ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 5.

УДК 517.18 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-167-179

Про котангенс[1]

С. Ю. Соловьев

Соловьев Сергей Юрьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: soloviev@glossary.ru

Аннотация

В работе описывается прием рассуждений, позволяющий получать относительно простые оценки значений котангенса для углов из полуинтервала $(0,\, \pi/2\,]$. Прием базируется на способности котангенса уточнять некоторые свои оценки, ранее полученные из сторонних соображений. В качестве иллюстрации приема приводятся выводы оценок котангенса для двух подклассов дробно-рациональных функций.

Ключевые слова: котангенс, оценки, миноранты, мажоранты.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
С. Ю. Соловьев. Про котангенс // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 167–179.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 5.

UDC 517.18 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-167-179

About Cotangent

S. Y. Soloviev

Soloviev Sergey Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: soloviev@glossary.ru

Abstract

In this paper we describe a reasoning method which allows to get relatively simple estimates of cotangent values for angles in the half-interval $(0,\, \pi/2\,]$. The method is based on the ability of the cotangent to refine some of its estimates that were derived from other considerations. As an illustration of the method we give cotangent estimates for two subclasses of rational functions.

Keywords: cotangent, estimations, minorants, majorants.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
S. Y. Soloviev. 2023, “About Cotangent”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 167–179.

[1] Работа выполнена в МГУ имени М. В. Ломоносова (факультет ВМК)

1. Введение

Котангенс [1, 2] является нечетной периодической функцией с периодом π и вертикальными асимптотами 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$ и т.д. [3]. В пределах одного периода график котангенса – рисунок 1(a) – обладает осевой симметрией, другими словами, график котангенса состоит из различных повторений его фрагмента на полуинтервале $(0,\ \pi/2\,]$.

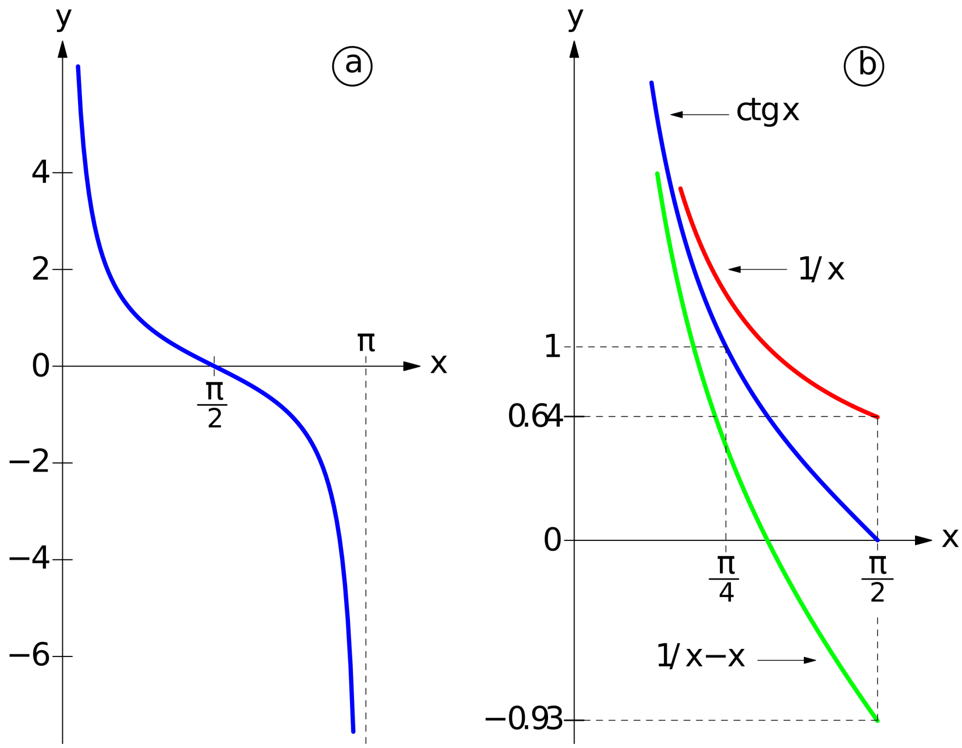

Рис. 1 (a) график котангенса на $(0,\ \pi\,)$; (b) иллюстрация двойной оценки (2).

По традиции котангенс считается лишь вспомогательной функцией, пребывающей в тени своего звездного кузена тангенса: $\mathrm{ctg}\ x\ =\ 1/\,\mathrm{tg}\ x$ и $\mathrm{ctg}\ x\ =\ -\,\mathrm{tg}(x{-}\pi/2)$. Вместе с тем котангенс обладает, по крайней мере, одним уникальным свойством, порождающим интересные формальные выводы. Речь идет о формуле котангенса двойного угла:

$$\mathrm{ctg}\ x\ =\ \frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}(x/2)-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathrm{ctg}(x/2)}\,. \tag{1}$$

Из курса школьной тригонометрии достаточно просто выводится (секция 10, упр. 1) неравенство

$$1/x-x\ <\ \mathrm{ctg}\ x\ <\ 1/x \qquad \text{для всех } x \text{ из } (0,\ \pi/2\,]\,. \tag{2}$$

