ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 5.

УДК 514.76 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-153-166

Приближенно транссасакиевые почти $C(\lambda)$-многообразия

А. Р. Рустанов, Г. В. Теплякова, С. В. Харионова

Рустанов Алигаджи Рабаданович — кандидат физико-математических наук, Институт цифровых технологий и моделирования в строительстве; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (г. Москва).
e-mail: aligadzhi@yandex.ru
Теплякова Галина Васильевна — кандидат педагогических наук, Институт математики и цифровых технологий, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: galinka-78@list.ru
Харитонова Светлана Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и цифровых технологий, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: hcb@yandex.ru

Аннотация

В работе рассматриваются приближенно транссасакиевые многообразия, являющиеся почти $C(\lambda)$-многообразиями. На пространстве присоединенной G-структуры получены компоненты тензора римановой кривизны, тензора Риччи приближенно транссасакиевых многообразий и почти $C(\lambda)$-многообразий. Получено тождество, которому удовлетворяет тензор Риччи приближенно транссасакиевых многообразий. Доказано, что Риччи-плоское почти $C(\lambda)$-многообразие локально эквивалентно произведению Риччи-плоского келерова многообразия на вещественную прямую. Получены тождества, которым удовлетворяет тензор Риччи почти $C(\lambda)$-многообразия. Доказано, что кривизна Риччи почти $C(\lambda)$-многообразия в направлении структурного вектора равна нулю тогда и только тогда, когда оно является косимплектическим, а значит локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Получено тождество, которому удовлетворяет тензор римановой кривизны приближенно транссасакиевого многообразия, являющегося почти $C(\lambda)$-многообразием. Доказано, что для приближенно транссасакиевого многообразия M следующие условия эквивалентны: 1) многообразие M является почти $C(\lambda)$-многообразием; 2) многообразие M является точнейше косимплектическим многообразием; 3) многообразие M локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. В случае, когда многообразие M является транссасакиевым почти $C(\lambda)$-многообразием, многообразие M является косимплектическим, а значит, локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Для NTS-многообразия размерности больше трех, являющегося почти $C(\lambda)$-многообразием, из точечного постоянства Ф-голоморфной секционной кривизны следует глобальное постоянство. Получена полная классификация таких многообразий.

Ключевые слова: приближенно транссасакиево многообразие, почти $C(\lambda)$-многообразие, многообразие Кенмоцу, косимплектическое многообразие, многообразие Сасаки.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
А. Р. Рустанов, Г. В. Теплякова, С. В. Харитонова. Приближенно транссасакиевые почти $C(\lambda)$-многообразия // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 153–166.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 514.76 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-153-166

Nearly trans-Sasakian almost $C(\lambda)$-manifolds

A. R. Rustanov, G. V. Teplyakova, S. V. Kharitonova

Rustanov Aligadzhi Rabadanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Institute of Digital Technologies and Modeling in Construction; Moscow State University of Civil Engineering (Moscow).
e-mail: aligadzhi@yandex.ru

Teplyakova Galina Vasilyevna — candidate of pedagogical sciences, Institute of Mathematics and Digital Technologies; Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: galinka-78@list.ru

Kharitonova Svetlana Vladimirovna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Institute of Mathematics and Digital Technologies; Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: hcb@yandex.ru

Abstract

The nearly trans-Sasakian manifolds, which are almost $C(\lambda)$-manifolds, are considered. On the space of the adjoint G-structure, the components of the Riemannian curvature tensor, the Ricci tensor of the nearly trans-Sasakian manifolds, and the almost $C(\lambda)$-manifolds are obtained. Identities are obtained that are satisfied by the Ricci tensor of nearly trans-Sasakian manifolds. It is proved that a Ricci-flat almost $C(\lambda)$-manifold is locally equivalent to the product of a Ricci-flat Kähler manifold and a real line. Identities are obtained that are satisfied by the Ricci tensor of an almost $C(\lambda)$-manifold. It is proved that the Ricci curvature of an almost $C(\lambda)$-manifold in the direction of the structure vector is equal to zero if and only if it is cosymplectic, and hence locally equivalent to the product of a Kähler manifold and a real line. An identity is obtained that is satisfied by the Riemannian curvature tensor of a nearly trans-Sasakian manifold, which is an almost $C(\lambda)$-manifold. It is proved that for a nearly trans-Sasakian manifold M the following conditions are equivalent: 1) the manifold M is an almost $C(\lambda)$-manifold; 2) the manifold M is a closely cosymplectic manifold; 3) the manifold M is locally equivalent to the product of a nearly Kähler manifold and the real line. In the case when the manifold M is a trans-Sasakian almost $C(\lambda)$-manifold, the manifold M is cosymplectic, and hence locally equivalent to the product of a Kähler manifold and a real line. For an NTS-manifold of dimension greater than three, which is almost a $C(\lambda)$-manifold, the pointwise constancy of the Φ-holomorphic sectional curvature implies global constancy. A complete classification of such manifolds is obtained.

Keywords: nearly trans-Sasakian manifold, almost $C(\lambda)$-manifold, Kenmotsu manifold, cosymplectic manifold, Sasakian manifold.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

A. R. Rustanov, G. V. Teplyakova, S. V. Kharitonova, 2023, "Nearly trans-Sasakian almost $C(\lambda)$-manifolds", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 153–166.

1. Введение

Понятие почти $C(\lambda)$-многообразий было введено Д. Янссеном и Л. Ванхеке [1]. Авторы определили такие многообразия некоторым условием на тензор кривизны Римана-Кристоффеля. Д. Янссен и Л. Ванхеке показали, что примерами почти $C(\lambda)$-многообразий являются сасакиевые и косимплектические многообразия, а также многообразия Кенмоцу.

Далее, в работе З. Ольчека и Р. Роска [2], почти $C(\lambda)$-многообразия появляются как подкласс локально конформно почти косимплектических многообразий. Авторы исследуют $C(\lambda)$-многообразия постоянной кривизны.

