ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 5.

УДК 514.172.45 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-194-207

О перечислении выпуклых RR-многогранников

В. И. Субботин

Субботин Владимир Иванович — кандидат физико-математических наук, Южно-Российский государственный политехнический университет имени М. И. Платова; Донской государственный аграрный университет (г. Новочеркасск).
e-mail: geometry@mail.ru

Аннотация

Задача перечисления класса многогранников с заданными условиями симметрии — одна из важных задач современной теории выпуклых многогранников. Известно много работ, в которых ставится задача о полном перечислении многогранников с условиями симметрии. Если ограничиться многогранниками в E^3, то примерами таких многогранников являются правильные, правильные звёздчатые, Архимедовы многогранники, класс Джонсона-Залгаллера, многогранники с условными рёбрами и многогранники с паркетными гранями. Конкретно, условия симметрии для класса замкнутых выпуклых правильных многогранников состоят в условиях правильности равных граней многогранника и однотипности его вершин. Для многогранников Джонсона-Залгаллера — в условии правильногранности замкнутого выпуклого многогранника. Известно, что последний класс помимо правильных и архимедовых многогранников, бесконечной серии призм и антипризм, содержит 92 многогранника с правильными гранями.

Ранее автором были найдены новые классы многогранников (например, так называемые многогранники, сильно симметричные относительно вращения); они обладают такой симметрией элементов, при которой условия правильности граней не предполагаются заранее. При этом была доказана полнота списков рассмотренных классов.

Возвращаясь к таким условиям симметрии, которые включают условия правильности граней, автором был введён класс замкнутых выпуклых RR-многогранников (от слов rhombic и regular). Коротко этот класс определяется следующими условиями симметрии. Грани RR-многогранника можно разбить на два непустых непересекающихся множества — множество равных симметричных ромбических звёзд, не имеющих общих рёбер, и множество правильных граней.

При этом вершина V называется ромбической, если гранная звезда $Star(V)$ вершины V многогранника состоит из n равных и одинаково расположенных ромбов (не квадратов), имеющих общей вершиной V. Если вершина V принадлежит оси вращения порядка n звезды $Star(V)$, то V называется симметричной. Симметричная ромбическая вершина V называется тупоугольной, если ромбы звезды $Star(V)$ в вершине V сходятся своими тупыми углами. Примером RR-многогранника является удлинённый ромбододекаэдр.

В настоящей работе приводится изменённое доказательство теоремы о существовании и единственности замкнутого выпуклого RR-многогранника, связанного с икосаэдром и доказано существование двадцать четвёртого RR-многогранника с треугольными гранями и с четырьмя тупоугольными ромбическими вершинами. Доказаны также теоремы о несуществовании некоторых многогранников с правильными гранями различного типа, "близких"к RR-многогранникам.

Ключевые слова: условия симметрии, симметричные ромбические вершины, RR-многогранник, звезда ромбической вершины

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:
В. И. Субботин. О перечислении выпуклых RR-многогранников // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 194–207.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 5.

UDC 514.172.45 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-194-207

On the enumeration of convex RR-polyhedra

V. I. Subbotin

Subbotin Vladimir Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Platov South Russian State Polytechnic University; Don State Agrarian University (Novocherkassk).
e-mail: geometry@mail.ru

Abstract

The problem of enumerating a class of polyhedra with given symmetry conditions is one of the important problems of the modern theory of convex polyhedra. There are many works in which the problem of a complete enumeration of polyhedra with symmetry conditions is posed. If we limit ourselves to polyhedra in E^3, then examples of such polyhedra are regular, regular stellate, Archimedean polyhedra, the Johnson-Zalgaller class, polyhedra with conditional edges, and polyhedra with parquet faces. Specifically, the symmetry conditions for the class of closed convex regular polyhedra consist in the conditions that the polyhedron's equal faces are regular and its vertices are of the same type. For Johnson-Zalgaller polyhedra — under the condition that the faces of a closed convex polyhedrons are regular. It is known that the last class, in addition to regular and Archimedean polyhedra, is an infinite series prisms and antiprisms, contains 92 polyhedra with regular faces.

Previously, the author found new classes of polyhedra (for example, the so-called polyhedra that are strongly symmetric with respect to rotation); they have such a symmetry of elements in which the conditions for the regularity of the faces are not presupposed. At the same time, the completeness of the lists of the considered classes was proven.

Returning to such symmetry conditions, which include the conditions of regularity of faces, the author introduced a class of closed convex RR-polytopes (from the words rhombic and regular). Briefly, this class is defined by the following symmetry conditions. The faces of an RR-polytope can be divided into two non-empty disjoint sets — a set of equal symmetrical rhombic stars that do not have common edges, and a set of regular faces.

Moreover, a vertex V is called rhombic if the faceted star $Star(V)$ of a vertex V of the polyhedron consists of n equal and identically spaced rhombuses (not squares) having a common vertex V. If the vertex V belongs to the rotation axis of order n of the star $Star(V)$, then V is called symmetric. A symmetric rhombic vertex V is called obtuse if the rhombuses of the star $Star(V)$ at the vertex V meet at their obtuse angles. An example of a RR-polyhedron is the elongated rhombic dodecahedron.

This paper provides a modified proof of the theorem on the existence and uniqueness of a closed convex RR-polyhedron associated with the icosahedron and proves the existence of a twenty-fourth RR-polyhedron with triangular faces and four obtuse rhombic vertices. Theorems on the non-existence of certain polyhedra with regular faces of various types, “close” to RR-polytopes, have also been proven.

Keywords: symmetry conditions, rhombic vertices, RR-polyhedron, rhombic vertex star

Bibliography: 28 titles.

For citation:
V. I. Subbotin, 2023, “On the enumeration of convex RR-polyhedra” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 194–207.