В последующих рассуждениях формула (1) и неравенство (2) играют – вспомним Архимеда – роли рычага и точки опоры, а в роли Земли выступают оценки [4] котангенса (рисунок 2):

▷ двусторонняя оценка – неравенство вида $f(x) \leqslant \mathrm{ctg}\ x \leqslant F(x)$;
▷ оценка сверху – неравенство вида $\mathrm{ctg}\ x \leqslant F(x)$;
▷ оценка снизу – неравенство вида $f(x) \leqslant \mathrm{ctg}\ x$;
при этом
▷ функции $f(x)$ и $F(x)$ называются соответственно минорантой и мажорантой [5];
▷ будем говорить, что

⋗ миноранта $f(x)$ уточняет миноранту $f_1(x)$, если $f_1(x) \leqslant f(x)$;
⋗ мажоранта $F(x)$ уточняет мажоранту $F_1(x)$, если $F(x) \leqslant F_1(x)$.

$$\underbrace{\overbrace{f(x)}^{\text{миноранта}} \leqslant \mathrlap{\overbrace{\phantom{\operatorname{ctg} x \leqslant F(x)}}^{\text{оценка сверху}}}\operatorname{ctg} x}_{\text{оценка снизу}} \leqslant \underbrace{F(x)}_{\text{мажоранта}}$$

Рис. 2. Двусторонняя оценка котангенса

Соглашение. Везде далее будем полагать, что все миноранты удовлетворяют условию

$$0 < f(x/2),$$

(а) справедливому для всех x из $(0, \pi/2\,]$, (б) гарантирующему существование величин $1/f(x/2)$ и (в) проверяемому во всех рассматриваемых случаях без затруднений.

Обычно в двусторонних оценках миноранты и мажоранты принадлежат одному и тому же параметрическому классу функций и различаются лишь значениями параметра. Так, в двусторонней оценке (2) и миноранта, и мажоранта принадлежат классу функций $1/x - p\,x$, причем миноранте соответствует параметр $p = 1$, а мажоранте – параметр $p = 0$.

Для практических применений оценка (2) непригодна: в окрестности нуля миноранта и мажоранта от котангенса почти не отличаются, но в прочих областях – рисунок 1(b) – называть двойное неравенство оценкой – явное преувеличение. Приведем более точные оценки котангенса в упомянутом классе функций $1/x - p\,x$, а также в его "законном наследнике" – классе $1/x - x/(3 - t\,x^2)$. Заметим, что при всех числовых значениях параметров p и t, функции обоих классов относятся к семейству дробно-рациональных функций [4].

2. Основной прием трансформации оценок котангенса

Допустим для некоторых функций f и F имеет место оценка

$$f(x) \;\leqslant\; \operatorname{ctg} x \;\leqslant\; F(x) \qquad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2\,]. \tag{3}$$

В частности,

$$f(x/2) \;\leqslant\; \operatorname{ctg}(x/2) \;\leqslant\; F(x/2) \qquad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2\,], \tag{4}$$

или (с учетом принятого соглашения)

$$-\frac{1}{f(x/2)} \;\leqslant\; -\frac{1}{\operatorname{ctg}(x/2)} \;\leqslant\; -\frac{1}{F(x/2)} \qquad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2\,], \tag{5}$$

В результате суммирования-по-частям (с коэффициентами 0.5) оценок (4) и (5) получается двойное неравенство:

$$\frac{1}{2}\,f(x/2) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{f(x/2)} \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,\operatorname{ctg}(x/2) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\operatorname{ctg}(x/2)} \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,F(x/2) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{F(x/2)}$$

Формула котангенса удвоенного угла (1) позволяет трансформировать полученное неравенство в оценку котангенса:

$$\frac{1}{2}\,f(x/2) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{f(x/2)} \;\leqslant\; \operatorname{ctg} x \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,F(x/2) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{F(x/2)}\,.$$

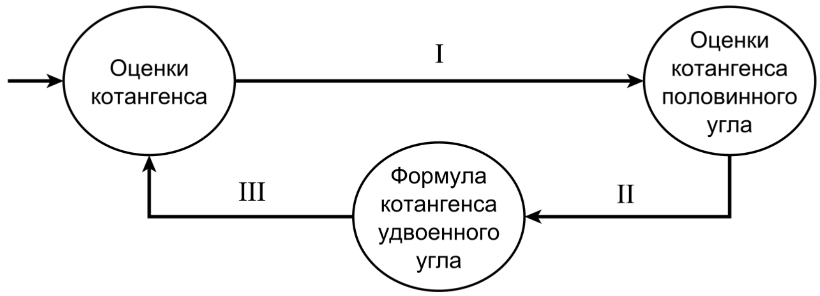

Рис. 3 Схема трансформации: (3) → (4)+(5) → (1) → (3′)

В окончательном виде последнюю оценку можно переписать в виде

$$\widehat{f}(x) \leqslant \operatorname{ctg} x \leqslant \widehat{F}(x) \qquad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2\,]; \tag{3'}$$

для случая новых миноранты и мажоранты:

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x/2) - \frac{1}{f(x/2)}\right) \quad \text{и} \quad \widehat{F}(x) = \frac{1}{2}\left(F(x/2) - \frac{1}{F(x/2)}\right).$$

Круг замкнулся: оценки (3) трансформированы в (3′), а схема трансформации зафиксирована на рисунке 3. В качестве примера приведем результат трансформации оценки (2):

$$\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4-x^2}\right) x \;<\; \operatorname{ctg} x \;<\; \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\,x \qquad \text{для всех } x \text{ из } (0, \pi/2]. \tag{2'}$$

Нетрудно установить, что новые варианты миноранты и мажоранты уточняют их исходные версии. Единственная возникающая при трансформации проблема, требующая индивидуального подхода, состоит в том, что вновь полученные мажоранты и миноранты могут выходить за пределы выбранного класса функций. В примере (2′) за пределы класса функций $1/x - p\,x$ выходит новая миноранта. Вместе с тем циклический характер трансформаций позволяет надеяться на возможность многократного уточнения оценок.