С. В. Харитонова [3] изучала конформно плоские почти $C(\lambda)$-многообразия. В частности, получено необходимое и достаточное условие того, что почти контактное метрическое многообразие является почти $C(\lambda)$-многообразием. Доказано, что на почти $C(\lambda)$-многообразиях выполняются контактные аналоги второго и третьего тождеств кривизны А. Грея, причём аналог первого тождества Грея выполняется тогда и только тогда, когда многообразие является косимплектическим. Доказано, что конформно плоское почти $C(\lambda)$-многообразие является многообразием постоянной кривизны λ.

В работах [4]–[16] геометры изучали различные аспекты геометрии почти $C(\lambda)$-многообразий.

Интерес исследователей к изучению геометрии почти $C(\lambda)$-многообразий объясняется тем, что эти многообразия являются обобщением косимплектических, Кенмоцу и сасакиевых многообразий. Геометрия приближенно транссасакиевых многообразий, являющихся почти $C(\lambda)$-многообразиями, богаче, чем геометрия почти $C(\lambda)$-многообразий или приближенно транссакиевых многообразий. В данной работе мы изучаем приближенно транссасакиевые почти $C(\lambda)$-многообразия.

Статья имеет следующую структуру. В параграфе 2 мы даем определение приближенно транссасакиевой структуры и приводим некоторые свойства этих структур. Получены существенные ненулевые компоненты тензора римановой кривизны приближенно транссасакиевого многообразия на пространстве присоединенной G-структуры. Получены компоненты тензора Риччи на пространстве присоединенной G-структуры и некоторые тождества тензора Риччи приближенно транссасакиева многообразия.

В параграфе 3 исследуем приближенно транссасакиевы многообразия, являющиеся почти $C(\lambda)$-многообразиями. В частности, получено тождество, которому удовлетворяет тензор римановой кривизны приближенно транссасакиева многообразия, являющегося почти $C(\lambda)$-многообразием, а также доказано, что кривизна Риччи почти $C(\lambda)$-многообразия M в направлении структурного вектора равна нулю тогда и только тогда, когда многообразие M косимплектическое, а значит локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Исследуются вопросы постоянства Ф-голоморфной секционной кривизны приближенно транссасакиева многообразия, являющегося почти $C(\lambda)$-многообразием.

2. Приближенно транссасакиевые многообразия

Пусть M – гладкое многообразие, $dimM = 2n+1$; $\mathcal{X}(M)$ – $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на многообразии M; d – оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Определение 1. *[17, 18]. Почти контактной структурой на многообразии M называется тройка (η, ξ, Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η – дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры, ξ – векторное поле, называемое характеристическим, Φ – эндоморфизм модуля $\mathcal{X}(M)$, называемый структурным эндоморфизмом.*

При этом:

$$\eta(\xi)=1;\quad \eta\circ\Phi=0;\quad \Phi(\xi)=0;\quad \Phi^2=-id+\eta\otimes\xi.$$

Если, кроме того, на M фиксирована риманова структура $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$, такая, что

$$\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y);\quad X,Y\in\mathcal{X}(M), \tag{1}$$

то четверка (η,ξ,Φ,g) называется почти контактной метрической (короче, АС-) структурой.

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим (короче, АС-) многообразием.

На протяжении всей работы будем подразумевать, что индексы i, j, k, ... пробегают значения от 0 до $2n$, а индексы a, b, c, ... – значения от 1 до n, и положим $\hat{a}=a+n$, $\hat{\hat{a}}=a$, $\hat{0}=0$.

Определение 2. *[19]. АС-структура называется приближенно транссасакиевой (короче, NTS-) структурой, если ее линейное расширение принадлежит классу $W_1\oplus W_4$ почти эрмитовых структур в классификации Грея-Хервеллы [20].*

АС-многообразие, снабженное NTS-структурой, называется NTS-многообразием.

Полная группа структурных уравнений NTS-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид [19]:

$$\begin{gathered}
1)\ d\theta^a=-\theta^a_b\wedge\theta^b+C^{abc}\theta_b\wedge\theta_c-\tfrac{\beta^0}{\sqrt{2}}\theta\wedge\theta^a;\\
2)\ d\theta_a=\theta^b_a\wedge\theta_b+C_{abc}\theta^b\wedge\theta^c-\tfrac{\beta_0}{\sqrt{2}}\theta\wedge\theta_a;\\
3)\ d\theta=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0-\beta_0)\delta^b_a\theta^a\wedge\theta_b;\\
4)\ d\theta^a_b+\theta^a_c\wedge\theta^c_b=(A^{ad}_{bc}-2C^{adh}C_{hbc}+\tfrac{1}{2}\beta^0(\beta^0-\beta_0)\delta^a_{[b}\delta^d_{c]})\theta^c\wedge\theta_d,
\end{gathered}\tag{2}$$

где

$$\begin{gathered}
1)\ C^{[abc]}=C^{abc};\quad 2)\ C_{[abc]}=C_{abc};\quad 3)\ A^{ad}_{[bc]}=0;\\
4)\ A^{[bd]}_{ac}=-\tfrac{1}{2}\left\{(\beta^0)^2-(\beta_0)^2\right\}\delta^{[b}_a\delta^{d]}_c;\\
5)\ \overline{A^{ad}_{bc}}=A^{bc}_{ad}+\tfrac{1}{2}\left\{(\beta^0)^2-(\beta_0)^2\right\}\delta^{[b}_a\delta^{c]}_d.
\end{gathered}\tag{3}$$

Кроме того,

$$\begin{gathered}
1)\ dC^{abc}+C^{dbc}\theta^a_d+C^{adc}\theta^b_d+C^{abd}\theta^c_d=C^{abcd}\theta_d+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta^0C^{abc}\theta;\\
2)\ dC_{abc}-C_{dbc}\theta^d_a-C_{adc}\theta^d_b-C_{abd}\theta^d_c=C_{abcd}\theta^d+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_0C_{abc}\theta;\\
3)\ d\beta^0=\beta^{00}\theta;\\
4)\ d\beta_0=\beta_{00}\theta,
\end{gathered}\tag{4}$$

