ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 5.

УДК 511.3 + 517.2 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-180-193

Некоторые обобщения формулы Фаа Ди Бруно[1]

П. Н. Сорокин

Сорокин Павел Николаевич — кандидат физико-математических наук, Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (г. Москва).
e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

Аннотация

В центре внимания статьи лежит классическая формула Фаа Ди Бруно для вычисления производных высших порядков сложной функции $F(u(x))$. Здесь приведен вариант доказательства этой формулы. Затем доказывается обобщение формулы Фаа Ди Бруно на случай сложной функции с внутренней функцией $u(x, y)$, зависящей от двух независимых переменных. В работе представлена формула для n-ой производной сложной функции, когда аргументом внешней функции является вектор с произвольным числом компонент (функций от одной переменной). В статье также рассмотрены примеры нахождения производных высших порядков, иллюстрирующие как классическую формулу Фаа Ди Бруно, так и ее обобщения.

Ключевые слова: формула Фаа Ди Бруно, n-ая производная сложной функции многих переменных, обобщения формулы Фаа Ди Бруно для этих функций, формулы бинома и полинома Ньютона.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
П. Н. Сорокин. Некоторые обобщения формулы Фаа Ди Бруно // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 180–193.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 5.

UDC 511.3 + 517.2 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-180-193

Some generalizations of the Faa Di Bruno formula

P. N. Sorokin

Sorokin Pavel Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Scientific Research Institute for System Analyze of the Russian Academy of Science (Moscow).
e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

[1]Исследование выполнено в рамках проекта ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления» FNEF-2022-0007 (Рег. № 1021060909180-7-1.2.1).

Abstract

The focus of the article is the classical Faa Di Bruno formula for computing higher-order derivatives of a complex function $F(u(x))$. Here is a version of the proof of this formula. Then we prove a generalization of the Faa Di Bruno formula to the case of a complex function with an inner function $u(x, y)$ depending on two independent variables. The paper presents a formula for the n-th derivative of a complex function, when the argument of the outer function is a vector with an arbitrary number of components (functions of one variable). The article also considers examples of finding higher-order derivatives, illustrating both the classical Faa Di Bruno formula and its generalizations.

Keywords: Faa Di Bruno's formula, n-th derivative of complex functions of several variables, generalizations of Faa Di Bruno's formula for these functions, Newton's binomial and polynomial formulas.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
P. N. Sorokin, 2023, "Some generalizations of the Faa Di Bruno formula", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 180–193.

1. Введение

В настоящей статье рассматривается хорошо известная формула для нахождения производных высших порядков сложной функции, которая называется формулой Фаа Ди Бруно. Свое имя ей дал итальянский математик Франческо Фаа Ди Бруно [1, 2], хотя, по мнению некоторых исследователей [15], французский математик Луи Арбогаст открыл ее раньше [16]. Существуют различные варианты формулы Фаа Ди Бруно (например, [4, 6-8]). Историю вопроса можно проследить, например, в работах [9], [15]. Приложения формулы Фаа Ди Бруно можно посмотреть, например, в [11], [12], [14].

Мы рассмотрим и докажем несколько обобщений этой формулы для различных модификаций сложной функции, а именно, для $F(u(x), v(x))$, $F(\overline{u}(x))$, где $\overline{u}(x) = (u_1(x), ..., u_s(x))$, и $F(u(x, y))$.

2. Бином и полином Ньютона

Теорема 1. *(Формула бинома Ньютона). Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда для любых чисел x и y имеет место*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

где числа $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты, которые связаны рекуррентным соотношением

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции [10]. При $n = 0$ формула верна. Предположим ее справедливость для $n = t$. Докажем формулу для $n = t + 1$. Пользуясь рекуррентным соотношением для биномиальных коэффициентов и предположением индукции, имеем

$$(x+y)^{t+1}=(x+y)\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}x^ky^{t-k}=\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}x^{k+1}y^{t-k}+\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}x^ky^{t-k+1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{t+1}\binom{t}{k-1}x^ky^{t-k+1}+\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}x^ky^{t-k+1}=\sum_{k=1}^{t}\binom{t}{k-1}x^ky^{t-k+1}+\binom{t}{t}x^{t+1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{t}\binom{t}{k}x^ky^{t-k+1}+\binom{t}{0}y^{t+1}=\binom{t}{t}x^{t+1}+\binom{t}{0}y^{t+1}+\sum_{k=1}^{t}\left(\binom{t}{k-1}+\binom{t}{k}\right)x^ky^{t-k+1}=$$

$$=\binom{t}{0}y^{t+1}+\sum_{k=1}^{t}\binom{t+1}{k}x^ky^{t-k+1}+\binom{t}{t}x^{t+1}=\sum_{k=0}^{t+1}\binom{t+1}{k}x^ky^{t-k+1},$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *(Формула полинома Ньютона). Пусть $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $t\in\mathbb{N}$. Тогда для любых чисел $x_1,...,x_t$ имеем*

$$(x_1+x_2+\dots+x_t)^n=\sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_t=n\\ 0\le k_1,k_2,\ldots,k_t\le n}}\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_t}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_t^{k_t},$$