Определение 1. *Специальным преобразованием функции $g(x)$, определенной на $[0, \pi/2]$ и удовлетворяющей условию $g(x/2)\,x^2 \neq 4$, будем называть функцию*

$$g^{\#}(x) = \frac{1}{4}\left(g(x/2) + \frac{1}{1-(x/2)^2 g(x/2)}\right).$$

Примеры:

$$1^{\#} = \frac{1}{4}\,\frac{8-x^2}{4-x^2}\,, \qquad \left(\frac{1}{3-0.4\,x^2}\right)^{\#} = \frac{1}{4}\,\frac{24-1.9\,x^2+0.02\,x^4}{18-2.7\,x^2+0.07\,x^4}\,.$$

Специальное преобразование появляется в результате единичной трансформации минорант и мажорант вида $1/x - g(x)\,x$:

$$\text{ЕСЛИ} \quad \frac{1}{x} - f_+(x)\,x < \operatorname{ctg} x < \frac{1}{x} - F_+(x)\,x\,, \quad \text{ТО} \quad \frac{1}{x} - f_+^{\#}(x)\,x < \operatorname{ctg} x < \frac{1}{x} - F_+^{\#}(x)\,x\,.$$

3. Первое уточнение мажоранты

Из оценки (2) следует, что в классе функций $1/x - p\,x$,
▷ минорантами гарантированно являются все функции, для которых $p \geqslant 1$, поэтому
▷ любая мажоранта соответствует некоторому значению параметра $p < 1$, и
▷ известной мажоранте $1/x$ соответствует значение $p = 0$.

Допустим

$$\operatorname{ctg} x < 1/x - p\,x \qquad \text{для всех } x \text{ из } (0,\, \pi/2\,] \text{ и некоторого } p < 1. \tag{6}$$

Трансформация мажоранты приводит к оценке $\operatorname{ctg} x < 1/x - p^{\#}x$, а поскольку для всех x из $(0,\, \pi/2\,]$ справедливо неравенство

$$-p^{\#} = -\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{4 - p\,x^2}\right) < -\frac{p+1}{4},$$

то

$$\operatorname{ctg} x < \frac{1}{x} \;-\; \frac{p+1}{4}\,x, \qquad \text{причем} \quad \frac{p+1}{4} < 1\,.$$

Фактически повторилась ситуация (6) с точностью до константы $\widehat{p} = (p{+}1)/4$:

$$\operatorname{ctg} x < 1/x - \widehat{p}\,x \qquad \text{для всех } x \text{ из } (0,\, \pi/2\,] \text{ и числа } \widehat{p} < 1\,,$$

а значит приведенные в настоящей секции рассуждения можно повторить многократно. Результатом такого повторения является числовая последовательность $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, в которой $p_0 = 0$, $p_{n+1} = (p_n{+}1)/4$:

$$0,\; 0.25,\; 0.3125,\; 0.328125,\; 0.33203125,\; \ldots$$

Каждому члену p_n этой последовательности соответствует мажоранта $1/x - p_n\,x$, а поскольку последовательность $\{p_n\}$ монотонно возрастает (секция 10, упр. 2), то каждая последующая мажоранта уточняет предыдущую:

$$\frac{1}{x} \;>\; \frac{1}{x} - 0.25\,x \;>\; \frac{1}{x} - 0.3125\,x \;>\; \frac{1}{x} - 0.328125\,x \;>\; \cdots \;>\; \operatorname{ctg} x\,.$$

Пределом последовательности $\{p_n\}$ является число $1/3$, поэтому (секция 10, упр. 3а) уточнением мажоранты является функция $1/x - x/3$ и соответствующая оценка котангенса сверху имеет вид:

$$\operatorname{ctg} x \;\leqslant\; \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\,x \qquad \text{для всех } x \text{ из } (0,\, \pi/2\,]. \tag{7}$$

4. Первое уточнение миноранты

Во избежание накладок в рассуждениях о миноранте вместо параметра p будем использовать параметр q. Как следует из оценок (7) и (2) в классе функций $1/x - q\,x$
▷ мажорантами гарантированно являются все функции, для которых $q \leqslant 1/3$, поэтому
▷ любая миноранта соответствует некоторому значению параметра $q > 1/3$, и
▷ известной миноранте $1/x - x$ соответствует значение $q = 1$.