1. Введение

Многие современные работы посвящены полному описанию классов многогранников с заданными условиями симметрии (см., например, [1] – [14]). Под "условиями симметрии" понимаются, в частности, условия правильности граней, условия транзитивности группы симметрии, действующей на элементах многогранника, и другие. Хотя сам этот термин практически не употреблялся, но его использование позволяет смотреть на работы в этом направлении с единой точки зрения.

В дальнейшем удобно разделить условия симметрии на жёсткие и нежёсткие. *Жёсткими* можно назвать такие условия, что все многогранники с этими условиями могут быть перечислены с точностью до подобия, даже если список многогранников бесконечен. А те условия, задание которых даёт по крайней мере комбинаторное перечисление класса многогранников, но не с точностью до подобия, будем называть *нежёсткими*. Например, класс правильногранных замкнутых выпуклых многогранников в E^3, изученный в [11] и [12], определяется жёсткими условиями симметрии. В [12] было доказано, что эмпирически найденные многогранники работы [11] исчерпывают класс всех замкнутых выпуклых многогранников в E^3 с правильными гранями.

Нежёсткие условия симметрии можно найти, например, в работе автора [15], в которой найдены все многогранники в E^3, *сильно симметричные относительно вращения граней.*

В работе автора [16], в которой продолжена тема влияния условий симметрии на геометрию выпуклых многогранников, в частности был определён класс симметричных многогранников с правильными гранями и ромбическими вершинами—так называемых RR-многогранников. Также, в [16] было дано доказательство существования двух RR-многогранников с двумя ромбическими вершинами: 24-гранника и 20-гранника. У обоих этих многогранников имеются зеркальные оси симметрии, 8-го и 10-го порядка соответственно.

Ромбическая вершина — это такая вершина V, звезда $Star(V)$ ("ромбическая звезда") граней которой состоит из n равных и одинаково расположенных относительно V ромбов (не квадратов), имеющих общей вершиной V.

Если вершина V принадлежит оси вращения порядка n звезды $Star(V)$, то V (а также и $Star(V)$) называется симметричной. Симметричная ромбическая вершина V называется тупоугольной, если ромбы звезды $Star(V)$ в вершине V сходятся своими тупыми углами. Предполагается, что ромбы различных ромбических звёзд не имеют общих сторон, но могут иметь общие вершины. В последнем случае ромбические вершины (или звёзды вершин) называются *неизолированными.*

Определение RR-многогранника можно дать в следующем виде.

Определение 1. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется RR-многогранником (от слов rhombic и regular), если множество его граней состоит из двух непустых непересекающихся множеств — множества равных симметричных ромбических звёзд, не имеющих общих рёбер, и множества правильных граней.*

Таким образом, RR-многогранники являются как бы правильногранниками с остроугольными или тупоугольными ромбическими вершинами. RR-многогранником с остроугольными ромбическими вершинами является, например, известный в кристаллографии удлинённый ромбододекаэдр.

Для краткости, RR-многогранники, у которых все правильные грани одного типа, называются RR-многогранниками первого типа. Если правильные грани различного типа — RR-многогранниками второго типа.

В [18]-[20] найден список из двадцати трёх RR-многогранников первого типа как с тупоугольными, так и с остроугольными ромбическими вершинами. Таким образом, условия симметрии для RR-многогранников первого типа являются жёсткими.

В работе [21] найдены пятьдесят четыре составных RR-многогранника второго типа и доказана полнота этого списка. Таким образом, условия симметрии для составных RR-многогранников второго типа являются жёсткими.

Существуют также несоставные RR-многогранники второго типа — некоторые из них найдены в работе [22].

В настоящей работе дано изменённое доказательство теоремы из [19] о существовании и единственности замкнутого выпуклого RR-многогранника с треугольными правильными гранями, связанного с икосаэдром.

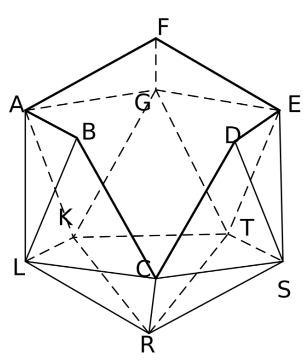
Также, в дополнение доказательства полноты списка из двадцати трёх RR-многогранников, доказано существование двадцать четвёртого, не замеченного ранее автором, RR-многогранника первого типа с четырьмя тупоугольными ромбическими вершинами и треугольными гранями.

Для решения задачи перечисления несоставных RR-многогранников второго типа необходимо убедиться, что некоторые многогранники не могут принадлежать этому классу. Поэтому, в настоящей работе будет доказана невозможность некоторых RR-многогранников с правильными гранями различного вида, хотя рассматриваемые многогранники и будут в уточнённом ниже смысле "близки"к RR-многогранникам.

2. О существовании и единственности RR-многогранника первого типа, связанного с икосаэдром

Те многогранники, которые могут быть получены из некоторого известного многогранника M удалением некоторых его граней и (или) добавлением новых граней и, возможно, последующим изгибанием естественно называть *связанными* с M.

Здесь будет дано изменённое и подробное доказательство существования и единственности RR-многогранника с правильными треугольными гранями из [19], который получается преобразованием икосаэдра.



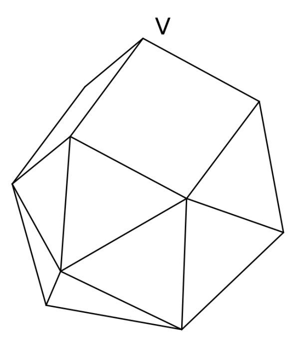


Рис. 1: К доказательству теоремы 1

Напомним это преобразование.

Удалим одну из треугольных граней икосаэдра, а также три грани, соседние с ней по ребру икосаэдра. Получим многогранник M с треугольными гранями, ограниченный замкнутой ломаной $ABCDEFA$ (Рис.1, a). Обозначим эту ломаную Г. Плоский угол между звеньями BA и BC ломаной, а также углы, эквивалентные ему относительно оси вращения третьего порядка многогранника M, перпендикулярной грани RTK, обозначим α. Углы между звеньями CB и CD и им эквивалентные, обозначим β.