где C^{abcd}, C_{abcd}, ${C^{abc}}_d$, ${C_{abc}}^d$, β^{00}, β_{00} – подходящие функции на пространстве присоединенной G-структуры, причем,

$$\begin{gathered}
1)\ (\beta^0-\beta_0)C_{abc}=0;\\
2)\ (\beta^0-\beta_0)C^{abc}=0;\\
3)\ (\beta^{00}-\beta_{00})=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\beta^0)^2-(\beta_0)^2\right\};\\
4)\ C^{a[bcd]}=0;\\
5)\ C_{a[bcd]}=0.
\end{gathered}\tag{5}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (2:4), получим:

$$dA^{ad}_{bc} + A^{hd}_{bc}\theta^a_h + A^{ah}_{bc}\theta^d_h - A^{ad}_{hc}\theta^h_b - A^{ad}_{bh}\theta^h_c = A^{ad}_{bch}\theta^h + A^{adh}_{bc}\theta_h + A^{ad}_{bc0}\theta, \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} 1)\ A^{ad}_{b[ch]} = A^{a[dh]}_{bc} = 0; \\ 2)\ (A^{a[d}_{bc} - 2C^{a[d|h}C_{hbc})C^{c|fg]} = 0; \\ 3)\ (A^{ad}_{b[c} - 2C^{adf}C_{fb[c})C_{|d|hg]} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Дифференцируя внешним образом (4:1), получим:

$$dC^{abcd} + C^{hbcd}\theta^a_h + C^{abcd}\theta^d_h + C^{abhd}\theta^c_h + C^{abch}\theta^d_h = C^{abcdh}\theta_h + \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0 - \beta_0)C^{abcd}\theta, \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered} 1)\ C^{abc[dh]} = 0; \\ 2)\ C^{abcg}C_{gdh} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Напомним, что тензорные компоненты формы римановой связности на пространстве присоединенной G-структуры имеют вид [17, 18]:

$$\begin{gathered} 1)\ \theta^a_{\hat{b}} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},i}\theta^i; \\ 2)\ \theta^{\hat{a}}_b = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,i}\theta^i; \\ 3)\ \theta^a_0 = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,i}\theta^i; \\ 4)\ \theta^{\hat{a}}_0 = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,i}\theta^i; \\ 5)\ \theta^0_a = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,i}\theta^i; \\ 6)\ \theta^0_{\hat{a}} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},i}\theta^i; \\ 7)\ \theta^0_0 = 0; \\ 8)\ \theta^i_j + \theta^{\hat{j}}_{\hat{i}} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

С учетом следствия 3.5 из [19], соотношения (10) на пространстве присоединенной G-структуры перепишутся в форме:

$$\begin{gathered} 1)\ \theta^a_{\hat{b}} = C^{abc}\theta_c; \\ 2)\ \theta^{\hat{a}}_b = C_{abc}\theta^c; \\ 3)\ \theta^a_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta^0\delta^a_b\theta^b; \\ 4)\ \theta^{\hat{a}}_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_0\delta^b_a\theta_b; \\ 5)\ \theta^0_a = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_0\delta^b_a\theta_b; \\ 6)\ \theta^0_{\hat{a}} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta^0\delta^a_b\theta^b; \\ 7)\ \theta^0_0 = 0; \\ 8)\ \theta^i_j + \theta^{\hat{j}}_{\hat{i}} = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Дифференцируя внешним образом (11), получим:

$$
\begin{gathered}
1)\ d\theta^a_{\hat{b}} = -C^{dbc}\theta^a_d \wedge \theta_c - C^{adc}\theta^b_d \wedge \theta_c + C^{abh}C_{hcd}\theta^c \wedge \theta^d - C^{ab[cd]}\theta_c \wedge \theta_d;\\
2)\ d\theta^{\hat{a}}_b = C_{dbc}\theta^d_a \wedge \theta^c + C_{adc}\theta^d_b \wedge \theta^c - C_{ab[cd]}\theta^c \wedge \theta^d + C_{abh}C^{hcd}\theta_c \wedge \theta_d;\\
3)\ d\theta^a_0 = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta^0\theta^a_b \wedge \theta^b + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta^0 C^{abc}\theta_b \wedge \theta_c + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta^{00} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}\theta \wedge \theta^a;\\
4)\ d\theta^{\hat{a}}_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_0\theta^b_a \wedge \theta_b + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_0 C_{abc}\theta^b \wedge \theta^c + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta_{00} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\beta_0)^2\right\}\theta \wedge \theta_a;\\
5)\ d\theta^0_a = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_0\theta^b_a \wedge \theta_b - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_0 C_{abc}\theta^b \wedge \theta^c - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta_{00} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\beta_0)^2\right\}\theta \wedge \theta_a;\\
6)\ d\theta^0_{\hat{a}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta^0\theta^a_b \wedge \theta^b - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta^0 C^{abc}\theta_b \wedge \theta_c - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta^{00} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}\theta \wedge \theta^a.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Напомним, что вторая группа структурных уравнений римановой связности имеет вид [17, 18]:

$$
d\theta^i_j = -\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \frac{1}{2}R^i_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l, \tag{13}
$$

где $\left\{R^i_{jkl}\right\} \subset C^\infty(BM)$ – компоненты тензора Римана-Кристоффеля. Расписывая (13) на пространстве присоединенной G-структуры, для NTS-многообразия получим:

$$
\begin{gathered}
1)\ d\theta^a_{\hat{b}} = -C^{dbc}\theta^a_d \wedge \theta_c - C^{adc}\theta^b_d \wedge \theta_c + \tfrac{1}{2}(R^a_{\hat{b}cd} + (\beta^0)^2\delta^a_{[c}\delta^b_{b]})\theta^c \wedge \theta^d +\\
+R^a_{\hat{b}c\hat{d}}\theta^c \wedge \theta_d + \tfrac{1}{2}R^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}\theta_c \wedge \theta_d + R^a_{\hat{b}0c}\theta \wedge \theta^c + R^a_{\hat{b}0\hat{c}}\theta \wedge \theta_c;\\
2)\ d\theta^{\hat{a}}_b = C_{dbc}\theta^d_a \wedge \theta^c + C_{adc}\theta^d_b \wedge \theta^c + \tfrac{1}{2}R^{\hat{a}}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d +\\
+R^{\hat{a}}_{bc\hat{d}}\theta^c \wedge \theta_d + \tfrac{1}{2}\left\{R^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}} + (\beta_0)^2\delta^{[c}_a\delta^{d]}_b\right\}\theta_c \wedge \theta_d + R^{\hat{a}}_{b0c}\theta \wedge \theta^c + R^{\hat{a}}_{b0\hat{c}}\theta \wedge \theta_c;\\
3)\ d\theta^a_0 = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta^0\theta^a_b \wedge \theta^b + \tfrac{1}{2}R^a_{0bc}\theta^b \wedge \theta^c + R^a_{0b\hat{c}}\theta^b \wedge \theta_c +\\
+\left(\tfrac{1}{2}R^a_{0\hat{b}\hat{c}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_0 C^{abc}\right)\theta_b \wedge \theta_c + R^a_{00b}\theta \wedge \theta^b + R^a_{00\hat{b}}\theta \wedge \theta_b;\\
4)\ d\theta^{\hat{a}}_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_0\theta^b_a \wedge \theta_b + \left(\tfrac{1}{2}R^{\hat{a}}_{0bc} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta^0 C_{abc}\right)\theta^b \wedge \theta^c + R^{\hat{a}}_{0b\hat{c}}\theta^b \wedge \theta_c +\\
+\tfrac{1}{2}R^{\hat{a}}_{0\hat{b}\hat{c}}\theta_b \wedge \theta_c + R^{\hat{a}}_{00b}\theta \wedge \theta^b + R^{\hat{a}}_{00\hat{b}}\theta \wedge \theta_b;\\
5)\ d\theta^0_a = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_0\theta^b_a \wedge \theta_b + \left(\tfrac{1}{2}R^0_{abc} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta^0 C_{abc}\right)\theta^b \wedge \theta^c + R^0_{ab\hat{c}}\theta^b \wedge \theta_c +\\
+\tfrac{1}{2}R_{a\hat{b}\hat{c}}\theta_b \wedge \theta_c + R^0_{a0b}\theta \wedge \theta^b + R^0_{a0\hat{b}}\theta \wedge \theta_b;\\
6)\ d\theta^0_{\hat{a}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta^0\theta^a_b \wedge \theta^b + \tfrac{1}{2}R^0_{\hat{a}bc}\theta^b \wedge \theta^c + R^0_{\hat{a}b\hat{c}}\theta^b \wedge \theta_c +\\
+\left(\tfrac{1}{2}R^0_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta_0 C^{abc}\right)\theta_b \wedge \theta_c + R^0_{\hat{a}0b}\theta \wedge \theta^b + R^0_{\hat{a}0\hat{b}}\theta \wedge \theta_b;\\
7)\ d\theta^a_b + \theta^a_c \wedge \theta^c_b = \tfrac{1}{2}R^a_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d + \left(R^a_{bc\hat{d}} - C^{adh}C_{hbc} + \tfrac{1}{2}\beta^0\beta_0\delta^a_c\delta^d_b\right)\theta^c \wedge \theta_d +\\
+\tfrac{1}{2}R^a_{b\hat{c}\hat{d}}\theta_b \wedge \theta_c + R^a_{b0c}\theta \wedge \theta^c + R^a_{b0\hat{c}}\theta \wedge \theta_c.
\end{gathered} \tag{14}
$$

Сравнивая (14) с (2:4) и (12), получим, что существенные ненулевые компоненты тензора Римана-Кристоффеля NTS-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры имеют вид:

$$
\begin{gathered}
1)\ R^a_{\hat{b}cd} = 2C^{abh}C_{hcd} - (\beta^0)^2\delta^a_{[c}\delta^b_{d]};\\
2)\ R^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}} = 2C_{abh}C^{hcd} - (\beta_0)^2\delta^{[c}_a\delta^{d]}_b;\\
3)\ R^{\hat{a}}_{bcd} = -2C_{ab[cd]};\\
4)\ R^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = -2C^{ab[cd]};\\
5)\ R^a_{00b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}\delta^a_b;\\
6)\ R^{\hat{a}}_{00\hat{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta_{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_0)^2\right\}\delta^b_a;\\
7)\ R^0_{a0\hat{b}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta_{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_0)^2\right\}\delta^b_a;\\
8) R^0_{\hat{a}0b} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}\delta^a_b;\\
9)\ R^a_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - C^{adh}C_{hbc} + \frac{1}{2}\beta^0(\beta^0-\beta_0)\delta^a_{[b}\delta^d_{c]} - \frac{1}{2}\beta^0\beta_0\delta^a_c\delta^d_b,
\end{gathered}
\tag{15}
$$

плюс соотношения, полученные из них с учетом свойств симметрии.

Компоненты тензора Риччи вычисляются по формуле $S_{ij} = -R^k_{ijk}$. Подсчитаем компоненты тензора Риччи NTS-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры:

$$
\begin{gathered}
1) S_{00} = -\sqrt{2}n\left\{\beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\} = -\sqrt{2}n\left\{\beta_{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_0)^2\right\};\\
2)\ S_{a\hat{b}} = \left\{A^{cb}_{ac} - C^{cbd}C_{dac} + \frac{1}{2}\beta^0(\beta^0-\beta_0)\delta^c_{[a}\delta^b_{c]} - \frac{1}{2}n\beta^0\beta_0\delta^b_a\right\} -\\
-\left\{2C_{cad}C^{dbc} - (\beta_0)^2\delta^{[b}_c\delta^{c]}_a\right\} - \sqrt{2}\left\{\beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}\delta^b_a;\\
3)\ S_{\hat{a}b} = \left\{A^{ac}_{cb} - C^{acd}C_{dcb} + \frac{1}{2}\beta^0(\beta^0-\beta_0)\delta^a_{[c}\delta^c_{b]} - \frac{1}{2}n\beta^0\beta_0\delta^a_b\right\} -\\
-\left\{2C^{cad}C_{dbc} - (\beta^0)^2\delta^c_{[b}\delta^a_{c]}\right\} - \sqrt{2}\left\{\beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}\delta^a_b.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Остальные компоненты нулевые.