Зафиксируем некоторое число ω из полуинтервала $(0,\, \pi/2\,]$. В этом случае для любого x из $(0,\, \omega\,]$ оценка снизу из $(2')$ может быть преобразована к виду

$$\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4 - \omega^2}\right)x \;<\; \operatorname{ctg} x\,, \qquad \text{причем} \;\; \frac{1}{4} + \frac{1}{4 - \omega^2} \;>\; \frac{1}{3}\,.$$

Допустим

$$1/x - q\,x < \operatorname{ctg} x \qquad \text{для всех } x \text{ из } (0,\,\omega\,] \text{ и некоторого } q > 1/3\,. \tag{8}$$

Тогда

$$\operatorname{ctg} x > \frac{1}{x} - q^{\#}x = \frac{1}{x} - \left(\frac{q}{4} + \frac{1}{4-q\,x^2}\right) x \geqslant \frac{1}{x} - \left(\frac{q}{4} + \frac{1}{4-q\,\omega^2}\right) x\,,$$

а поскольку для всех x из $(0,\,\omega\,]$ имеет место (секция 10, упр. 4) неравенство

$$\widehat{q} \stackrel{def}{=} \frac{q}{4} + \frac{1}{4-q\,\omega^2} > \frac{1}{3}\,, \tag{9}$$

то фактически повторилась ситуация (8) с точностью до константы $\widehat{q}$:

$$1/x - \widehat{q}\,x < \operatorname{ctg} x \qquad \text{для всех } x \text{ из } (0,\,\omega\,] \text{ и числа } \widehat{q} > 1/3.$$

Приведенные в настоящем разделе рассуждения можно повторить многократно, трансформируя таким образом миноранту. Полученная последовательность трансформаций задает параметрическое семейство числовых последовательностей $\{q_n\}$:

$$q_0 = 1, \quad q_{n+1} = \frac{q_n}{4} + \frac{1}{4-q_n\omega^2}, \quad \text{где} \quad \omega \text{ - параметр.} \tag{10}$$

Приведем, округляя до тысячных, первые члены некоторых последовательностей этого семейства:

$$\begin{aligned}
\omega = \pi/2 &\;\Rightarrow\; q_n\colon 1,\ 0.902,\ 0.790,\ 0.685,\ 0.604,\ 0.549,\ 0.516,\ \ldots\\
\omega = \pi/4 &\;\Rightarrow\; q_n\colon 1,\ 0.546,\ 0.409,\ 0.369,\ 0.357,\ 0.354,\ 0.353,\ \ldots\\
\omega = \pi/8 &\;\Rightarrow\; q_n\colon 1,\ 0.510,\ 0.383,\ 0.349,\ 0.341,\ 0.339,\ 0.338,\ \ldots
\end{aligned}$$

При фиксированном значении параметра ω каждому члену последовательности $\{q_n\}$ соответствует миноранта $1/x - q_n\,x$, а поскольку последовательность $\{q_n\}$ монотонно убывает (секция 10, упр. 5), то каждая последующая миноранта уточняет предыдущую:

$$\frac{1}{x} - x \;<\; \frac{1}{x} - q_1\,x \;<\; \frac{1}{x} - q_2\,x \;<\; \frac{1}{x} - q_3\,x \;<\; \cdots \;<\; \operatorname{ctg} x\,.$$

Пределом последовательности $\{q_n\}$ является (секция 10, упр. 6) число $q_\omega = 2/(3+\sqrt{9-3\,\omega^2})$, поэтому (секция 10, упр. 3б) первым уточнением миноранты является функция $1/x - q_\omega\,x$, которой соответствует оценка котангенса снизу

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{3+\sqrt{9-3\,\omega^2}}\,x \;\leqslant\; \operatorname{ctg} x \qquad \text{для всех } x \text{ из } (0,\,\omega\,]\,.$$

Полученная оценка существенно зависит от верхней границы диапазона варьирования аргумента:

$$\begin{aligned}
&\text{если } \omega = \pi/2\,, \text{ т.е. } x \in (0,\pi/2\,]\,, \text{ то } 1/x - 0.470\,x \;\leqslant\; ctg\,x\,,\\
&\text{если } \omega = \pi/4\,, \text{ т.е. } x \in (0,\pi/4\,]\,, \text{ то } 1/x - 0.353\,x \;\leqslant\; ctg\,x\,,\\
&\text{если } \omega = \pi/8\,, \text{ т.е. } x \in (0,\pi/8\,]\,, \text{ то } 1/x - 0.338\,x \;\leqslant\; ctg\,x \text{ и т.д.}
\end{aligned} \tag{11}$$

5. Второе уточнение миноранты (часть 1)

Полученные оценки снизу отмечены печатью коллективизма: неравенство $1/x - q_\omega\, x \leqslant$ $\leqslant$ *ctg* x выполняется для *всех* чисел из $(0,\, \omega\,]$. Переход к индивидуальным оценкам связан с выходом за пределы класса функций вида $1/x - q\,x$.

