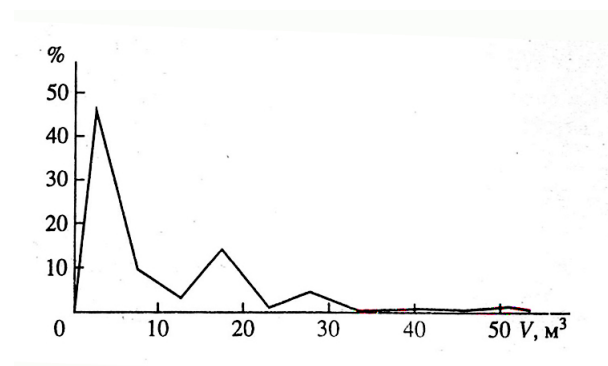


Рис. 2: гистограмма распределения блоков по объемам

Как можно видеть, обе гистограммы имеют максимум при относительно больших значениях объемов. Различие в их поведении в окрестности нуля связано с тем, что мелкие блоки, как неинтересные, маркшейдерами не учитываются. Однако в обоих случаях имеется относительно большое число мелких блоков.

Пример 2.

Исходная информация о геометрических параметрах систем плоскостей разрывов соответствует данным о трещиноватости Овалтунского месторождения высокодекоративных мраморизованных известняков [1].

NN систем	1	2	3	4	5
угол падения ($^{\circ}$)	78	82	81	74	74
азимут простирания ($^{\circ}$)	138	182	40	98	73
расстояния между соседними трещинами (м)	0.46	0.6	0.7	1.2	1.4

Гистограмма плотности распределения блоков по объемам имеет вид, изображенный на рисунке:

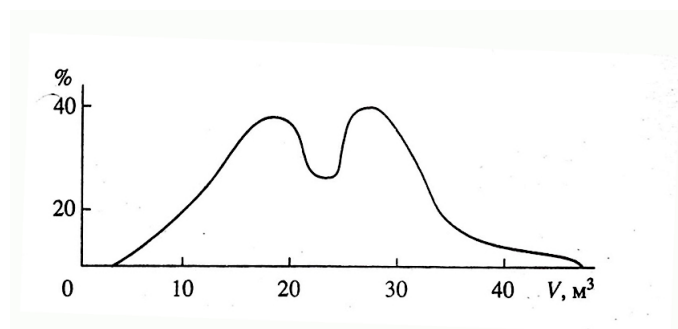


Рис. 3: Гистограмма плотности распределения блоков по объемам

Как можно видеть, около 30 процентов блоков состоят из мелких блоков, имеющих объем меньше 0.18 м^3 , около 19 процентов блоков состоят из относительно больших блоков с объемами от 1.5 м^3 до 1.7 м^3 .

Также было получено распределение блоков по типам форм:

тип формы	12234	112235	1122334	112233	11223345	122345
содержание блоков(в процентах)	21.25	15.83	12.5	9.7	8.4	6.46

Процентное содержание блоков остальных форм незначительно или их нет совсем. Таким образом, наибольшее относительное число составляют блоки типа формы 12234, то есть блоки, представляющие собой пятигранники, причем две из их граней параллельны трещинам системы с номером 2. Кроме того, 15.83 процента блоков состоят из блоков с шестью гранями, причем две пары граней параллельны первой и второй системам.

Также построены гистограммы плотностей распределений граней блоков по площадям вдоль направлений каждой из систем.

Заметим, что в примере 2 также имеется второй максимум в гистограмме распределения объемов блоков. Более того, гистограммы распределения площадей граней также имеют более или менее выраженный второй максимум.

Таким образом, несмотря на грубость модели, наблюдается качественное совпадение теоретических и экспериментальных результатов.

4. Качественное объяснение гистограммы

Объясним на качественном интуитивном уровне явление второго максимума. Объяснения будут основаны на соображениях эргодичности.

Заметим, что в принципе разработанный метод и соответствующие ему программы позволяют вывести закон зависимости поведения второго максимума в зависимости от количества и параметров систем плоскостей разрывов. Однако это требует огромного количества вычислений и, соответственно, большого количества машинного времени.

Рассмотрим для простоты случай четырех систем, из которых первые три разбивают пространство на единичные кубы, а четвертая параллельна их диагонали.

Так как все сдвиги f четвертой системы относительно кубов равновероятны, то плотность вероятности того, что объем i -й части разбиения куба равен V , пропорциональна $\frac{\Delta f}{\Delta V_i} = V'_i(f)$. Таким образом, плотность вероятности того, что часть имеет объем V , тем больше, чем меньше меняется объем V в зависимости от f . Объем пересечения куба с полосой, образованной четвертой системой, имеет максимум, и, кроме того, в момент прохождения этого максимума при сдвигении полосы меняется мало, то есть $V'_i(f)$ имеет максимум.

Поведение гистограммы вблизи нуля можно объяснить тем, что плотность вероятности $P(V)$ при $V \rightarrow 0$ имеет асимптотику $V^{-2/3}$, поскольку объем самой малой части разбиения куба пропорционален f^3 , а его производная — f^2 .