где числа $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_t}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_t!}$ — полиномиальные коэффициенты, $k_1,k_2,\ldots,k_t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции [10]. При $t=1$ формула верна. Предположим ее справедливость для $t-1$ переменных. Докажем формулу для t переменных. По формуле бинома Ньютона имеем

$$(x_1+\dots+x_{t-1}+x_t)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x_1+\dots+x_{t-1})^kx_t^{n-k}.$$

По предположению индукции имеем

$$(x_1+x_2+\dots+x_{t-1})^k=\sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_{t-1}=k\\ 0\le k_1,k_2,\ldots,k_{t-1}\le k}}\binom{k}{k_1,k_2,\ldots,k_{t-1}}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_{t-1}^{k_{t-1}}.$$

Отсюда получаем

$$(x_1+x_2+\dots+x_t)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x_t^{n-k}\sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_{t-1}=k\\ 0\le k_1,k_2,\ldots,k_{t-1}\le k}}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_{t-1}!}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_{t-1}^{k_{t-1}}.$$

Учитывая, что $n-k=n-k_1-\dots-k_{t-1}=k_t$, получаем искомое равенство. □

3. Формула Фаа Ди Бруно

Приведем формулировку (в терминах [6]) и докажем формулу Фаа Ди Бруно:

Теорема 3. *(Формула Фаа Ди Бруно). Пусть функции $F(u)$ и $u(x)$ имеют все производные до n-го порядка. Тогда для n-ой производной сложной функции $G(x) = F(u(x))$ имеет место формула:*

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} F^{(k_1+k_2+\cdots+k_n)}(u) \cdot P_{k_1+k_2+\cdots+k_n},$$

$$P_{k_1+k_2+\cdots+k_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\left(\frac{u^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{u^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{u^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n},$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным числам $k_1, k_2, \ldots, k_n$, которые удовлетворяют диофантову уравнению $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$, а $F^{(m)}$, $u^{(m)}$ — производные m-го порядка для функций $F(u)$, $u(x)$.

Доказательство. Используем утверждение о том, что, применяя n раз правило дифференцирования сложной функции $G(x)$, получаем равенство вида

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} \cdot F^{(k)}(u),$$

где $A_{k,n}$ — некоторые выражения, независящие от конкретного задания функции $F(u)$ (задача 1229 в сборнике задач и упражнений по математическому анализу Б.П.Демидовича [13]).

Действительно это легко проверяется методом математической индукции. При $n = 1$ имеем $G^{((1)}(x) = F^{(1)}(u) \cdot u^{(1)}(x) = A_{1,1}F^{(1)}(u)$, где $A_{1,1} = u^{(1)}(x)$ не зависит от вида $F(u)$. Пусть для производной $(m-1)$-го порядка функции $G(x)$ справедливо равенство

$$G^{((m-1)}(x) = \sum_{k=1}^{m-1} A_{k,m-1} \cdot F^{(k)}(u),$$

где $A_{k,m-1}$ — функции, не зависящие от вида $F(u)$. Докажем равенство с тем же свойством для m-ой производной функции $G(x)$. Продифференцируем предыдущее равенство:

$$G^{((m)}(x) = \sum_{k=1}^{m-1}\left(A^{(1)}_{k,m-1} \cdot F^{(k)}(u) + A_{k,m-1} \cdot F^{(k+1)}(u) \cdot u^{(1)}(x)\right) = \sum_{k=1}^{m} A_{k,m} \cdot F^{(k)}(u),$$

где $A_{1,m} = A^{(1)}_{1,m-1}$; $A_{k,m} = A^{(1)}_{k,m-1} + A_{k-1,m-1} \cdot u^{(1)}(x), k = 2, \ldots, m-1$; $A_{m,m} = A_{m-1,m-1} \cdot u^{(1)}(x)$, т.е. наша формула справедлива для всех $m \in \mathbb{N}$ и $A_{k,m}$ не зависят от вида функции $F(u)$.

Для нахождения $A_{k,n}$ будем считать, что $F(u)$ и $u(x)$ — многочлены n-ой степени:

$$F(u) = F(u_0) + \frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}(u-u_0) + \ldots + \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}(u-u_0)^n, \tag{1}$$

$$u(x) = u(x_0) + \frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

или при $u_0 = u(x_0)$:

$$u - u_0 = \frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{2}$$

Подставляя в (1) вместо $u-u_0$ правую часть (2), получим

$$G(x)=F(u_0)+\frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}\left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)+...+ \tag{3}$$

$$+\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}\left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)^n.$$

Отсюда видно, что $G(x)$ — многочлен степени n^2 имеет следующий вид:

$$G(x)=G(x_0)+\frac{G^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{G^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...+\frac{G^{(n^2)}(x_0)}{(n^2)!}(x-x_0)^{n^2}. \tag{4}$$

Далее, раскрывая скобки в (3) с помощью формулы полинома Ньютона (теорема 2):

$$(x_1+x_2+...+x_m)^n=\sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_m=n\\ 0\le k_1,k_2,...,k_m\le n}}\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_m^{k_m},$$