Поскольку наилучшая оценка снизу в отдельно взятой точке x достигается при $\omega = x$, то

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{3+\sqrt{9-3\,x^2}}\, x \;\leqslant\; \operatorname{ctg}\, x\,.$$

В этом неравенстве в позиции числа q появилась функция $\lambda_0(x)$:

$$\lambda_0(x) \;\stackrel{def}{=}\; \frac{2}{3+\sqrt{9-3\,x^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x} - \lambda_0(x)\, x \;\leqslant\; \operatorname{ctg}\, x\,. \tag{12}$$

Трансформация оценки (12) порождает оценку:

$$\operatorname{ctg}\, x \;\geqslant\; \frac{1}{x} - \lambda_1(x)\, x, \qquad \text{где} \quad \lambda_1(x) \;\stackrel{def}{=}\; \lambda_0^{\#}(x) = qw\frac{\lambda_0(x/2)}{4} + \frac{1}{4{-}\lambda_0(x/2)\, x^2}\,.$$

Аналогичным образом (для всех $n \geqslant 2$) устанавливаются оценки

$$\operatorname{ctg}\, x \;\geqslant\; \frac{1}{x} - \lambda_n(x)\, x, \qquad \text{где} \quad \lambda_n(x) \;\stackrel{def}{=}\; \lambda_{n-1}^{\#}(x) = \frac{\lambda_{n-1}(x/2)}{4} + \frac{1}{4{-}\lambda_{n-1}(x/2)\, x^2}\,. \tag{13}$$

Результатом описанных трансформаций является последовательность функций $\{\lambda_n(x)\}$, члены которой определяются формулами (12) и (13). Для каждого фиксированного x числовая последовательность $\{\lambda_n(x)\}$ монотонно убывает и сходится (секция 10, упр. 7) к некоторому числу, обозначим его $\lambda(x)$. Таким образом, можно считать установленным факт существования функции $\lambda(x)$ – предела функциональной последовательности $\{\lambda_n(x)\}$. В свою очередь последовательность $\{\lambda_n(x)\}$ и ее предел порождают цепочку уточняющих оценок:

$$\frac{1}{x}{-}\lambda_0(x)\, x \;<\; \frac{1}{x}{-}\lambda_1(x)\, x \;<\; \frac{1}{x}{-}\lambda_2(x)\, x \;<\; \cdots \;<\; \frac{1}{x}{-}\lambda(x)\, x \;\leqslant\; \operatorname{ctg}\, x \tag{14}$$

Конкретный вид функции $\lambda(x)$ остается неизвестным, однако факт ее существования позволяет выявить достаточно простой класс функций для минорант и мажорант. С этой целью зафиксируем некоторое $n > 0$ и обозначим

$$a_i = \frac{\lambda_{n-i}(x/2^i)}{4^i}, \qquad i = 0, 1, \ldots n, \tag{15}$$

тогда (раскрывая первое слагаемое)

$$\lambda_n(x) = a_1 + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-a_1\, x^2} \;=\; a_2 + \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{4^i}\,\frac{1}{1-a_i x^2} \;= \cdots =\; a_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i}\,\frac{1}{1-a_i x^2}\,. \tag{16}$$

Из (11) и (12) следует, что $\lambda_0(x/2) < 0.36$ для всех x из $(0,\, \pi/2\,]$,

а поскольку (секция 10, упр. 8) $a_n \;<\; a_{n-1} \;<\; \cdots \;<\; a_1 \;=\; \lambda_{n-1}(x/2)/4 \;<\; \lambda_0(x/2)/4 \;<\; 0.09$, то

$$\lambda_n(x) \;<\; \frac{0.36}{4^n} + \frac{1}{1{-}0.09\, x^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i} \;<\; \frac{0.36}{4^n} + \frac{1}{3{-}0.27\, x^2}\,.$$

Следовательно, для функции $\lambda(x)$ как предела последовательности функций $\{\lambda_n(x)\}$ справедливо неравенство

$$\lambda(x) \leqslant \frac{1}{3-0.27\,x^2}\,, \tag{17}$$

которое с учетом цепочки (14), порождает оценку снизу:

$$\frac{1}{x} - \lambda(x)\,x \leqslant \operatorname{ctg} x \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{3-0.27\,x^2}\,x \leqslant \operatorname{ctg} x\,.$$

Полученная миноранта относится к классу функций $1/x-x/(3-t\,x^2)$. Константа 0.27 появился в миноранте в результате ряда огрублений, поэтому имеет смысл ее уточнить.

6. Свойства функций $(3-t\,x^2)^{-1}$

Утверждение 1. *Пусть $g(x)$ – функция, определенная на $[0,\pi/2]$, и пусть для некоторых чисел T и R из отрезка $[0.18, 0.27]$ и всех x из $[0,\pi/2]$ имеет место двойное неравенство*

$$(3-T\,x^2)^{-1} \leqslant g(x) \leqslant (3-R\,x^2)^{-1}, \tag{18}$$

тогда

$$(3-\widetilde{T}\,x^2)^{-1} \leqslant g^{\#}(x) \leqslant (3-\widetilde{R}\,x^2)^{-1},$$

где

$$\widetilde{T} = \frac{T+3}{16}\,, \qquad \widetilde{R} = 4\,\frac{48\,(R{+}3) - R(R{+}4)\,\pi^2}{3072 - 16\,(7R{+}1)\,\pi^2 + R^2\,\pi^4}\,. \tag{19}$$