Теорема 1. *Существует RR-многогранник с девятнадцатью гранями, связанный с икосаэдром и имеющий одну тупоугольную вершину.*

Доказательство. Заметим, что для того, чтобы путём присоединения ромбов к граничной ломаной Γ достроить многогранник M до RR-многогранника с трёхгранной ромбической вершиной, должно выполняться условие: $\alpha = \beta$. Найденная в [19] связь углов α и β имеет вид:

$$\begin{aligned}\cos\beta = \cos^2\theta + \\ +\sin^2\theta\cos\left(2\mathrm{sign}\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)\arccos\frac{1+(1-\cos\theta)\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right)}{\sin\theta\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}+\right. \\ \left.+\arccos\frac{1+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right),\end{aligned} \tag{1}$$

где:

$$\cos\theta = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\left(\arccos\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-1}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}}+\arccos\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Формула (1) даёт необходимую связь величин углов α и β. Она показывает, что при непрерывном изменении угла α непрерывно будет изменяться и угол β.

Докажем, что при некотором изгибании поверхности с краем к краю Γ поверхности на рисунке 1, a) возможно присоединение ромбической звезды, то есть существует RR-многогранник с ромбической вершиной V, рисунок 1, b).

Независимо от уравнения (1) покажем, что при уменьшении всех трёх углов α углы β будут необходимо возрастать.

Рассмотрим боковую поверхность 5-угольной пирамиды $SCDETR$. Заметим, что при сближении вершин C и E этой поверхности угол α будет уменьшаться. В силу леммы Коши, двугранные углы при рёбрах SC и SE будут при этом увеличиваться, а углы при рёбрах SR и ST будут уменьшаться. Будем уменьшать все три угла α при вершинах B, D, F на одну и ту же величину, то есть сохраняя симметрию относительно оси вращения 3-го порядка. При этом, двугранные углы при рёбрах SC и SE и им эквивалентных будут увеличиваться. Двугранный угол при ребре CR и ему эквивалентных не может уменьшиться, что видим, применяя лемму Коши к 5-гранному углу с вершиной R.

Как известно, если при деформации выпуклого многогранного угла, сохраняющей его выпуклость и неизменность его граней кроме одной грани, (обозначим её f), двугранные углы между неизменными гранями не убывают и хотя бы один из них возрастает, то плоский угол грани f возрастает. Поэтому угол между граничными рёбрами CB и CD возрастает; то же верно и для двух пар рёбер, эквивалентных этой паре. При сохранении выпуклости $\min\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ достигается при распрямлении двугранных углов при рёбрах CL, CS, CR. При этом распрямлении $\max\beta = \dfrac{2\pi}{3}$.

Положив в формуле (1) $\beta = \alpha$ и решая с помощью компьютерных вычислений полученное уравнение относительно α, получим приближённое значение тупого угла ромба в градусах: $\alpha \approx 91,4397°$.

Теорема 1 доказана.

3. Многогранник, связанный с правильным тетраэдром

В следующей теореме 2 прямым построением доказано существование RR-многогранника первого типа с двадцатью восемью гранями.

Теорема 2. *Существует RR-многогранник первого типа с четырьмя тупоугольными ромбическими вершинами, имеющий тетраэдральную симметрию.*

Доказательство.

Рассмотрим правильный тетраэдр $VTWU$ с ребром длины 2, рисунок 2, а). На каждой грани этого тетраэдра надстроим четыре тетраэдра, равные $VTWU$. От каждого из надстроенных тетраэдров отсечём тетраэдры с единичными рёбрами так, что на гранях тетраэдра $VTWU$ окажутся построенными усечённые тетраэдры, два из которых, $TVWCDO$ и $UVWFEG$, изображены на рисунке 2, а).

Пусть WV одно из рёбер полученного невыпуклого многогранника M, общее для двух усечённых тетраэдров. Найдём величину плоского угла $\widehat{CWE}$ и равного ему угла $\widehat{OVF}$, которые обозначим λ. Рассмотрим трёхгранный угол $\widehat{WCVU}$, для которого имеем:

$$\cos\lambda = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} cos\,\widehat{\phi}, \tag{2}$$

где $\widehat{\phi}$ — тупой двугранный угол с ребром WV. Так как двугранный угол тетраэдра равен $\arccos\dfrac{1}{3}$, то из рисунка 2, а) видим: $\widehat{\phi} = 2\pi - 3\arccos\dfrac{1}{3}$. Поэтому из (2) находим: $\cos\lambda = 0,25 + 0,75\cos\widehat{\phi} \approx 0,5 + 0,75\cos 148,4136619^\circ \approx -0,388888$, $\lambda \approx 112,88538^\circ$.

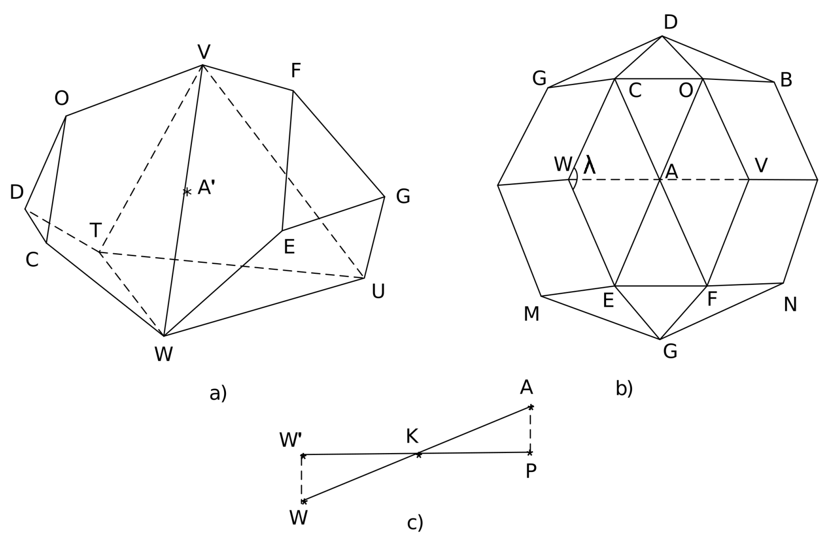


Рис. 2: К доказательству теоремы 2

Из построения следует, что каждая из граней — равнобедренных трапеций — $COVW$ и $FEWV$ составлена из трёх правильных треугольников, два из которых имеют общую вершину A' в середине ребра WV.