а затем сравнивая коэффициент при $(x-x_0)^n$ с соответствующим коэффициентом в формуле (4), приходим к утверждению теоремы. Действительно, имеем

$$G(x)=F(u_0)+$$

$$+\frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}\sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=1\\ 0\le k_1,...,k_n\le 1}}\frac{1!}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}\right)^{k_1}(x-x_0)^{k_1}\cdots\left(\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}\right)^{k_n}(x-x_0)^{nk_n}+$$

$$+\frac{F^{(2)}(u_0)}{2!}\sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=2\\ 0\le k_1,...,k_n\le 2}}\frac{2!}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}\right)^{k_1}(x-x_0)^{k_1}\cdots\left(\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}\right)^{k_n}(x-x_0)^{nk_n}+\ldots+$$

$$+\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}\sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=n\\ 0\le k_1,...,k_n\le n}}\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}\right)^{k_1}(x-x_0)^{k_1}\cdots\left(\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}\right)^{k_n}(x-x_0)^{nk_n}.$$

Для того, чтобы степень многочлена $x-x_0$ была равна n, необходимо выполнение равенства $k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n$, следовательно из равенства

$$\frac{G^{(n)}(x)}{n!}=\left(\frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}\sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=1\\ 0\le k_1,...,k_n\le 1}}\frac{1!}{k_1!\cdots k_n!}+\frac{F^{(2)}(u_0)}{2!}\sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=2\\ 0\le k_1,...,k_n\le 2}}\frac{2!}{k_1!\cdots k_n!}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}\sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=n\\ 0\le k_1,...,k_n\le n}}\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\right)\left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{u^{(2)}(x_0)}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}\right)^{k_n}$$

получаем

$$G^{(n)}(x)=\sum_{k_1+\dots+nk_n=n}\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\cdot F^{(k_1+\dots+k_n)}\cdot\left(\frac{u^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{u^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{u^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n},$$

что и требовалось доказать. □

Пример 6. *Пользуясь формулой Фаа Ди Бруно, находим*

$$G^{(1)}(x)=F^{(1)}\cdot u^{(1)},\quad G^{(2)}(x)=F^{(1)}\cdot u^{(2)}+F^{(2)}\cdot\left(u^{(1)}\right)^2,$$

$$G^{(3)}(x)=F^{(1)}\cdot u^{(3)}+3\cdot F^{(2)}\cdot u^{(1)}\cdot u^{(2)}+F^{(3)}\cdot\left(u^{(1)}\right)^3,$$

$$G^{(4)}(x)=F^{(1)}\cdot u^{(4)}+F^{(2)}\left(4\cdot u^{(1)}\cdot u^{(3)}+3\cdot\left(u^{(2)}\right)^2\right)+6\cdot F^{(3)}\cdot\left(u^{(1)}\right)^2\cdot u^{(2)}+F^{(4)}\cdot\left(u^{(1)}\right)^4,$$

$$G^{(5)}(x)=F^{(1)}\cdot u^{(5)}+F^{(2)}\left(5\cdot u^{(1)}\cdot u^{(4)}+10\cdot u^{(2)}\cdot u^{(3)}\right)+$$

$$+F^{(3)}\left(10\cdot\left(u^{(1)}\right)^2\cdot u^{(3)}+15\cdot u^{(1)}\cdot\left(u^{(2)}\right)^2\right)+10\cdot F^{(4)}\cdot\left(u^{(1)}\right)^3\cdot u^{(2)}+F^{(5)}\cdot\left(u^{(1)}\right)^5.$$

Несколько примеров использования формуы можно посмотреть в [5]. Формула Фаа Ди Бруно может быть также записана в комбинаторной форме:

Теорема 4. *Пусть функция $y=x(t)$ дифференцируема n раз в точке t_0, а функция $z=f(y)$ дифференцируема n раз в точке $y_0=x(t_0)$. Тогда сложная функция $z(t)=f(x(t))$ дифференцируема n раз в точке t_0, причем*

$$z^{(n)}(t_0)=\sum_{\delta\in\Delta}f^{(|\delta|)}(y_0)\prod_{\theta\in\delta}x^{(|\theta|)}(t_0),$$

где Δ — все разбиения множества $\{1,2,...,n\}$, множество θ состоит из всех частей (блоков) разбиения $\delta\in\Delta$, $|\delta|$ — число блоков в δ, $|\theta|$ — размер блока в θ.

Пример 7. *Найдем $z^{(3)}(t)=f^{(3)}(x(t))$.*
Выпишем разбиения множества $\{1,2,3\}$: $\delta_1=(\{1,2,3\})$, $|\delta_1|=1$, $\delta_2=(\{1,2\},\{3\})$, $|\delta_2|=2$, $\delta_3=(\{1,3\},\{2\})$, $|\delta_3|=2$, $\delta_4=(\{1\},\{2,3\})$, $|\delta_4|=2$, $\delta_5=(\{1\},\{2\},\{3\})$, $|\delta_5|=3$.
Размеры блоков в разбиениях: $\theta_1=(\{1,2,3\})$, $|\theta_{11}|=3$, $|\theta_{12}|=|\theta_{13}|=0$, $\theta_2=(\{1,2\},\{3\})$, $|\theta_{21}|=2$, $|\theta_{22}|=1$, $|\theta_{23}|=0$, $\theta_3=(\{1,3\},\{2\})$, $|\theta_{31}|=2$, $|\theta_{32}|=1$, $|\theta_{33}|=0$, $\theta_4=(\{1\},\{2,3\})$, $|\theta_{41}|=1$, $|\theta_{42}|=2$, $|\theta_{43}|=0$, $\theta_5=(\{1\},\{2\},\{3\})$, $|\theta_{51}|=1$, $|\theta_{52}|=1$, $|\theta_{53}|=1$. Отсюда по формуле Фаа Ди Бруно (теорема 4) получаем:

$$z^{(3)}(t)=\sum_{k=1}^{5}f^{(|\delta_k|)}(x)\prod_{j=1}^{3}x^{(|\theta_{kj}|)}(t)=f^{(1)}x^{(3)}+f^{(2)}x^{(2)}x^{(1)}+f^{(2)}x^{(2)}x^{(1)}+f^{(2)}x^{(1)}x^{(2)}+f^{(3)}(x^{(1)})^3=$$

$$=f^{(1)}x^{(3)}+3f^{(2)}x^{(2)}x^{(1)}+f^{(3)}(x^{(1)})^3.$$

4. Обобщения формулы Фаа Ди Бруно

Сформулируем обобщение формулы Фаа Ди Бруно на случай сложной функции $F(u(x,y))$:

Теорема 5. *Пусть функция $F(u)$ имеет все производные до n-го порядка, а функция $u(x,y)$ имеет все частные производные до n-го порядка. Тогда для n-го дифференциала сложной функции $G(x,y)=F(u(x,y))$ имеет место формула:*

$$d^nG(x,y)=\sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n\\ k_1,k_2,\dots,k_n\ge 0}} F^{(k_1+k_2+\dots+k_n)}(u)\cdot P_{k_1+k_2+\dots+k_n},$$

$$P_{k_1+k_2+\dots+k_n}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\left(\frac{du(x,y)}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{d^2u(x,y)}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{d^nu(x,y)}{n!}\right)^{k_n},$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным числам $k_1,k_2,\dots,k_n$, которые удовлетворяют диофантову уравнению $k_1+2k_2+\dots+nk_n=n$, $d^mu(x,y)$ — m-ый дифференциал функции $u(x,y)$, $F^{(m)}(u)$ — производная m-го порядка для функции $F(u)$, $m=1,\dots,n$.

Доказательство. Аналогично классическому случаю (теорема 3), находя n-ый дифференциал сложной функции $G(x,y)=F(u(x,y))$, получаем выражение вида

$$d^nG(x,y)=\sum_{k=1}^{n}B_{k,n}\cdot F^{(k)}(u(x,y)),$$

где $B_{k,n}$ — некоторые выражения, вид которых не зависит от конкретного задания функции $F(u(x,y))$.

Чтобы найти выражения $B_{k,n}$ считаем, что $F(u(x,y))$ и $u(x,y)$ — многочлены n-ой степени:

$$F(u)=F(u_0)+\frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}(u-u_0)+\dots+\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}(u-u_0)^n,$$

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)+\frac{du(x_0,y_0)}{1!}+\dots+\frac{d^nu(x_0,y_0)}{n!}.$$

Определим переменные: $z=u-u_0=u-u(x_0,y_0)$, $s=x-x_0$, $t=y-y_0$. Тогда

$$F(u)=F(u_0)+\frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}\cdot z+\dots+\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}\cdot z^n, \tag{5}$$

$$z=u-u_0=\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)u+\dots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)^n u. \tag{6}$$

Подставим в (5) вместо z правую часть (6):

$$G(x,y)=F(u_0)+\frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}\left(\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)u+\dots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)^n u\right)+\dots+ \tag{7}$$

$$+\dots+\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}\left(\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)u+\dots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)^n u\right)^n,$$

Многочлен $G(x,y)$ имеет степень n^2:

$$G(x,y)=G(x_0,y_0)+\frac{dG(x_0,y_0)}{1!}+\dots+\frac{d^nG(x_0,y_0)}{n!}+\dots+\frac{d^{n^2}G(x_0,y_0)}{(n^2)!}. \tag{8}$$

Затем, раскрывая скобки в (7) с помощью формулы полинома Ньютона (теорема 2), имеем

$$G(x,y) = F(u_0)+$$
$$+\frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}\sum_{k_1+\dots+k_n=1}\frac{1!}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)u\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)^n u\right)^{k_n}+$$
$$+\frac{F^{(2)}(u_0)}{2!}\sum_{k_1+\dots+k_n=2}\frac{2!}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)u\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)^n u\right)^{k_n}+$$
$$+\ldots+$$
$$+\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}\sum_{k_1+\dots+k_n=n}\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)u\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)^n u\right)^{k_n}.$$

Далее сравниваем последнюю формулу с формулой (8). Для того, чтобы порядок дифференциала функции $G(x,y)$ был равен n, необходимо выполнение равенства $k_1+\ldots+nk_n=n$, т.е.

$$\frac{d^nG(x_0,y_0)}{n!}=\left(\frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}\sum_{k_1+\dots+k_n=1}\frac{1!}{k_1!\cdots k_n!}+\ldots+\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}\sum_{k_1+\dots+k_n=n}\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)u\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial}{\partial y}\cdot t\right)^n u\right)^{k_n}.$$

Отсюда получаем

$$d^nG(x,y)=\sum_{k_1+\dots+nk_n=n}\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\cdot F^{(k_1+\dots+k_n)}\cdot\left(\frac{du(x,y)}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{d^2u(x,y)}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{d^nu(x,y)}{n!}\right)^{k_n},$$