Замечание 7. *Используя (3:4), (16:2), (16:3), легко показать, что* $S_{a\hat{b}} = S_{\hat{b}a}$.

Замечание 8. *Поскольку для NTS-многообразия* $S_{0a} = S_{0\hat{a}} = S_{a0} = S_{\hat{a}0} = 0$, $S_{ab} = S_{\hat{a}\hat{b}} = 0$, *то согласно теореме 6 из [15] следует, что NTS-многообразие имеет* Φ*-инвариантный тензор Риччи.*

Теорема 1. *Тензор Риччи NTS-многообразия удовлетворяет тождествам:*

$$
\begin{gathered}
1)\ S(\xi, \Phi^2X) = 0;\\
2)\ S(\Phi^2X, \Phi^2Y) = S(\Phi X, \Phi Y); \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Доказательство. Применяя процедуру восстановления тождества [17, 18] к равенствам $S_{0a} = 0$, $S_{ab} = 0$, получим требуемые тождества. □

3. Почти $C(\lambda)$-NTS-многообразия

Пусть $\left\{M^{2n+1}, \eta, \xi, \Phi, g\right\}$ – АС-многообразие.

Определение 3. *[1, 2]. Почти контактное метрическое многообразие называется почти $C(\lambda)$-многообразием, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет соотношению*

$$\langle R(Z,W)Y,X\rangle = \langle R(\Phi Z,\Phi W)Y,X\rangle -$$
$$-\lambda\left\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W) - g(X,\Phi W)g(Y,\Phi Z) + g(X,\Phi Z)g(Y,\Phi W)\right\},$$

где $X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(M)$, а λ – вещественное число.

Нормальное почти $C(\lambda)$-многообразие называется $C(\lambda)$-многообразием.

Косимплектическое, сасакиево и Кенмоцу многообразия являются соответственно $C(0)$-, $C(1)$-, $C(-1)$-многообразиями [1].

Доказано, что справедлива

Теорема 2. *[3]. AC-многообразие является почти $C(\lambda)$-многообразием тогда и только тогда, когда компоненты его тензора римановой кривизны на пространстве присоединённой G-структуры удовлетворяют соотношениям: $R^a_{\hat{b}cd} = R^{\hat{c}}_{d\hat{a}\hat{b}} = \lambda\delta^{ab}_{cd}$, $R^a_{0b0} = -R^a_{00b} = -R^0_{\hat{a}b0} = = R^0_{\hat{a}0b} = \lambda\delta^a_b$, $R^a_{bc\hat{d}} = -R^a_{b\hat{d}c}$ – любое, в силу тождества Риччи, удовлетворяющее тождеству $R^a_{bc\hat{d}} - R^a_{cb\hat{d}} = -\lambda\delta^{ad}_{bc}$, где λ – вещественное число, $\delta^{ab}_{cd} = \delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c$, и комплексно-сопряженные компоненты. А остальные компоненты равны нулю.*

По известным компонентам тензора римановой кривизны на пространстве присоединённой G-структуры, по формуле $S_{ij} = -R^k_{ijk}$ в работе [3] были получены выражения для компонент тензора Риччи почти $C(\lambda)$-многообразия на пространстве присоединённой G-структуры:

$$S_{00} = 2\lambda n,$$
$$S_{a\hat{b}} = S_{\hat{b}a} = R^b_{ca\hat{c}} + \lambda n\delta^b_a, \tag{18}$$

остальные компоненты нулевые.

Теорема 3. *Риччи-плоское почти $C(\lambda)$-многообразие локально эквивалентно произведению Риччи-плоского келерова многообразия на вещественную прямую.*

Доказательство. Пусть почти $C(\lambda)$-многообразие является Риччи-плоским. Тогда из (18) следует, что $\lambda = 0$, т.е. многообразие является косимплектическим. Поскольку косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую [18, 20], то теорема доказана. □

Из (18), применяя процедуру восстановления тождества [17, 18], можно получить следующие равенства:

$$1)\ S(\xi,\xi) = 2\lambda n;$$
$$2)\ S(\xi,\Phi^2 X) = 0;$$
$$3)\ S(\xi,X) = 2\lambda n\eta(X);$$
$$4)\ S(\Phi^2 X,\Phi^2 Y) = S(\Phi X,\Phi Y);$$
$$5)\ S(\Phi X,\Phi Y) - S(X,Y) = -2\lambda n\eta(X)\eta(Y);\quad X,Y \in \mathcal{X}(M). \tag{19}$$

Из (19:1) непосредственно следует

Теорема 4. *Кривизна Риччи почти $C(\lambda)$-многообразия M в направлении структурного вектора равна нулю тогда и только тогда, когда многообразие M — косимплектическое, а значит локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.*

Пусть теперь M – NTS-многообразие, являющееся почти $C(\lambda)$-многообразием. Тогда согласно теореме 2 компоненты тензора римановой кривизны удовлетворяют равенствам:

$$\begin{gathered}
1)\ R^a_{\hat{b}cd} = R^{\hat{c}}_{d\hat{a}\hat{b}} = \lambda\delta^{ab}_{cd};\\
2)\ R^a_{0b0} = -R^a_{00b} = -R^0_{\hat{a}b0} = R^0_{\hat{a}0b} = \lambda\delta^a_b;\\
3)\ R^a_{bc\hat{d}} = -R^a_{b\hat{d}c}.
\end{gathered} \tag{20}$$