Доказательство. Положим $h=(x/2)^2$ и применим прием из секции 2: во-первых, просуммируем-по-частям (с коэффициентом 0.25) две версии неравенства (18) и, во-вторых, используя определение специального преобразования, имеем:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3{-}Th} + \frac{1}{1-(3{-}Th)^{-1}h}\right) \leqslant g^{\#}(x) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3{-}Rh} + \frac{1}{1-(3{-}Rh)^{-1}h}\right).$$

В результате эквивалентных преобразований последнее неравенство сводится к виду:

$$\frac{1}{3{-}\theta(x,T)x^2} \leqslant g^{\#}(x) \leqslant \frac{1}{3{-}\theta(x,R)x^2}, \quad \text{где} \;\; \theta(x,u) = \frac{12(u{+}3){-}u(u{+}4)x^2}{192{-}4(7u{+}1)x^2{+}u^2x^4}\,. \tag{20}$$

Функция двух переменных $\theta(x,u)$
▷ определена в прямоугольнике $[0,\pi/2]\times[0.18, 0.27]$,
▷ порождает две функции: $\theta(0,u)$ и $\theta(\pi/2,u)$, и
▷ удовлетворяет двойному неравенству (секция 10, упр. 9):

$$\theta(0,u) \leqslant \theta(x,u) \leqslant \theta(\pi/2u) \tag{21}$$

Из (20) и (21) вытекает неравенство

$$(3{-}\theta(0,T)\,x^2)^{-1} \leqslant g^{\#}(x) \leqslant (3{-}\theta(\pi/2R)\,x^2)^{-1},$$

из которого, в свою очередь, извлекаются искомые выражения (19):

$$\widetilde{T} = \theta(0,T) \qquad \text{и} \qquad \widetilde{R} = \theta(\pi/2R).$$

□

Следствие 1. *Функция* $\theta(0,u)$ *на отрезке* $[0.18, 0.27]$ *имеет неподвижную точку* (секция 10, упр. 10)*, в которой уравнение* $t = \theta(0,t)$ *имеет единственное решение. Точным решением этого уравнения, обозначим его* t_∞*, является число* 0.2*, и любая последовательность* $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$*, в которой* $t_0 \in [0.18, 0.27]$ *и* $t_{n+1} = \theta(0, t_n)$*, сходится к* t_∞*.*

Следствие 2. *Функция* $\theta(\pi/2,u)$ *на отрезке* $[0.18, 0.27]$ *имеет неподвижную точку* (секция 10, упр. 10)*, в которой уравнение* $r = \theta(\pi/2, r)$ *имеет единственное решение. Решение этого уравнения сводится к нахождению меньшего корня*[2] *(обозначим его* r_∞*) уравнения* $\pi^4 r^3 - 108\,\pi^2 r^2 + 2880\,r - 576 = 0$*;* $r_\infty = 0.217097744\ldots$ *. Любая последовательность* $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$*, в которой* $r_0 \in [0.18, 0.27]$ *и* $r_{n+1} = \theta(\pi/2, r_n)$*, сходится к* r_∞ *.*

Заметим, что приведенные первые девять цифр дробной части иррационального числа r_∞ указаны точно.

7. Второе уточнение миноранты (часть 2)

Полученная в секции 5 оценка котангенса

$$1/x - g_0(x)\,x \;\leqslant\; \mathrm{ctg}\;x\,, \qquad \text{где} \quad g_0(x) = (3 - r_0\,x^2)^{-1} \text{ и } r_0 = 0.27\,,$$

в результате однократного применения основного приема трансформации (в части построения минорант) порождает оценку

$$1/x - g_0^{\#}(x)\,x \;\leqslant\; \mathrm{ctg}\;x$$

Функция $g_0(x)$ удовлетворяет условиям утверждения 1, поэтому

$$1/x - g_1(x)\,x \;\leqslant\; \mathrm{ctg}\;x\,, \qquad \text{где} \quad g_1(x) = (3 - r_1\,x^2)^{-1} \;\text{ и }\; r_1 = \theta(\pi/2, r_0).$$

Повторяя для вновь полученной оценки те же построения, имеем:

$$1/x - g_2(x)\,x \;\leqslant\; \mathrm{ctg}\;x\,, \qquad \text{где} \quad g_2(x) = (3 - r_2\,x^2)^{-1} \;\text{ и }\; r_2 = \theta(\pi/2, r_1) \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом, для любого q_n из последовательности $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$, описанной в следствии 2, имеет место неравенство

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{3 - r_n\,x^2}\,x \;\leqslant\; \mathrm{ctg}\;x\,,$$

а значит (секция 10, упр. 3б)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{3 - r_\infty\,x^2}\,x \;\leqslant\; \mathrm{ctg}\;x\,.$$

Для практических целей иррациональное число r_∞ следует округлять с избытком[3], в частности, на месте r_∞ могут использоваться константы 0.2171, 0.217098 и др.