что и требовалось доказать. □

Далее рассмотрим случай сложной функции вида $F(u(x),v(x))$ (приведен в [12]):

Теорема 6. *Пусть функция $F(u,v)$ имеет все частные производные до n-го порядка, а функции $u(x)$, $v(x)$ имеют все производные до n-го порядка. Тогда для n-ой производной сложной функции $F(u(x),v(x))$ имеет место формула:*

$$\frac{F^{(n)}}{n!}=\left(\sum_{\substack{k_1+2k_2++\ldots+nk_3=n\\ k_1,k_2,\ldots,k_m\geq 0}}\frac{A_1^{k_1}A_2^{k_2}\ldots A_n^{k_n}}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\right)F(u,v),$$

где

$$A_j=\frac{u_j}{j!}\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\frac{v_j}{j!}\cdot\frac{\partial}{\partial v},\quad u_j=\frac{\partial^j u(x)}{\partial x^j},\quad v_j=\frac{\partial^j v(x)}{\partial x^j},\quad j=\overline{1,n}.$$

Пример 8.

$$F^{(1)}=(A_1)F,\quad F^{(2)}=(2A_2+A_1^2)F,\quad F^{(3)}=(6A_3+6A_2A_1+A_1^3)F,$$
$$F^{(4)}=(24A_4+24A_3A_1+12A_2^2+12A_2A_1+A_1^4)F,$$

где

$$A_1=\frac{\partial u(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial v},\quad A_2=\frac{\partial^2 u(x)}{2\partial x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial^2 v(x)}{2\partial x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial v},$$
$$A_3=\frac{\partial^3 u(x)}{6\partial x^3}\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial^3 v(x)}{6\partial x^3}\cdot\frac{\partial}{\partial v},\quad A_4=\frac{\partial^4 u(x)}{24\partial x^4}\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial^4 v(x)}{24\partial x^4}\cdot\frac{\partial}{\partial v}.$$

Далее рассмотрим обобщение формулы Фаа Ди Бруно на случай сложной функции $F(\overline{u}(x))$, где $\overline{u}(x) = (u_1(x), ..., u_s(x))$ [3]:

Теорема 7. *Пусть $G(x) = F(\overline{u}(x))$, $\overline{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_s(x))$ — сложная функция и существуют все её частные производные до n-го порядка, а функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_s(x)$ имеют все производные до n-го порядка. Тогда для n-го дифференциала сложной функции $G(x)$ имеет место формула:*

$$d^n G(x) = \sum_n \sum_{k_1} \sum_{k_2} \cdots \sum_{k_n} \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} (i!)^{k_i} \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{s} a_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k F(\overline{u})}{\partial u_1^{p_1}\, \partial u_2^{p_2} \,\ldots\, \partial u_s^{p_s}} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}} \left(u_2^{(i)}\right)^{a_{i2}} \ldots \left(u_s^{(i)}\right)^{a_{is}},$$

где суммирование ведется по целочисленным решениям следующих диофантовых уравнений:

$$\sum_n \ : \ k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n,$$

$$\sum_{k_1} \ : \ a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1s} = k_1,$$

$$\sum_{k_2} \ : \ a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2s} = k_2,$$

$$\ldots$$

$$\sum_{k_n} \ : \ a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{ns} = k_n,$$

$d = \partial/\partial x$ — дифференциальный оператор, k — порядок промежуточной производной, p_j — порядок частной производной по u_j. Параметры k, k_j, p_j, a_{ij} связаны соотношениями:

$$p_j = a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj}, \quad j = \overline{1, s},$$

$$k = p_1 + p_2 + \ldots + p_s = k_1 + k_2 + \ldots + k_n.$$

Доказательство. Классическую формулу Фаа ди Бруно (теорема 3) можно переписать в следующем виде:

$$F_x^{(n)} = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \frac{n!(\partial_u u^{(1)})^{k_1} (\partial_u u^{(2)})^{k_2} \cdots (\partial_u u^{(n)})^{k_n} F(u)}{k_1! k_2! \cdots k_n! \, (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \cdots (n!)^{k_n}}.$$

Здесь $\partial_u = \partial/\partial u$ — дифференциальный оператор, $\partial_u^i = \partial^i/\partial u^i$, а с учетом $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ имеем $\partial^k/\partial u^k = \partial^k/\partial u^{k_1+k_2+\ldots+k_n}$.

Производные $F_x^{(i)}, i = 1, \ldots, n$ являются функциями с возрастающим числом аргументов:

$$F_x^{(1)} = F_x^{(1)}(u, u^{(1)}), F_x^{(2)} = F_x^{(2)}(u, u^{(1)}, u^{(2)}), \ldots, F_x^{(n)} = F_x^{(n)}(u, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}).$$