Сравнивая (15) и (20), получим:

$$\begin{gathered}
1)\ R^a_{\hat{b}cd} = 2C^{abh}C_{hcd} - (\beta^0)^2\delta^a_{[c}\delta^b_{d]} = \lambda\delta^{ab}_{cd};\\
2)\ R^{\hat{a}}_{bcd} = -2C_{ab[cd]} = 0;\\
3)\ R^0_{\hat{a}0b} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\beta^{00} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\beta^0)^2\right\}\delta^a_b = \lambda\delta^a_b;\\
4)\ R^a_{bc\hat{d}} = -R^a_{b\hat{d}c} = A^{ad}_{bc} - C^{adh}C_{hbc} + \tfrac{1}{2}\beta^0(\beta^0-\beta_0)\delta^a_{[b}\delta^d_{c]} - \tfrac{1}{2}\beta^0\beta_0\delta^a_c\delta^d_b.
\end{gathered} \tag{21}$$

Из (5:5) и (21:2) следует, что $C_{abcd} = 0$. Таким образом, для приближенно транссасакиевого почти $C(\lambda)$-многообразия имеет место равенство

$$C_{abcd} = 0. \tag{22}$$

Теорема 5. *Тензор римановой кривизны NTS-многообразия, являющегося почти $C(\lambda)$-многообразием, удовлетворяет тождеству*

$$\begin{gathered}
R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi^2Z = R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z + R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z +\\
+R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z;\quad X,Z,Y\in\mathcal{X}(M).
\end{gathered} \tag{23}$$

Доказательство. Из (15) с учетом (22) имеем на пространстве присоединенной G-структуры $R^a_{bcd} = R^{\hat{a}}_{bcd} = R^0_{bcd} = 0$, т.е. $R^i_{bcd} = 0$. Применяя к последнему равенству процедуру восстановления тождества [17, 18], получим то, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим тождество $R^a_{bc\hat{d}} - R^a_{cb\hat{d}} = -\lambda\delta^{ad}_{bc}$. Запишем это тождество с учетом (3:3) и (15:9) в виде:

$$C^{adh}C_{hbc} = \left\{\beta^0(\beta^0-\beta_0)+\lambda\right\}\delta^a_{[b}\delta^d_{c]}. \tag{24}$$

Из (21:1) имеем:

$$C^{adh}C_{hbc} = \left\{\frac{1}{2}(\beta^0)^2+\lambda\right\}\delta^a_{[c}\delta^b_{d]}. \tag{25}$$

Из последних двух равенств получаем:

$$\frac{1}{2}(\beta^0)^2 = \beta^0(\beta^0-\beta_0). \tag{26}$$

Последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\beta^0=\beta_0=0$ либо $\beta^0=2\beta_0$. Но, так как $\overline{\beta^0}=\beta_0$ (что следует из (2:3)), то второе равенство возможно только при

$$\beta^0=\beta_0=0. \tag{27}$$

Значит, согласно следствию 5 из [19], многообразие является точнейше косимплектическим. Поскольку всякое точнейше косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую [18], то доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть M – NTS-многообразие, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) M является почти $C(\lambda)$-многообразием;

2) M является точнейше косимплектическим многообразием;

3) M локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.

Следствие 1. *Если M — транссасакиево многообразие, являющееся почти $C(\lambda)$-многообразием, то многообразие M является косимплектическим многообразием, а значит, локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.*

Пусть M — NTS-многообразие, являющееся почти $C(\lambda)$-многообразием. Из (21) следует, что

$$R^a_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - \frac{1}{2}\lambda\delta^{ad}_{bc} - \frac{1}{4}\beta^0\beta_0\tilde{\delta}^{ad}_{bc}, \tag{28}$$

где $\tilde{\delta}^{ad}_{bc} = \delta^a_b\delta^d_c + \delta^d_b\delta^a_c$.

Поскольку для NTS-многообразий, являющихся почти $C(\lambda)$-многообразиями, выполняется (27), получим

$$R^a_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - \frac{1}{2}\lambda\delta^{ad}_{bc}, \tag{29}$$

а также из (3) будем иметь

$$A^{[ad]}_{bc} = A^{ad}_{[bc]} = 0. \tag{30}$$

Согласно предложению 6.11 [18], АС-многообразие является многообразием точечно-постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны c тогда и только тогда, когда

$$R^{(a}{}_{(bc)}{}^{d)} = -\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}. \tag{31}$$

Произведем симметризацию (29) по a и d, а также по b и c, с учетом (30) получим:

$$R^{(a}{}_{(bc)}{}^{d)} = A^{ad}_{bc}. \tag{32}$$

Таким образом, справедливо утверждение

Теорема 7. *NTS-многообразие, являющееся почти $C(\lambda)$-многообразием, есть многообразие точечно-постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры справедливо*

$$A^{ad}_{bc} = -\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}. \tag{33}$$

Найдем аналитический критерий глобального постоянства Ф-голоморфной секционной кривизны расссматриваемых многообразий. Продифференцируем внешним образом соотношение (33). С учетом (6) получим

$$-A^{hd}_{bc}\theta^a_h - A^{ah}_{bc}\theta^d_h + A^{ad}_{hc}\theta^h_b + A^{ad}_{bh}\theta^h_c + A^{ad}_{bch}\theta^h + A^{adh}_{bc}\theta_h + A^{ad}_{bc0}\theta = -\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}dc. \tag{34}$$

Последнее расвенство после необходимых сокращений с учетом (33) примет вид

$$A^{ad}_{bch}\theta^h + A^{adh}_{bc}\theta_h + A^{ad}_{bc0}\theta = -\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}dc. \tag{35}$$

Поскольку $c \in C^\infty(M)$, dc является горизонтальной формой, а значит $dc = c^f\theta_f + c_f\theta^f + c_0\theta$. С учетом этого, в силу линейной независимости базисных форм, получим

$$\begin{aligned} &1)\ A^{ad}_{bch} = -\tfrac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}c_h;\\ &2)\ A^{adh}_{bc} = -\tfrac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}c^h;\\ &3)\ A^{ad}_{bc0} = -\tfrac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}c. \end{aligned} \tag{36}$$

Свернем (36:1) по d и c:

$$A^{ac}_{bch} = -\frac{1}{2}\delta^a_b c_h(n+1). \tag{37}$$

Альтернируем последнее соотношение по b и h, с учетом (7:1) и (30) получим: $c_h\delta^a_b(n-1) = 0$. Свернем это выражение по индексам a и b: $c_h(n-1) = 0$. Следовательно, при $n \neq 1$, $c_h = 0$. Аналогично из (36:2) и (36:3) получим $c^h = c_0 = 0$, т.е. $dc = 0$, а значит $c = const$.