[2] искомый корень локализован на отрезке $[0,1]$, что позволяет найти его методом дихотомии [6] с точностью, ограниченной лишь разрядностью мантиссы

[3] равно “округлять с усилением“ [7]

8. Второе уточнение мажоранты

Оценка котангенса (7) вида $1/x - x/3 \leqslant \operatorname{ctg} x$ в результате однократной трансформации порождает неравенство

$$\operatorname{ctg} x \ \leqslant\ \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\#} x.$$

Как нетрудно убедиться,

$$-\left(\frac{1}{3}\right)^{\#} = -\frac{1}{12}\,\frac{48-x^2}{12-x^2} \leqslant -\frac{1}{3-0.1875\,x^2} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{ctg} x \ \leqslant\ \frac{1}{x} - \frac{1}{3-0.1875\,x^2}\,x\,.$$

Полученная мажоранта принадлежит тому же классу $1/x - x/(3 - t\,x^2)$, что и уточненная миноранта. Использованная в секции 7 схема рассуждений (с очевидными модификациями) продуцирует множество оценок

$$\operatorname{ctg} x \ \leqslant\ \frac{1}{x} - \frac{1}{3-t_n\,x^2}\,x\,,$$

где $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность, описанная в следствии 1, в которой $t_0 = 0.1875$, а значит

$$\operatorname{ctg} x \ \leqslant\ \frac{1}{x} - \frac{1}{3-t_\infty\,x^2}\,x \ =\ \frac{1}{x} - \frac{1}{3-0.2\,x^2}\,x\,.$$

9. Заключение

Описанный прием трансформации оценок котангенса позволил установить два двойных неравенства, справедливых для любой пары чисел x и ω, удовлетворяющих соотношениям $0 < x \leqslant \omega \leqslant \pi/2$:

$$\frac{1}{x} - q_\omega\,x \ \leqslant\ \operatorname{ctg} x \ \leqslant\ \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\,x\,, \qquad \text{где} \ \ q_\omega = \frac{2}{3+\sqrt{9-3\,\omega^2}}\,, \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{3-r_\infty\,x^2}\,x \ \leqslant\ \operatorname{ctg} x \ \leqslant\ \frac{1}{x} - \frac{1}{3-0.2\,x^2}\,x\,, \qquad \text{где} \ \ r_\infty = 0.217097744\ldots\,.$$

Для сравнения этих двусторонних оценок можно, например, использовать отклонения от точного значения в точке $\pi/2$, то есть значения минорант и мажорант в этой точке. Для первой оценки (при $\omega = \pi/2$) соответствующие числа есть -0.100 и $+0.113$, а для второй (при $r_\infty = 0.2171$) – числа -0.0008 и $+0.0099$.

Поскольку

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{3+\sqrt{9-3\,\omega^2}}\,x \ \leqslant\ \frac{1}{x} - \frac{1}{3-r_\infty\,\omega^2}\,x \ \leqslant\ \frac{1}{x} - \frac{1}{3-r_\infty\,x^2}\,x\,,$$

то первая их приведенных оценок допускает следующее уточнение:

$$\frac{1}{x} - q'_\omega\,x \ \leqslant\ \operatorname{ctg} x \ \leqslant\ \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\,x\,, \qquad \text{где} \quad q'_\omega = \frac{1}{3-r_\infty\,\omega^2}\,,$$

для справки: $q'_\omega \approx 0.40579$ при $\omega = \pi/2$.

На полуинтервале $(0, \pi/2]$ котангенс не может принимать отрицательные значения. Учесть это обстоятельство можно за счет привлечения очевидного неравенства $\pi/2 - x \leqslant \operatorname{ctg} x$. При этом миноранта, скажем, $1/x - q'_\omega\,x$, преобразуется к виду

$$\min\left(\pi/2 - x,\ 1/x - q'_\omega\,x\right)\ .$$

10. Математический инструментарий

В этой секции собраны вспомогательные утверждения, задействованные в основных рассуждениях и сформулированные как упражнения для начинающих математиков.

Упражнение 1. Докажите неравенство (2). (*Указание.* Рассмотрите случаи $x \in (0, \pi/2)$ и $x = \pi/2$, а также воспользуйтесь выводом

$$\operatorname{ctg} x \;=\; \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} \;\geqslant\; \frac{1-\sin^2 x}{\sin x} \;=\; \frac{1}{\sin x} - \sin x\,,$$

а также неравенствами $\sin x < x$ и $x < \operatorname{tg} x$ – примеры 1.3 и 2.5 из [1].)

Упражнение 2. Докажите, что рекурсивная [8, 9] последовательность $\{p_n\}$, в которой $p_0 = 0,\ p_{n+1} = p_n/4 + 1/4$, является ограниченной, монотонно возрастающей и сходится к 1/3. (*Указание.* Предварительно докажите равенство $p_n = 1/3 - 4^{-n}/3$.)

Упражнение 3. Пусть последовательность $\{\gamma_n\}$ сходится к числу γ. Докажите, что
(а) если для любого n выполняется условие $\gamma_n \geqslant A$, то $\gamma \geqslant A$;
(б) если для любого n выполняется условие $\gamma_n \leqslant A$, то $\gamma \leqslant A$.

Упражнение 4. Докажите неравенство (9). (*Указание.* Учтите, что $3 > 4 - 3q$ и $4 \geqslant 4 - q\omega^2$.)

Упражнение 5. Пусть ω – число из $(0, \pi/2]$, и $\{q_n\}$ – последовательность, члены которой определяются формулами (10). Докажите, что последовательность $\{q_n\}$ монотонно убывает. (*Указание.* Используйте метод математической индукции [10, 11].)