Найдем производные $F_x^{(i)}, i = 1, 2, 3, \ldots$, воспользовавшись формулой для первой производной сложной функции с произвольным числом аргументов:

$$F_x^{(1)} = (\partial_u u^{(1)}) F,$$

$$F_x^{(2)} = (\partial_u u^{(1)} + \partial_{u^{(1)}} u^{(2)}) F_x^{(1)} = [(\partial_u u^{(1)})^2 + \partial_u u^{(2)}] F,$$

$$F_x^{(3)} = (\partial_u u^{(1)} + \partial_{u^{(1)}} u^{(2)} + \partial_{u^{(2)}} u^{(3)}) F_x^{(2)} = [(\partial_u u^{(1)})^3 + 3\partial_u u^{(1)} \partial_u u^{(2)} + \partial_u u^{(3)}]F,$$

$$F_x^{(4)} = (\partial_u u^{(1)} + \partial_{u^{(1)}} u^{(2)} + \partial_{u^{(2)}} u^{(3)} + \partial_{u^{(3)}} u^{(4)}) F_x^{(3)} =$$

$$= [(\partial_u u^{(1)})^4 + 6(\partial_u u^{(1)})^2 \partial_u u^{(2)} + 4\partial_u u^{(1)} \partial_u u^{(3)} + 3(\partial_u u^{(2)})^2 + \partial_u u^{(4)}]F,$$

$$\vdots$$

Пусть теперь $\overline{u}(x)$ является s-мерным вектором

$$\overline{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), ..., u_s(x)),$$

соответственно

$$\partial_u = \frac{\partial}{\partial \overline{u}(x)} = \left[\frac{\partial}{\partial u_1(x)}, \frac{\partial}{\partial u_2(x)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_s(x)} \right]$$

— векторный дифференциальный оператор. Для сложной функции $F(\overline{u}(x))$ определены все необходимые производные. Производные $F_x^{(i)}, i = 1, 2, 3, \ldots$ получаем последовательным применением правила первой производной сложной функции с произвольным числом аргуметов, подставляя все предыдущие производные:

$$F_x^{(1)} = (\partial_u \overline{u}^{(1)})F,$$

$$F_x^{(2)} = (\partial_u \overline{u}^{(1)} + \partial_{\overline{u}^{(1)}} \overline{u}^{(2)}) F_x^{(1)} = [(\partial_u \overline{u}^{(1)})^2 + \partial_u \overline{u}^{(2)}]F,$$

$$F_x^{(3)} = (\partial_u \overline{u}^{(1)} + \partial_{\overline{u}^{(1)}} \overline{u}^{(2)} + \partial_{\overline{u}^{(2)}} \overline{u}^{(3)}) F_x^{(2)} = [(\partial_u \overline{u}^{(1)})^3 + 3\partial_u \overline{u}^{(1)} \partial_u \overline{u}^{(2)} + \partial_u \overline{u}^{(3)}]F,$$

$$F_x^{(4)} = (\partial_u \overline{u}^{(1)} + \partial_{\overline{u}^{(1)}} \overline{u}^{(2)} + \partial_{\overline{u}^{(2)}} \overline{u}^{(3)} + \partial_{\overline{u}^{(3)}} \overline{u}^{(4)}) F_x^{(3)} =$$

$$= [(\partial_u \overline{u}^{(1)})^4 + 6(\partial_u \overline{u}^{(1)})^2 \partial_u \overline{u}^{(2)} + 4\partial_u \overline{u}^{(1)} \partial_u \overline{u}^{(3)} + 3(\partial_u \overline{u}^{(2)})^2 + \partial_u \overline{u}^{(4)}]F,$$

$$\vdots$$

Последовательность вывода производных в классической формуле Фаа ди Бруно тождественна последовательности вывода производных в векторном случае. Они имеют одинаковую операторную форму, только в первом случае операторы скалярные, а во втором векторые. Поэтому их общую форму можно записать в следуюшем виде:

$$F_x^{(n)} = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \frac{n!(\partial_u \overline{u}^{(1)})^{k_1} (\partial_u \overline{u}^{(2)})^{k_2} \cdots (\partial_u \overline{u}^{(n)})^{k_n} F(\overline{u})}{k_1! k_2! \cdots k_n! \, (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \cdots (n!)^{k_n}}.$$

Данная формула является векторной формой n-ой производной сложной функции, частные производные и нелинейные функции $\overline{u}^{(i)}, i = 1, 2, \ldots, n$ явно не показаны. Чтобы получить явный вид формулы для n-ой производной сложной функции $F(\overline{u}(x))$ необходимо возвести полиномы $(\partial_u \overline{u}^{(i)})^{k_i}, i = 1, 2, \ldots, n$ в соответствующие степени, а затем перемножить их. Для i-го полинома, воспользовавшись формулой полинома Ньютона (теорема 2), имеем

$$\left(\partial_{u_1} u_1^{(i)} + \partial_{u_2} u_2^{(i)} + \cdots + \partial_{u_s} u_s^{(i)} \right)^{k_i} =$$

$$= \sum_{a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{is}=k_i} \frac{k_i!}{a_{i1}! a_{i2}! \cdots a_{is}!} \left(\partial_{u_1} u_1^{(i)} \right)^{a_{i1}} \left(\partial_{u_2} u_2^{(i)} \right)^{a_{i2}} \cdots \left(\partial_{u_s} u_s^{(i)} \right)^{a_{is}},$$

где суммирование ведется по всем неотрицательным решениям диофантова уравнения $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{is} = k_i$. Перемножив все n полинов, и введя обозначения

$$\sum_{k_1+2k_2+...+nk_n=n} \equiv \sum_n,$$
$$\sum_{a_{11}+a_{12}+...+a_{1s}=k_1} \equiv \sum_{k_1},$$
$$\sum_{a_{21}+a_{22}+...+a_{2s}=k_2} \equiv \sum_{k_2},$$
$$...$$
$$\sum_{a_{n1}+a_{n2}+...+a_{ns}=k_n} \equiv \sum_{k_n},$$