Таким образом, справедлива

Теорема 8. *Если NTS-многообразие размерности больше трех, являющееся почти $C(\lambda)$-многообразием, есть многообразие точечно-постоянной Φ-голоморфной секционной кривизны c, то оно является и многообразием глобально постоянной Φ-голоморфной секционной кривизны c.*

Замечание 9. *Любое трехмерное AC-многообразие является многообразием точечно-постоянной, но, вообще говоря, не глобально постоянной Φ-голоморфной секционной кривизны.*

Напомним [18], всякое точнейше косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными. Используя полную классификацию приближенно келеровых многообразий голоморфной кривизны [18], мы, с учетом теоремы 6, получаем следующий результат.

Теорема 9. *Пусть M — NTS-многообразие размерности больше трех, являющееся почти $C(\lambda)$-многообразием, тогда M является многообразием постоянной Φ-голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда оно локально конформно одному из следующих многообразий: 1) $\boldsymbol{CP}^n\times\boldsymbol{R}$; 2) $\boldsymbol{C}^n\times\boldsymbol{R}$; 3) $\boldsymbol{CH}^n\times\boldsymbol{R}$; 4) $M^2\times\boldsymbol{R}$; 5) $S^6\times\boldsymbol{R}$, снабженных канонической точнейше косимплектической структурой. Здесь S^6 — шестимерная сфера, M^2 — келерово многообразие.*

4. Заключение

Основными результатами работы являются следующие утверждения. Кривизна Риччи почти $C(\lambda)$-многообразия m в направлении структурного вектора равна нулю тогда и только тогда, когда многообразие M косимплектическое, а значит локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Тензор римановой кривизны NTS-многообразия, являющегося почти $C(\lambda)$-многообразием, удовлетворяет тождеству

$$R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi^2Z = R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z + R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z + R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z;\ X,Z,Y \in \mathcal{X}(M).$$

Если M – NTS-многообразие, тогда следующие утверждения эквивалентны: 1) M является почти $C(\lambda)$-многообразием; 2) M является точнейше косимплектическим многообразием; 3) M локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если M — транссасакиево многообразие, являющееся почти $C(\lambda)$-многообразием, то многообразие M является косимплектическим многообразием, а значит, локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Если M —

NTS-многообразие размерности больше трех, являющееся почти $C(\lambda)$-многообразием, тогда M является многообразием постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда оно локально конформно одному из следующих многообразий: 1) $\mathbf{CP}^n\times\mathbf{R}$; 2) $\mathbf{C}^n\times\mathbf{R}$; 3) $\mathbf{CH}^n\times\mathbf{R}$; 4) $M^2\times\mathbf{R}$; 5) $S^6\times\mathbf{R}$, снабженных канонической точнейше косимплектической структурой. Здесь S^6 — шестимерная сфера, M^2 — келерово многообразие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Janssen D., Vanhecke L. Almost contact structures and curvature tensors // Kodai Math. J. 1981. Vol. 4. P. 1-27. DOI: 10.2996/kmj/1138036310.
2. Olszak Z., Rosca R. Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds // Publ. Math. Debrecen. 1991. Vol. 39. P. 315-323. DOI: 10.5486/PMD.1991.39.3-4.12.
3. Харитонова С. В. Почти $C(\lambda)$-многообразия // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16, вып. 2. С. 139-146.
4. Ali Akbar. Some Results on Almost $C(\lambda)$-manifolds // International J. of Math. Sci. and Engg. Appls. 2013. Vol. 7, № 1. P. 255-260.
5. Ali Akbar, Sarkar A. On the Conharmonic and Concircular curvature tensors of almost $C(\lambda)$-Manifolds // Int. J. Adv. Math. Sci. 2013. Vol. 1, № 3. P. 134-138. DOI: 10.14419/ijams.v1i3.981.
6. Ali Akbar, Sarkar A. Almost $C(\lambda)$-manifolds admitting W_2 curvature tensor // J. Rajashtan Acad. Phys. Sci. 2014. Vol. 13, № 1. P. 31-38.
7. Рустанов А. Р., Харитонова С. В., Казакова О. Н. О двух классах почти $C(\lambda)$-многообразий // Вестник ОГУ. 2015. № 3. С. 228-231.
8. Ashoka S. R., Bagewadib S. C., Gurupadavva Ingalahallic. Curvature tensor of almost $C(\lambda)$-manifolds // Malaya J. Math. 2014. Vol. 2, № 1. P. 10-15.
9. Ashoka S. R., Bagewadib S. C., Gurupadavva Ingalahallic. A Study on Ricci Solitons in almost $C(\lambda)$ Manifolds // Sohag J. Math. 2016. Vol. 3, № 2. P. 83-88. DOI: 10.18576/sjm/030206.
10. Chaturvedi B. B., Gupta B. G. C-Bochner curvature tensor on almost $C(\lambda)$-manifolds // Palestine J. Math. 2019. Vol. 8, № 2. P. 258-265.
11. Atceken M., Yildirim U. On curvature tensors of an almost $C(\alpha)$-manifold // Int. J. Phys. Math. Sci. 2015. Vol. 5, № 1. P. 53-61.
12. Atceken M., Yildirim U. Almost $c(\alpha)$-manifolds satisfying certain curvature conditions // Adv. Stud. Contemp. Math. 2016. Vol. 26, № 3. P. 567-578.
13. Atceken M., Yildirim U. On almost $C(\alpha)$-manifold satisfying certain conditions on the concircular curvature tensor // Pure Appl. Math. J., Special Issue: Appl. Geom. 2015. Vol. 4, № 1-2. P. 31-34. DOI: 10.11648/j.pamj.s.2015040102.18.
14. Yildirim U. On almost $C(\alpha)$-manifold satisfying some conditions on the Weyl projective curvature tensor // J. Adv. Math. 2018. Vol. 15. P. 8145-8154. DOI: 10.24297/jam.v15i0.8020.
15. Рустанов А. Р., Полькина Е. А., Харитонова С. В. О некоторых аспектах геометрии почти $C(\lambda)$-многообразий // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. 2020. № 3. С. 19-24. DOI: 10.18522/1026-2237-2020-3-19-24.