Рассмотрим прямоугольник $COFE$. Обозначим α равные углы, которые треугольники COA' и FEA' составляют с плоскостью прямоугольника $COFE$. Повернём треугольники COA' и FEA' около рёбер CO и FE на угол 2α. В результате поворота получим два правильных треугольника COA и FEA с общей вершиной, которую обозначим A. Очевидно, A' является проекцией точки A' на ребро WV.

Покажем, что 4-угольник $WCAE$ является ромбом, рисунок 2, b).

Проведём плоскость (π), содержащую прямоугольник $COFE$. Обозначим W' и P проекции точек соответственно W и A на плоскость (π). Пусть K — середина отрезка CE. Имеем: $|W'K| = |KP|$, $|WW'| = |AP|$. Следовательно, отрезок AW пересекает отрезок $W'P$ в точке K, рисунок 2, c); значит, отрезки CE и WA пересекаются в точке K Поэтому четыре точки C, E, W, A принадлежат одной плоскости. Так как 4-угольник $WCAE$ равносторонний, то он является ромбом.

Точно так же, 4-угольник $AOVF$ является ромбом.

Проводя такие же рассуждения для остальных пяти рёбер многогранника M, являющихся общим ребром пар трапециевидных граней, получаем RR-многогранник первого типа с правильными треугольными гранями и с четырьмя ромбическими вершинами V, T, W, U. В каждой из этих вершин ромбы сходятся своими тупыми углами $\lambda \approx 112,88538°$.

Очевидно, построенный RR-многогранник имеет тетраэдральную симметрию и двадцать восемь граней, рисунок 2, b).

Теорема 2 доказана.

4. Многогранники, близкие к RR-многогранникам

Отметим, что приведённые ниже три теоремы, в частности имеют отношение к вопросу, поставленному в [12]: "допускает ли конкретная гомеоморфная кругу многогранная выпуклая поверхность такие изгибания, при которых сохраняется ее выпуклость и твердость граней? Какие признаки могут подтвердить такую неизгибаемость, если недостаточно леммы Коши?"

Ниже всюду под *изгибанием* многогранной поверхности Φ в классе выпуклых поверхностей будем понимать любую многогранную поверхность Φ', полученную из Φ изменением некоторых или всех двугранных углов между гранями Φ при неизменности (твёрдости) граней. При этом, все рассматриваемые изгибания предполагают сохранение симметрии изгибаемой многогранной поверхности. Иногда такие изгибания, сохраняющие симметрию многогранной поверхности с краем, будем называть S-изгибаниями.

1. Многогранник, связанный с плосконосым кубом.

Рассмотрим плосконосый куб $\widehat{K}$. Пусть $F \in \widehat{K}$ — некоторая квадратная грань. Звезда $Star(F)$ состоит из четырёх правильных треугольников T_i, $i = 1, \ldots, 4$. Построим правильную 4-угольную пирамиду Π с основанием F так, чтобы каждая боковая грань G_i пирамиды находилась в одной плоскости с соответствующим треугольником T_i. Пусть L_4 — ось вращения куба $\widehat{K}$, проходящая через вершину построенной пирамиды и центр квадрата Q, противоположного грани F. Плоские 4-угольники $T_i \cup G_i$ не будут ромбами для любого i. Действительно, в правильной 4-угольной пирамиде с правильными боковыми гранями двугранный угол боковых граней с квадратным основанием $\approx 54,7°$, а двугранный угол треугольной грани плосконосого куба с его квадратной гранью $\approx 142,9°$. Поэтому угол $\alpha \approx 162,4°$, где α — двугранный угол треугольной грани 4-угольной пирамиды с соседним по ребру треугольником T_i. Таким образом, α незначительно отличается от развёрнутого угла.

Заметим, что именно это, не слишком большое расхождение α с развёрнутым углом, даёт основание предположению о существовании RR-многогранника, связанного с плосконосым кубом. При этом, материальная модель предполагаемого RR-многогранника может быть построена.

Удалим построенную пирамиду Π, одну квадратную грань F в $\widehat{K}$ и четыре треугольные грани T_i , которые имеют с удалённой квадратной гранью общее ребро. Оставшуюся после такого удаления граней часть многогранной поверхности плосконосого куба $\widehat{K}$ обозначим $\widetilde{K}$, рисунок 3, a).

Пусть $\widetilde{K}$ допускает такое изгибание, что ось L_4 при этом сохраняется, а двугранные углы при ребре AB, рисунок 3,a) и эквивалентных ему относительно оси L_4 изменяются. Пусть в результате такого изгибания получена поверхность $\widetilde{K'}$. Тогда выпуклая оболочка $conv\,\widetilde{K'}$ — выпуклый многогранник, у которого вместо четырёх треугольных граней T_i будут новые треугольники, $\widetilde{T}_i$, а вместо грани F — новая квадратная грань $\widetilde{F}$. Построим правильную четырёхугольную пирамиду $\widetilde{\Pi}$ с основанием $\widetilde{F}$. Пусть вершина пирамиды $\widetilde{\Pi}$ является 4-ромбической, то есть $\widetilde{T_i} \cup \widetilde{G_i}$, $i = 1, \ldots, 4$, являются ромбами с общей вершиной в вершине пирамиды $\widetilde{\Pi}$. Здесь $\widetilde{G_i}$ — боковые грани пирамиды $\widetilde{\Pi}$. Таким образом, в результате такого изгибания и последующего построения пирамиды $\widetilde{\Pi}$, мы должны получить RR-многогранник $\widetilde{K'} \cup \widetilde{T}_i \cup \widetilde{G_i}$ с одной симметричной 4-ромбической вершиной.