в результате получим

$$F_x^{(n)} = \sum_n \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!\,(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}\cdots(n!)^{k_n}} \quad \times$$

$$\times \quad \sum_{k_1} \frac{k_1!}{a_{11}!a_{12}!\cdots a_{1s}!} \cdot \frac{\partial^{k_1}F(\overline{u})}{\partial u_1^{a_{11}}\partial u_2^{a_{12}}\cdots\partial u_s^{a_{1s}}} \cdot \left(u_1^{(1)}\right)^{a_{11}} \left(u_2^{(1)}\right)^{a_{12}} \cdots \left(u_s^{(1)}\right)^{a_{1s}} \quad \times$$

$$\times \quad \sum_{k_2} \frac{k_2!}{a_{21}!a_{22}!\cdots a_{2s}!} \cdot \frac{\partial^{k_2}F(\overline{u})}{\partial u_1^{a_{21}}\partial u_2^{a_{22}}\cdots\partial u_s^{a_{2s}}} \cdot \left(u_1^{(2)}\right)^{a_{21}} \left(u_2^{(2)}\right)^{a_{22}} \cdots \left(u_s^{(2)}\right)^{a_{2s}} \quad \times$$

$$\times \quad \cdots \quad \times \quad \sum_{k_n} \frac{k_n!}{a_{n1}!a_{n2}!\cdots a_{ns}!} \cdot \frac{\partial^{k_n}F(\overline{u})}{\partial u_1^{a_{n1}}\partial u_2^{a_{n2}}\cdots\partial u_s^{a_{ns}}} \cdot \left(u_1^{(n)}\right)^{a_{n1}} \left(u_2^{(n)}\right)^{a_{n2}} \cdots \left(u_s^{(n)}\right)^{a_{ns}}.$$

Далее, положив $p_j = a_{1j} + a_{2j} + ... + a_{nj}$, $p_1 + p_2 + ... + p_s = k$, $j = 1, 2, \ldots, s$, имеем

$$F_x^{(n)} = \sum_n \sum_{k_1} \sum_{k_2} \cdots \sum_{k_n} \frac{n!k_1!k_2!\cdots k_n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!\,(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}\cdots(n!)^{k_n} a_{11}!a_{12}!\cdots a_{1s}!\cdots a_{n1}!a_{n2}!\cdots a_{ns}!} \times$$

$$\times \frac{\partial^k F(\overline{u})}{\partial u_1^{p_1}\partial u_2^{p_2}\cdots\partial u_s^{p_s}} \left(u_1^{(1)}\right)^{a_{11}} \left(u_2^{(1)}\right)^{a_{12}} \cdots \left(u_s^{(1)}\right)^{a_{1s}} \cdots \left(u_1^{(n)}\right)^{a_{n1}} \left(u_2^{(n)}\right)^{a_{n2}} \cdots \left(u_s^{(n)}\right)^{a_{ns}} =$$

$$= \sum_n \sum_{k_1} \sum_{k_2} \cdots \sum_{k_n} \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(i!)^{k_i} \cdot \prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{s} a_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k F(\overline{u})}{\partial u_1^{p_1}\ \partial u_2^{p_2}\ ...\ \partial u_s^{p_s}} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}} \left(u_2^{(i)}\right)^{a_{i2}} ... \left(u_s^{(i)}\right)^{a_{is}},$$

что и требовалось доказать. □

Пример 9.

$$F(u_1(x), u_2(x)) = e^{u_1(x)u_2(x)}.\ \textit{Найти}\ F^{(3)}.$$

$$F^{(3)}(u_1,u_2) = \sum_{3}\sum_{k_1}\sum_{k_2}\sum_{k_3} \frac{6}{\prod\limits_{i=1}^{3}(i!)^{k_i}\cdot\prod\limits_{i=1}^{3}\prod\limits_{j=1}^{2}a_{ij}!}\cdot\frac{\partial^k F}{\partial u_1^{p_1}\,\partial u_2^{p_2}}\prod_{i=1}^{3}\left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}}\left(u_2^{(i)}\right)^{a_{i2}},$$

$$\sum_{3}: k_1+2k_2+3k_3=3,\ \sum_{k_1}: a_{11}+a_{12}=k_1,\ \sum_{k_2}: a_{21}+a_{22}=k_2,\ \sum_{k_3}: a_{31}+a_{32}=k_3,$$

$$p_1 = a_{11}+a_{21}+a_{31},\ p_2=a_{12}+a_{22}+a_{32},\ p_1+p_2=k=k_1+k_2+k_3.$$

Подставляя значения параметров, получаем:

$$F^{(3)}(u_1,u_2) = e^{u_1u_2}\cdot[u_2^3\left(u_2^{(1)}\right)^3 + 3\left(2u_2+u_1u_2^2\right)\left(u_1^{(1)}\right)^2u_2^{(1)} + 3\left(2u_1+u_1^2u_2\right)u_1^{(1)}\left(u_2^{(1)}\right)^2 +$$

$$+u_1^3\left(u_2^{(1)}\right)^3 + 3u_2^2u_1^{(1)}u_1^{(2)} + 3(1+u_1u_2)(u_1^{(1)}u_2^{(2)}+u_1^{(2)}u_2^{(1)}) + u_2u_1^{(3)} + u_1u_2^{(3)}].$$

5. Заключение

Заметим, что формула Фаа Ди Бруно, ее модификации и обобщения очень полезны при изучении дифференциального исчисления функций в математическом анализе, а также при формировании комбинаторного мышления.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faá di Bruno F. Sullo sviluppo delle funzione // Annali di Scuenze Matematiche e Fisiche. 1855. 6. P. 479-480.