Упражнение 6*. Докажите, что пределом последовательности $\{q_n\}$, члены которой определяются формулами (10), является число

$$\beta \;=\; 2/(3+\sqrt{9-3\,\omega^2}).$$

(*Указание.* Докажите существование числа $h < 1$ такого, что для любого значения параметра ω имеет место представление $c_n = \beta + \delta_n$ причеи $\delta_n < h^n$, а число β есть корень уравнения $z = z/4 + 1/(4 - z\,\omega^2)$. *Подсказка:* $h \approx 0.85$.)

Упражнение 7. Пусть $\{\lambda_n(x)\}$ – последовательность функций $\{\lambda_n(x)\}$, члены которой определяются формулами (12) и (13). Докажите, что при каждом фиксированном x из полуинтервала $(0, \pi/2]$ последовательность $\{\lambda_n(x)\}$ является монотонно убывающей и ограниченной: $1/3 \leqslant \lambda_n(x) < 1$. (*Указание.* Используйте метод математической индукции.)

Упражнение 8. Докажите справедливость неравенства $a_{k+1} < a_k$ для любых целых $0 < k < n$ и величин a_i, определенных формулами (15).

Упражнение 9. Докажите, что функция $\theta(x, u)$, заданная в (20) и определенная на множестве $[0, \pi/2]\times[0.18, 0.27]$, монотонно возрастает по x при каждом фиксированном u. (*Указание.* Воспользуйтесь методикой отыскания участков монотонности дифференцируемой функции [12].)

Упражнение 10. Докажите существование неподвижных точек у функций $\theta(0, u)$ и $\theta(\pi/2, u)$, определенных в секции 6. (*Указание.* Воспользуйтесь определением неподвижной точки [13, 14] и докажите, что обе функции удовлетворяют условиям Липшица [15] с константой меньшей единицы.)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л. Тригонометрия. – М.: МЦНМО, 2008. – 199 с.

2. Gelfand I. M., Saul M. Trigonometry. – Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2001. – 229 с.

3. Гурский И. П. Функции и построение графиков. – М.: Просвещение, 1968. – 215 с.
4. Каазик Ю. А. Математический словарь. – М.: Физматлит, 2007. – 336 с.
5. Математическая энциклопедия, том 3 / Глав.ред. И. М.Виноградов. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – 592 с.
6. Шарый С. П. Курс вычислительных методов. – Новосибирск: НГУ, 2022. – 668 с.
7. Брадис В. М. Теория и практика вычислений. – М.: Учпедгиз, 1935. – 280 с.
8. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. – М.: Наука, 1975. – 48 с.
9. Головешкин В. А., Ульянов М. В. Теория рекурсии для программистов. – М.: Физматлит, 2006. – 296 с.
10. Соминский И. С. Метод математической индукции. – М.: Физматлит, 1967. – 64 с.
11. Gunderson D. S. Handbook of mathematical induction: Theory and applications. – Boca Ratton, FL: CRC Press, 2011. – 893 с.
12. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа (часть I). – М.: Физматлит, 2005. – 648 с.
13. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.
14. Треногин В. А. Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
15. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, том 2. – М.: Юрайт, 2022. – 720 с.

REFERENCES

1. Gelfand, I. M., Lvovsky, S. M. & Toom, A. L. 2008, *Trigonometry*, MCCME, Moscow, 199 p. (in Russian)
2. Gelfand, I. M., Saul M. 2001, *Trigonometry*, Birkhäuser, Boston, MA, 229 p.
3. Gursky, I. P. 1968, *Functions and graphs build*, Prosveschenie, Moscow, 215 p. (in Russian)
4. Kaazik, Y. A. 2007, *Mathematical dictionary*, Fizmatlit, Moscow, 336 p. (in Russian)
5. Vinogradov, I. M. (ed.) 1982, *Encyclopedia of mathematics*, Sov.Entsiklopediya, Moscow, 592 p. (in Russian)
6. Shary, S. P. 2022, *Course of computational methods*, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 668 p. (in Russian)
7. Bradis, V. M. 1935, *Theory and practice of computing*, UchPegGiz, Moscow, 280 p. (in Russian)
8. Markushevich, A. I. 1975, *Recursion sequences*, Mir Publishers, Moscow, 48 p. (in Russian)
9. Goloveshkin, V. A., Ulyanov, M. V. 2006, *Recursion theory for programmers*, Fizmatlit, Moscow, 296 p. (in Russian)
10. Sominsky, I. S. 1975 *The Method of Mathematical Induction*, Mir Publishers, Moscow, 63 p. (in Russian)

11. Gunderson, D. S. 2011 *Handbook of mathematical induction: Theory and applications*, CRC Press, Boca Ratton, FL, 893 p.

12. Ilyin, V. A., Poznyak, E. G. 2005, *Basics of Mathematical Analysis (part 1)*, Fizmatlit, Moscow, 648 p. (in Russian)

13. Tikhonov, A. N., Vasil'eva, A. B., Sveshnikov, A. G. 1985, *Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 256 p.

14. Trenogin, V. A. 2002, *The Functional Analysis*, Fizmatlit, Moscow, 488 p. (in Russian)

15. Kudriavtsev, L. D. 2022, *Course of Mathematical Analysis, vol. 2*, Iurait Publ., Moscow, 720 p. (in Russian)

Получено: 06.07.2022
Принято в печать: 21.12.2023