Хотя материальная модель предполагаемого RR-многогранника $\widetilde{K'} \cup \widetilde{T}_i \cup \widetilde{G_i}$ легко строится, но далее будет показано, что такой многогранник не существует.

Теорема 3. *RR-многогранник, связанный с плосконосым кубом, не существует.*

Доказательство.

Рассмотрим "нижнюю" часть многогранной поверхности $\widetilde{K}$, состоящую из квадрата Q, через центр которого проходит ось L_4, и всех двенадцати треугольных граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с гранью Q; рисунок 3, b). Обозначим нижнюю часть поверхности $\widetilde{K}$ через $\mathbb{N}$. Так как в результате изгибания поверхности $\widetilde{K}$ должна получиться 4-ромбическая вершина RR-многогранника, то ось симметрии L_4 должна сохраниться, и следовательно, должна сохраниться симметрия части $\mathbb{N}$. Проследим подробнее за возможным изгибанием отдельно части $\mathbb{N}$. При указанном изгибании двугранные углы у ребра EG и ему эквивалентных относительно оси L_4 должны или все увеличиться, или все уменьшиться.

В дальнейшем, говоря об изменении двугранного угла при некотором данном ребре будем подразумевать, что точно такое же изменение происходит и у всех рёбер, эквивалентных данному относительно оси L_4. На рисунке 3 рёбра и вершины, эквивалентные относительно оси L_4 обозначены одинаковыми буквами.

Рассмотрим первый случай, когда двугранные углы при ребрах EG увеличиваются.

Тогда углы у рёбер CG, в силу сохранения симметрии относительно оси L_4, уменьшаются. Рёбра, при которых двугранные углы увеличиваются, обозначать будем как обычно знаком $+$, а рёбра, при которых двугранные углы уменьшаются, будем обозначать знаком $-$. В этом случае угол при ребре BC не может увеличиться, так как при обходе вершины C не будет по крайней мере четырёх перемен знака. Если угол при ребре BC уменьшится, то в случае нетривиального изгибания углы при рёбрах CE должны увеличиться, иначе не получится четырёх перемен знака при обходе вокруг вершины C. Но тогда не получится четырёх перемен знака при обходе вокруг вершины E. В частности, не меняется угол при ребре EG, что противоречит тому, что углы при рёбрах EG увеличиваются.

Рассмотрим второй случай, когда двугранные углы при рёбрах EG уменьшаются. Тогда углы при рёбрах CG, в силу сохранения симметрии относительно оси L_4, увеличиваются, и угол при ребре BC не может уменьшиться, так как при обходе вершины C не будет по крайней мере четырёх перемен знака. Если же угол при ребре BC увеличивается, то в случае нетривиального изгибания углы при рёбрах CE должны уменьшиться, иначе не получится четырёх перемен знака при обходе вокруг вершины C. Но тогда не получится четырёх перемен знака при обходе вокруг вершины E, то есть 5-гранный угол с вершиной E в этом случае не деформируется. Получаем противоречие с тем, что двугранные углы при рёбрах EG уменьшаются.

Пусть $\mathbb{P}$ — замкнутый пояс граней, $\mathbb{P} \in \widetilde{K}$, состоящий из четырёх квадратов и восьми треугольников, в котором каждая грань имеет только одно ребро с двумя соседними гранями. При этом, каждая грань пояса имеет хотя бы одну общую вершину с частью $\mathbb{N}$. Развёртка пояса $\mathbb{P}$ изображена на рисунке 3, c), на котором рёбра, обозначенные цифрой 1, отождествляются.

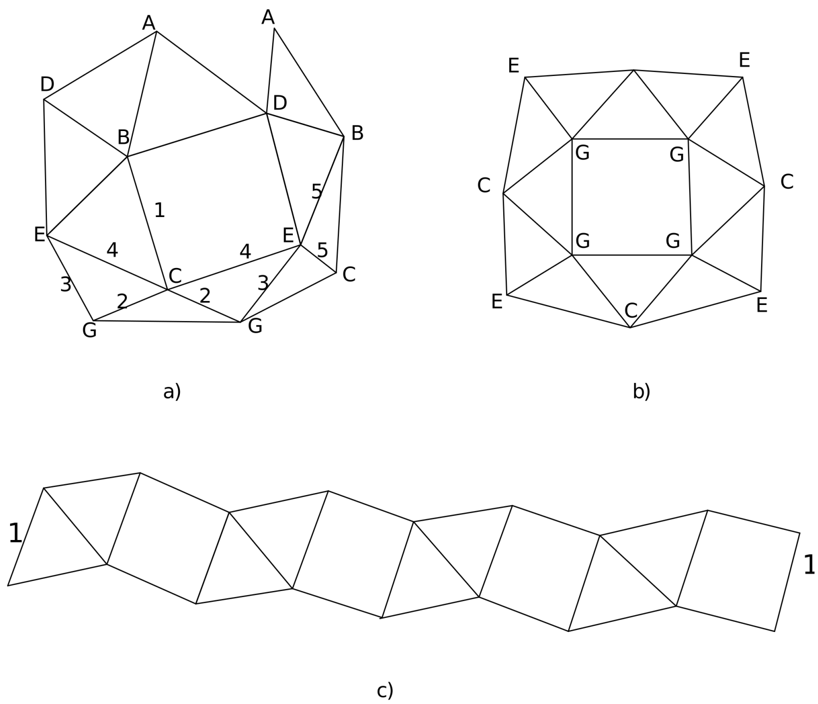


Рис. 3: Нижняя часть (b) и боковой пояс (c) поверхности $\widetilde{K}$ (a)