По мере роста расстояний между плоскостями в четвертой системе второй максимум увеличивается, поскольку картина приближается к той, в которой все блоки представляют собой кубы.

Как показывают расчеты, для шести и более систем плоскостей второй максимум обычно сглаживается.

Можно предположить, что появление второго максимума в данных случаях является подтверждением выводов М. А. Садовского [9] о характерных наиболее частых размерах отдельностей, образующих дискретный ряд.

М. А. Садовским [9] было показано, что естественные блоки, выявленные при изучении горных пород, обнаруживают некоторую упорядоченную иерархию преимущественных размеров, а статистические распределения размеров в пределах каждого иерархического уровня схожи между собой. В работах ([9],[10],[11],[12]) показано, что примеры существования “преимущественных” размеров обнаруживаются во многих процессах. Все это позволило предположить, что наблюдающаяся иерархия размеров — следствие некоторых общих закономерностей процесса расчленения породы на отдельные блоки [11]. Приведенные в работах М. А. Садовского и его соавторов примеры иерархии преимущественных размеров касались блочности земной коры, естественной блочности массивов горных пород, блочности пород после взрывов различных масштабов, размеров частиц грунтов, массы планетных тел Солнечной системы. Подчеркивалось также характерное свойство в распределении отдельностей соответствующих иерархических уровней, заключающееся в их “двугорбости”.

Факт полимодальности (бимодальности) распределений объемов естественных структурных блоков массивов горных пород, а также кусков пород после взрывного разрушения массивов отмечается также в работе [2] (стр.141). В качестве примеров можно привести гистограммы, изображенные на рисунках ниже:

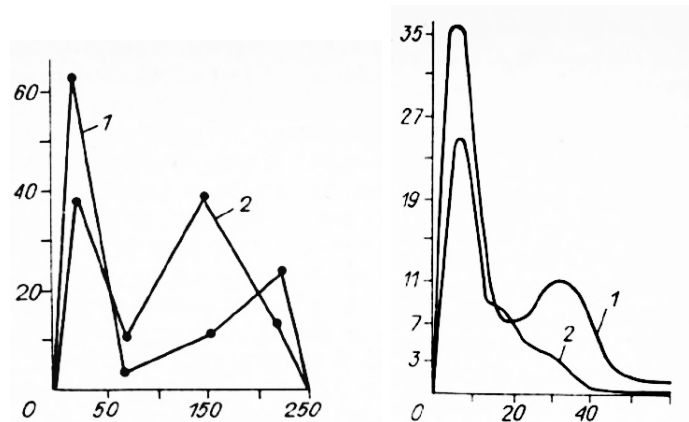


Рис. 4: гистограммы распределения блоков по размерам куса (мм) и размерам частиц (мкм)

Таким образом, можно отметить качественное совпадение поведения гистограмм (двугорбость), полученных в работах ([13], [9],[10],[11],[12]), и результатов, полученных с помощью описанных в данной статье расчетов.

Указанное совпадение подтверждает правильность модели с равноотстоящими системами плоскостей (трещин) в системах по сравнению с моделью пуассоновского распределения межтрещинных расстояний. То есть имеется корреляция между наличием трещины в одной области и отсутствием ее в соседних областях. Это, вероятно, связано с разгрузкой материала при образовании трещины.

5. Математическое обоснование метода

Пусть имеется N систем плоскостей. Пусть первые три системы находятся в общем положении, то есть разбивают пространство массива на параллелепипеды $((1, 2, 3)$ -параллелепипеды), которые будем считать элементарными областями.

Каждый $(1, 2, 3)$ -параллелепипед разбивается оставшимися $n - 3$ системами на монолитные блоки. Это разбиение описывается $n - 3$ параметрами $\xi_4, \dots, \xi_N$, характеризующими сдвиги систем с номерами $4, \dots, N$ относительно $(1, 2, 3)$ -параллелепипеда. В качестве ξ_i примем расстояние от фиксированной вершины $(1, 2, 3)$ -параллелепипеда до подходящей плоскости системы i , при этом $0 \leq \xi_i \leq C_i$, где C_i – расстояния между соседними плоскостями в системе i . Процентное содержание блоков L_W с заданными геометрическими параметрами может быть вычислено как среднее:

$$L_W = \lim_{Q \rightarrow \infty} Q^{-1} \sum_{q \leq Q} L_W^q, \quad q \in \mathbf{N},$$

где $L_W^q = L_W^q(\xi_4, \dots, \xi_N)$, величины $\xi_4, \dots, \xi_N$ характеризуют сдвиги систем относительно $(1, 2, 3)$ -параллелепипеда, L_W^q -процентное содержание блоков с заданными свойствами в локальной области.

Распределение точек $\{\Gamma^j = (\xi_1, \dots, \xi_N)\}$ является равномерным. Доказательство этого факта основано на том, что коэффициенты уравнений плоскостей всегда можно считать взаимно иррациональными, поскольку множество иррациональных чисел всюду плотно в $\mathbf{R}$, и воспользоваться теоремой о равномерном распределении линейных форм [3] (с.80–82).