2. Faá di Bruno F. Note sur un nouvelle formulae de calcul differentiel // Quart. J. Math. 1857. 1. P. 359-360.

3. Mishkov R. L. Generalization of the formula of Faá di Bruno for a composite function with a vector argument // Internat. J. Math. & Math. Sci. 2000. Vol. 24, № 7. P. 481-491.

4. Roman S. The formula of Faá di Bruno // Amer. Math. Monthly. 1980. Vol. 87, №10. P. 805-809.

5. Дворянинов С. В., Сильванович М. И. О формуле Фаа ди Бруно для производных сложной функции // Математическое образование, 2009, 1 (49), 22-26.

6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2003. 640 с.

7. Bell E. T. Partition polynomials // Ann. Math. 1927. Vol. 29. P. 38-46.

8. Comtet L. Advanced Combinatorics. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974.

9. Johnson W. P. The curious history of Faá di Bruno's formula // Amer. Math. Monthly. 2002. Vol. 109. P. 217-234.

10. Чубариков В. Н. Обобщенная формула бинома Ньютона и формулы суммирования // Чебышевский сборник, 2020, 21, № 4. 270-301.

11. Constantine G. M., Savits T. H. A multivariate Faá di Bruno formula with applications // Trans. Amer. Math. Soc., 1996. vol. 348, № 2. P. 503-520.

12. Шабат А. Б, Эфендиев М. Х. О приложениях формулы Фаа-Ди-Бруно // Уфимский математический журнал, 2017, 9, № 3. 132–137.

13. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Учебное пособие. 14 издание, испр. — М.: Изд-во Московского университета, 1998. 624 с.

14. Frabetti A., Manchon D. Five interpretation of Faá di Bruno's formula, 2014, https://arxiv.org/pdf/1402.5551.pdf.

15. Craik A. D. D. Prehistory of Faá di Bruno's formula // Amer. Math. Monthly, 2005. vol. 112, № 2, P. 119–130.

16. Arbogast L. F. A. Du Calcul des Dérivations, Levrault, Strasbourg, 1800.

REFERENCES

1. Faá di Bruno F. 1855, "Sullo sviluppo delle funziones", *Annali di Scuenze Matematiche e Fisiche*, 6, pp. 479-480.

2. Faá di Bruno F. 1857, "Note sur un nouvelle formulae de calcul differentiel", *Quart. J. Math.*, 1, pp. 359-360.

3. Mishkov R. L. 2000, "Generalization of the formula of Faá di Bruno for a composite function with a vector argument", *Internat. J. Math., Math. Sci.*, vol. 24, no. 7, pp. 481-491.

4. Roman S. 1980, "The formula of Faá di Bruno", *Amer. Math. Monthly*, vol. 87, no. 10, pp. 805-809.

5. Dvoryaninov S. V., Silvanovich M. I. 2009, "On the Faá di Bruno formula for derivatives of a complex function", *Matematicheskoye obrazovaniye*, 1 (49), pp. 22-26.

6. Arhipov G. I., Chubarikov V. N., Sadovnichiy V. A. 2003, Lectures on mathematical analysis. M. — Drofa, pp. 640.

7. Bell E. T. 1927, "Partition polynomials", *Ann. Math.*, vol. 29, pp. 38-46.

8. Comtet L. 1974, Advanced Combinatorics. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht.

9. Johnson W. P. 2002, "The curious history of Faá di Bruno's formula", *Amer. Math. Monthly*, vol. 109, pp. 217-234.

10. Chubarikov V. N. 2020, "A generalized Binomial theorem and a summation formulas", *Chebyshevskii Sbornik*, 21 (4), pp. 270-301.

11. Constantine G. M., Savits T. H., 1996, "A multivariate Faá di Bruno formula with applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 348, no. 2, pp. 503-520.

12. Shabat A. B., Efendiev M. Kh., 2017, "Applications of the Faá di Bruno formula", *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal*, vol. 9, no. 3, pp. 132–137.

13. Demidovich B. P. 1998, Sbornik zadach i uprazhneniy po matematicheskomu analizu. Uchebnoye posobiye. 14 izdaniye, ispr. M. — Izd-vo Moskovskogo universiteta, pp. 624.

14. Frabetti A., Manchon D., 2014, “Five interpretation of Faá di Bruno’s formula”, https://arxiv.org/pdf/1402.5551.pdf.

15. Craik A.D.D., 2005, “Prehistory of Faá di Bruno’s formula”, *Amer. Math. Monthly*, vol. 112, no 2, pp. 119–130.

16. Arbogast L. F. A., 1800, “Du Calcul des Dérivations”, Levrault, Strasbourg.

Получено: 30.08.2023
Принято в печать: 21.12.2023