Пусть γ — нижняя граница пояса $\mathbb{P}$, то есть пространственная ломаная из рёбер пояса, которые имеют общие рёбра с частью $\mathbb{N}$; δ — пространственная ломаная, которая является верхней частью пояса $\mathbb{P}$. Если поверхность $\widetilde{K}$ допускает изгибание, то двугранные углы при рёбрах AB изменяются, а значит, изменяются углы между звеньями ломаной δ. Но тогда, в силу сохранения оси вращения L_4, изменяться будут и пространственные углы ломаной γ. Следовательно, будут изменяться двугранные углы части $\mathbb{N}$, то есть часть $\mathbb{N}$ будет изгибаться: двугранные углы при рёбрах EG будут изменяться. Это противоречит доказанному ранее, что такое изменение углов при рёбрах EG невозможно.

Теорема 3 доказана.

2. Многогранник, связанный с додекаэдром.

Рассмотрим три грани правильного додекаэдра $\mathfrak{D}$, имеющие общую вершину V. Постро-

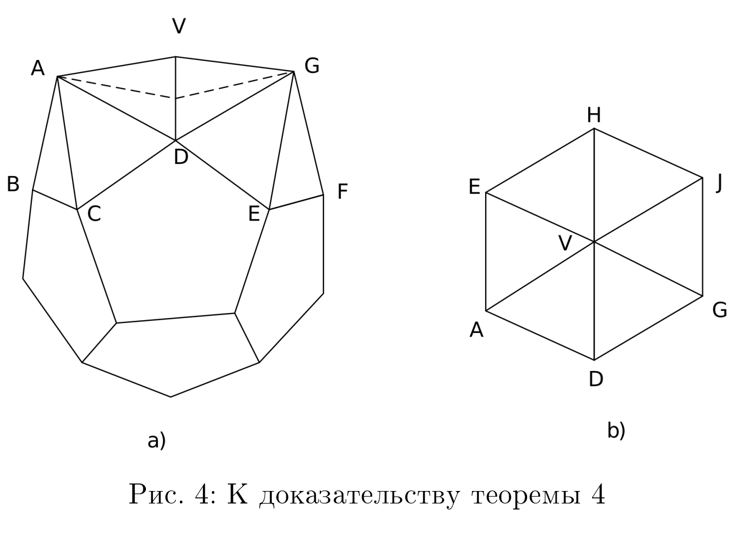


Рис. 4: К доказательству теоремы 4

им на этих гранях правильные 5-угольные пирамиды $\Pi_i, i = 1, 2, 3$. Новый многогранник обозначим $\mathfrak{D} \cup \Pi_i$.

Обозначим ψ — двугранный угол при ребре DV, ϕ — двугранный угол боковой грани 5-угольной пирамиды Π_i с её основанием, α — двугранный угол при ребре додекаэдра.

Заметим, что угол ψ вогнутый, то есть многогранник, полученный после пристраивания пирамид Π_i, не является выпуклым. Действительно, $\alpha = 116,565°$, а для угла ϕ получаем: $\cos\phi = \dfrac{\tan 54°}{\tan 60°}, \quad \phi \approx 37,377°$.

Находим двугранный угол $\psi \approx 360° - 74,755° - 116,565° = 168,68°$. Поскольку угол ψ отличается от развёрнутого угла, то пунктирная линия AG отличается от отрезка прямой.

Рассмотрим многогранник $\mathfrak{D} \cup \Pi_i, i = 1, 2, 3$ Удалим из каждой пирамиды по две те треугольные грани, которые имеют общую вершину V. Удалим также 5-угольные основания каждой пирамиды Π_i. Новую многогранную поверхность обозначим $\widetilde{\mathfrak{D} \cup \Pi_i}$. Заметим, что границей этой поверхности является симметричный относительно оси L_3 3-го порядка, проходящей через вершину V, пространственный 6-угольник $ADGJHE$, рисунок 4, б).

Покажем, что к этой границе нельзя присоединить никакую тупоугольную ромбическую звезду. Для этого сравним два плоских угла $\widehat{ADG}$ и $\widehat{DGJ}$, которые обозначим α и β соответственно.

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} cos\,\psi = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cos 168,68 \approx -0,49,\ \alpha \approx 119°;$$

угол $\beta = 108°$ как равный углу правильного пятиугольника.

Так как $\alpha \neq \beta$, то пространственный 6-угольник $ADGJHE$ не может быть границей тупоугольной ромбической звезды.

Возникает вопрос: допускает ли поверхность $\widetilde{\mathfrak{D} \cup \Pi_i}$ такое изгибание, что в результате изгибания возможно присоединение к границе изогнутой поверхности тупоугольной ромбической звезды?

Ответ на этот вопрос отрицательный. Действительно, рассмотрим одну из точек, например E, инцидентную двум треугольникам, оставшимся от боковой поверхности одной из пирамид Π_i, и двум пятиугольным граням, рисунок 4, а). В случае существования нужного изгибания, двугранный угол при ребре EG (и двугранные углы при рёбрах, эквивалентных EG, так как симметрия относительно оси L_3 должна сохраняться) должен измениться. Но тогда в 4-гранном угле с вершиной E, в силу леммы Коши, все четыре двугранных угла должны измениться. Значит, изменится и двугранный угол между 5-угольными гранями. Это будет противоречить тому, что часть поверхности $\widetilde{\mathfrak{D} \cup \Pi_i}$, состоящая из девяти граней додекаэдра, является, очевидно, неизгибаемой.