Таким образом, оценка $\hat{L}_W$ может быть вычислена как

$$\hat{L}_W = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n L_W(\Gamma^j).$$

ТЕОРЕМА 1. а)

$$L_V = \frac{1}{C_4 \dots C_N} \int_{\Phi} L_V(\Gamma) d\Gamma,$$

где L_V – относительное число блоков, имеющих объем выше заданного V , и $\Phi = [0, C_4] \times \dots \times [0, C_N]$.

б)

$$L_F = \frac{1}{C_4 \dots C_N} \int_{\Phi} L_F(\Gamma) d\Gamma,$$

где L_F – относительное число блоков, имеющих заданный тип формы F .

Доказательство теоремы следует из критерия Вейля равномерного распределения последовательности векторов ([3], с.82–83) и интегрируемости $L_V(\Gamma)$ по Риману как функции от Γ . Доказательство интегрируемости содержится в [13].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анощенко Н. Н., *Геометрический анализ трещиноватости и блочности месторождений облицовочного камня*. Методические указания, Москва, Изд. МГИ, 1983.
2. Батугин С. А., Бирюков А. В., Крылатчанов Р. М., *Гранулометрия геоматериалов*. Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1989.
3. Касселс Дж. В., *Введение в теорию диофантовых приближений*. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1961.
4. Чернышев С. Н., *Трещины горных пород*. Москва, Наука, 1983.
5. Goodman R. E., Gen-hua Shi, *Block Theory and Its Application to Rock Engineering*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
6. Белов А. Я., *Геометрические свойства блочных сред*. Деп. в ВИНТИ 16.1.91, N 272-B91.
7. Количко А. В., *Опыт оценки блочности трещиноватого массива скальных пород*. Труды Гидропроекта, Сб.14, Москва–Ленинград, Энергия, 1966.
8. Никитин В. В., *Разработка Горно–Геометрического метода прогнозирования выхода блоков для рациональной отработки месторождений облицовочного камня*. Дисс. на соиск. канд. техн. наук, Москва, МГИ, 1987. с.97.
9. Садовский М. А., *Естественная кусковатость горной породы*. Докл. АН СССР, 1979, т. 247, N4 – с. 829–831.
10. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф., *О свойствах дискретности горных пород*. Москва, Ин-т физики Земли им. О. Ю. Шмидта, 1981 (36с.).
11. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф., *О свойстве дискретности горных пород*. Физика Земли, 1982, N12, с. 3–18.
12. Садовский М. А., *О распределении твердых отдельностей*. ДАН СССР, 1983, т.269, N1, с.69–72.
13. Pavlova V. V., *Study of Geometrical Properties of Blocks in a Jointed Rock Mass Using Statistical Geometry*. Proceedings of the 23rd International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry, Tucson, Arisona, USA, April 7–11, 1992, pp.367–373.

REFERENCES

1. Anoshchenko, N. N. 1983, "Geometric analysis of fracturing and blockiness of deposits of facing stone", *Methodical instructions, Moscow, Izd. MGI*.
2. Batugin S. A., Biryukov A. V., Krylatchanov R. M. 1989, "Granulometry of geomaterials", *Novosibirsk, Nauka, Siberian Branch*.
3. Cassels J. W. 1961, "Introduction to the theory of Diophantine approximations", *Moscow, Izd-Vo Foreign Literature*.
4. Chernyshev S. N. 1983, "Cracks of rocks", *Moscow, Nauka*.

5. Goodman R. E., Gen-hua Shi. 1985, "Block Theory and Its Application to Rock Engineering", *Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey*.
6. Belov A. Ya., "Geometrical properties of block environments", *Dep. in VINITI 16.1.91*, № 272-B91.
7. Kolichko A. V. 1966, "Experience of estimation of blockiness of the fractured rock massif. rocks", *Works of Gidroproekt, Collection 14, Moscow-Leningrad, Energia*.
8. Nikitin V. V. 1987, Development of Mining-Geometric Method of forecasting of block yield for rational mining of deposits of of facing stone, Diss. on nomin. kand. tehn. nauk, Moscow, MGI, p.97.
9. Sadovskii M. A. 1979, "Natural lumpiness of a rock", *Dokl. of the USSR Academy of Sciences*, vol. 247, N4 – pp. 829–831.
10. Sadovsky M. A., Bolkhovitinov L. G., Pisarenko V. F. 1981, "On the Properties of Discreteness of Rocks", *Moscow, Institute of Physics of the Earth im. O. J. Schmidt*, 36 p.
11. Sadovsky M. A., Bolkhovitinov L. G., Pisarenko V. F. 1982, "On the discreteness property of rocks", *Physics of the Earth*, N12, pp. 3–18.
12. Sadovskii M. A. 1983, "On the distribution of solid separations", , *DAN USSR*, vol.269, N1, pp. 69–72.
13. Pavlova V. V. 1992, "Study of Geometrical Properties of Blocks in a Jointed Rock Mass Using Statistical Geometry", , *Proceedings of the 23-rd International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry, Tucson, Arisona, USA*, April 7–11, pp. 367–373.

Получено: 17.09.2023

Принято в печать: 21.12.2023