Таким образом, в случае существования изгибания для $\widetilde{\mathfrak{D} \cup \Pi_i}$ существовало бы изгибание части додекаэдра. Но так как оставшаяся часть додекаэдра неизгибаема, то не существует и изгибания поверхности $\widetilde{\mathfrak{D} \cup \Pi_i}$.

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *RR-многогранник, связанный с правильным додекаэдром, не существует.*

3. Многогранник, связанный с икосододекаэдром.

Рассмотрим часть икосододекаэдра, состоящую из следующих семи граней: 1) треугольник (T), 2) соседние с Т по сторонам три 5-угольника, 3) три треугольника (S), имеющих общие вершины с T. Присоединим к каждому 5-угольнику по два квадрата так, чтобы каждая пара квадратов имела общую сторону. В образовавшееся пространство между каждой парой квадратов поместим ещё по одному треугольнику Δ. Через центр треугольника T перпендикулярно его плоскости проходит ось вращения L_3.

Тогда возможно поместить три равных ромба с тупыми углами, которые равны углам 5-угольных граней, т.е. по 108°.

Действительно, двугранные углы между соседними квадратными гранями равны внутренним углам 5-угольных граней, потому что эти грани перпендикулярны плоскости 5-угольной грани. Кроме того, в пространственном 6-угольнике, образованном рёбрами шести квадратных граней, имеются три пары параллельных сторон, рисунок 5, б). Стороны, отмеченные одинаковыми цифрами на рисунке 5, б), параллельны, так как в каждой паре 5-гольных граней, в силу симметрии части икосододекаэдра, имеются по одной паре параллельных рёбер.

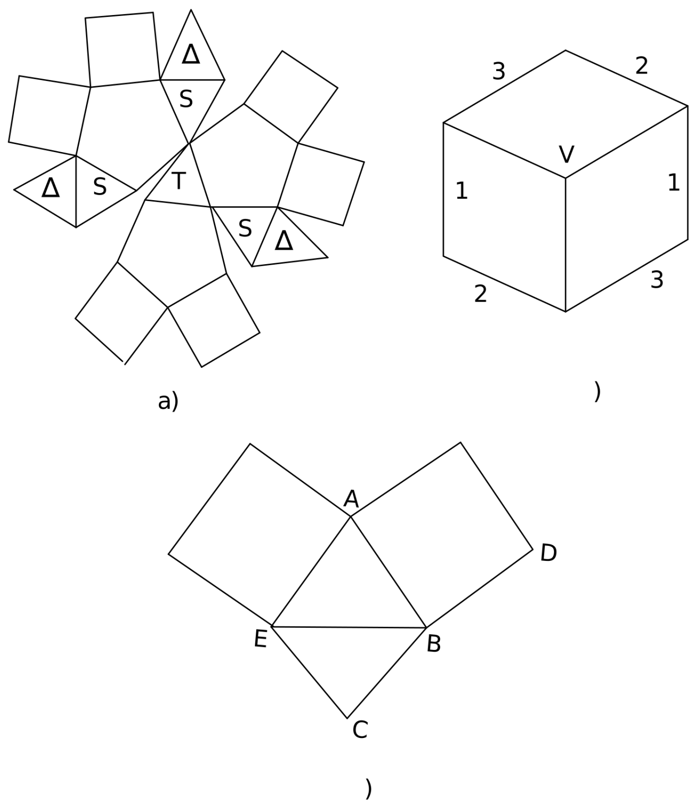


Рис. 5: К теореме 5

Заполняя оставшееся пространство так, чтобы три ромба тупыми углами сходились в одной вершине V, получим модель 19-гранника с тупоугольной симметричной ромбической вершиной V, развёртка которого (без трёх ромбов) показана на рисунке 5, а).

Однако, и здесь имеет место

Теорема 5. *Не существует RR-многогранника, связанного с икосододекаэдром.*

Доказательство.

Покажем, что треугольники Δ незначительно, но отличаются от правильных. И, следовательно, построенный многогранник с одной симметричной ромбической вершиной не является RR-многогранником, но близок к нему и материализованная модель его может быть построена.

На рисунке 5, в) представлен фрагмент построенного 19-гранника. Обозначим α равные углы B и E в ΔABE. Угол $\widehat{ABC}$ между квадратной и 5-угольной гранью равен $90°$. Двугранные углы при рёбрах BC и EC равны углам между треугольной и 5-угольной гранью, то есть равны $\approx 142,623°$. Для трёхгранного угла $BACE$ получаем:

$$\cos\alpha \approx \cos 90° cos\, 60° + \sin 90° sin\, 60° cos\,(142,623° - 90°),$$

$$\cos\alpha \approx \frac{\sqrt{3}}{2} cos\, 52,623^\circ \approx 0,5257,\ \alpha \approx 58,28^\circ.$$

Таким образом, треугольники Δ незначительно, но отличаются от правильных. Построенный многогранник не является RR-многогранником, однако близок к нему и материализованная модель такого многогранника может быть построена.

И здесь, S-изгибание поверхности, получаемой из построенного многогранника удалением трёх ромбов, невозможно, так как невозможно S-изгибание части икосододекаэдра построенного многогранника.

Теорема доказана.

5. Заключение

Таким образом, дано обновлённое доказательство существования RR-многогранника первого типа, связанного с икосаэдром. Доказано также существование RR-многогранника первого типа с тетраэдральной симметрией, с четырьмя конгруэнтными тупоугольными ромбическими звёздами, имеющими общие вершины.

Доказана невозможность RR-многогранника, связанного с плосконосым кубом и прямым построением доказано существование двух многогранников, близких к RR-многогранникам второго типа, что сужает поиск всех таких RR-многогранников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grunbaum B. Regular polyhedra — old and new.// Aequationes mathematicae. 1977. Vol. 16, № 1-2. P.1-20.

2. Coxeter H. S. Regular polytopes. London-NY. 1963.

3. Деза М., Гришухин В. П., Штогрин М. И. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. М.: МЦНМО, 2007.

4. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981.

5. Cromwell P. R. Polyhedra. Cambridge: Cambridge University Press. 1999.

6. Makarov P. V. On the derivation of four-dimensional semi-regular polytopes// Voprosy Diskret. Geom. Mat. Issled. Akad. Nauk. Mold.1988. Vol. 103. P.139–150.

7. Макаров В. С. Правильные многогранники и многогранники с правильными гранями трехмерного пространства Лобачевского // Материалы X Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения".М.: МГУ. 2010. С.58-66.

8. Farris S. L. Completely classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra.// Geometriae Dedicata. 1988. Vol. 26, № 1. P.111-124.

9. McMullen P. Geometric Regular Polytopes. Cambridge University Press. 2020.

10. Blind, G.; Blind, R. The semiregular polytopes // Commentarii Mathematici Helvetici. 1991. Vol.66, № 1. P.150–154.

11. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces // Can. J. Math. 1966. Vol. 18, № 1. P. 169—200.

12. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями //Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Т.2. С.1-220.

13. Милка А. Д. Почти правильные многогранники. //Труды Ин-та мат. СО АН СССР. 1987. Т.9. С.136-141.

14. Timofeenko A. V. Junction of noncomposite polytops // St. Petersburg Math. J. 2010. Vol.21, № 3. P.483–512.

15. Субботин В. И. Об одном классе сильно симметричных многогранников // Чебышевский сборник. 2016. № 4. С. 132-140.

16. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2018. – Т. 476, – С. 153-164.

17. Субботин В. И. Об одном классе многогранников с симметричными звездами вершин //Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т.169. С. 86-95.

18. Субботин В. И. О полноте списка выпуклых RR-многогранников //Чебышевский сборник. 2020. Т.21, № 1. С. 297-309.

19. Субботин В. И.О существовании RR-многогранников, связанных с икосаэдром //Чебышевский сборник. 2021. Т.22, № 4. С. 253-264.

20. Субботин В. И. О существовании и полноте перечисления трёхмерных RR-многогранников //Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2022. Т.216. С. 106-115.

21. Субботин В. И. On the composite RR-polyhedra of the second type //Siberian Mathematical Journal. 2023. Vol.64, No.2. P.500–506.

22. Субботин В. И.О несоставных RR-многогранниках второго типа //Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. Т.221. С. 104-114.

REFERENCES

1. Grunbaum B. 1977, “Polyhedra — old and new”, *Aequationes mathematicae*, vol. 16, no. 1-2, pp.1-20.

2. Coxeter H. S. 1963, *Regular polytopes*, London-NY.

3. Deza M, Grishukhin V. P., Shtogrin M. I. 2008, “Scale-Isometric Polytopal Graphs in Hypercubes and Cubic Lattices”, *MCNMO, Moscow.*

4. Emelichev V. A., Kovalev M. M., Kravzov M. K. 1981, “Polyhedra. Graph. Optimization”, *Nauka, Moscow.*

5. Cromwel P. R. 1997, “Polyhedra”, *Cambridge University Press, Cambridge.*

6. Makarov, P. V. 1988, “The derivation of four-dimensional semi-regular polytopes”, *Voprosy Diskret. Geom. Mat. Issled. Akad. Nauk. Mold.*, vol. 103, pp.139–150.

7. Makarov V. S. 2010, “Regular polytopes and polyhedra with regular faces of the three-dimensional Lobachevsky space”, *(Proc. Int. Seminar “Discrete Mathematics and Its Applications”)*, Moscow, pp.58-66.

8. Farris, S. L. 1988, “Classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra”, *Geometriae Dedicata*, vol. 26, no. 1, pp.111-124.

9. McMullen P. 2020, *Geometric Regular Polytopes*, Cambridge University Press.

10. Blind, G.; Blind, R. 1991, “The semiregular polytopes”, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol.66, no.1, pp.150–154.

11. Johnson N. W. 1966, “Convex polyhedra with regular faces”, *Can. J. Math.*, vol. 18, no.1, pp. 169—200.

12. Zalgaller V. A. 1967, “Convex polyhedra with regular faces”, *Zapiski nauchnych seminarov LOMI*, vol. 2, pp.1-220.

13. Milka A. D. 1987, “Almost regular polyhedra”, *Trudy In-ta mat. SO AN SSSR*, vol.9, pp. 136-141.

14. Timofeenko A. V. 2010, “Junction of noncomposite polytops”, *St. Petersburg Math. J.*, vol.21, no.3, pp.483–512.

15. Subbotin V. I. 2016, “On a class of strongly symmetric polytopes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 17, no. 4, pp. 132-140.

16. Subbotin V. I. 2018, “On two classes of polyhedra with rhombic vertices”, *Zapiski nauchnych seminarov POMI*, vol.476, pp.153-164.

17. Subbotin V. I. 2019, “On one class of polyhedra with symmetric vertex stars”, *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i yeye prilozheniya. Tematicheskiye obzory*, vol. 169. pp. 86-95.

18. Subbotin V. I. 2020, “On the completeness of the list of convex RR -polytopes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no.1, pp. 297-309.

19. Subbotin V. I. 2021, “On the existence of RR-polyhedra related to the icosahedron”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no.4, pp. 253-264.

20. Subbotin V. I.2022, “On the existence and completeness of the enumeration of three-dimensional RR-polytopes”, *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i yeye prilozheniya. Tematicheskiye obzory*, vol.216, pp. 106-115.

21. Subbotin V. I. 2023, “On the composite RR-polyhedra of the second type”, *Siberian Mathematical Journal*, vol.64, no.2, pp.500–506.

22. Subbotin V. I. 2023, “On non-composite RR-polytopes of the second type”, *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i yeye prilozheniya. Tematicheskiye obzory*, vol.221, pp. 104-114.

Получено: 14.08.2023
Принято в печать: 21.12.2023