16. Rustanov A. R., Polkina E. A., Kharitonova S. V. Projective invariants of almost $C(\lambda)$-manifolds// Ann. Glob. Anal. Geom. 2022. Vol. 61. P. 459-467. DOI: 10.1007/s10455-021-09818-w.

17. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 8. С. 71-100. DOI: 10.4213/sm675.

18. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе, дополненное. Одесса: «Печатный Дом», 2013. 458 с.

19. Rustanov A. R., Melekhina T. L., Kharitonova S. V. On the geometry of nearly trans-Sasakian manifolds // Turk. J. Math. 2023. Vol. 47, № 4, Article 7. DOI: 10.55730/1300-0098.3417.

20. Gray A., Hervella L. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Math. Pure ed Appl. 1980. Vol. 326, № 123. P. 35–58.

REFERENCES

1. Janssen, D. & Vanhecke, L. 1981, “Almost contact structures and curvature tensors”,*Kodai Math. J.,* vol. 4, pp. 1–27. DOI: 10.2996/kmj/1138036310.

2. Olszak, Z.& Rosca R. 1991, “Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds”, *Publ. Math. Debrecen*, vol. 39, pp. 315–323. DOI: 10.5486/PMD.1991.39.3-4.12.

3. Kharitonova, S. V. 2011, “Almost $C(\lambda)$-manifolds”, *J. Math. Sci.*, vol. 177, no. 5, pp. 742–747. DOI: 10.1007/s10958-011-0504-6.

4. Ali Akbar. 2013, “Some Results on Almost $C(\lambda)$-manifolds”, *International J. of Math. Sci. and Engg. Appls.*, vol. 7, no. 1, pp. 255–260.

5. Ali Akbar & Sarkar, A. 2013, “On the Conharmonic and Concircular curvature tensors of almost $C(\lambda)$-Manifolds”, *Int. J. Adv. Math. Sci.*, vol. 1, no. 3, pp. 134–138. DOI: 10.14419/ijams.v1i3.981.

6. Ali Akbar & Sarkar, A. 2014, “Almost $C(\lambda)$-manifolds admitting W_2 curvature tensor”, *J. Rajashtan Acad. Phys. Sci.*, vol. 13, no. 1, pp. 31–38.

7. Rustanov, A. P., Kharitonova, S. V. & Kazakova, O. N. 2015, “About two classes of almost $C(\lambda)$-manifolds”, *Vestnik OSU,* no. 3, pp. 228–231.(in Russian).

8. Ashoka, S. R., Bagewadib, S. C. & Gurupadavva Ingalahallic. 2014, “Curvature tensor of almost $C(\lambda)$-manifolds”, *Malaya J. Math.*, vol. 2, no. 1, pp. 10–15.

9. Ashoka, S. R., Bagewadib, S. C. & Gurupadavva Ingalahallic. 2016,“A Study on Ricci Solitons in almost $C(\lambda)$ Manifolds”, *Sohag J. Math.*, vol. 3, no. 2, pp. 83-88. DOI: 10.18576/sjm/030206.

10. Chaturvedi, B. B. & Gupta, B. G. 2019, “C-Bochner curvature tensor on almost $C(\lambda)$-manifolds”, *Palestine J. Math.*, vol. 8, no. 2,pp. 258-265.

11. Atceken, M. & Yildirim, U. 2015, “On curvature tensors of an almost $C(\alpha)$-manifold”, *Int. J. Phys. Math. Sci.*, vol. 5, no. 1, pp. 53-61.

12. Atceken, M. & Yildirim, U. 2016,“Almost $c(\alpha)$-manifolds satisfying certain curvature conditions”, *Adv. Stud. Contemp. Math.*, vol. 26, no. 3, pp. 567-578.

13. Atceken, M. & Yildirim, U. 2015, “On almost $C(\alpha)$-manifold satisfying certain conditions on the concircular curvature tensor”, *Pure Appl. Math. J.*, Special Issue: Appl. Geom., vol. 4, no. 1-2, pp. 31-34. DOI: 10.11648/j.pamj.s.2015040102.18.

14. Yildirim, U. 2018, “On almost $C(\alpha)$-manifold satisfying some conditions on the Weyl projective curvature tensor”, *J. Adv. Math.*, vol. 15, pp. 8145-8154, DOI: 10.24297/jam.v15i0.8020.

15. Rustanov, A. R., Polkina, E. A. & Kharitonova, S. V. 2020, “On some aspects of the geometry of almost $C(\lambda)$-manifolds”, *Izv. Vuzov. Sev.-Kav. Reg. Nat. Sci.*, no. 3, pp. 19–24. DOI: 10.18522/1026-2237-2020-3-19-24.

16. Rustanov A. R., Polkina E. A. & Kharitonova S. V. 2022, “Projective invariants of almost $C(\lambda)$-manifolds”, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, vol. 61, pp. 459-467. DOI: 10.1007/s10455-021-09818-w.

17. Kirichenko, V. F. & Rustanov, A. R. 2002, “Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds”, *Sb. Math.*, vol. 193, no. 7-8, pp. 1173–1201. DOI: 10.1070/SM2002v193n08ABEH000675.

18. Kirichenko, V. F. 2013, “Differential-geometric structures on manifolds
, *Odessa, Pechatnyy dom*, 458 p. (in Russian).

19. Rustanov, A. R., Melekhina, T. L. & Kharitonova, S. V. 2023, “On the geometry of nearly trans-Sasakian manifolds”, *Turk. J. Math.*, vol. 47, no. 4, Article 7. DOI: 10.55730/1300-0098.3417.

20. Gray, A. & Hervella L. 1980, “The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants”, *Ann. Math. Pure ed Appl.*, vol. 326, no. 123, pp. 35–58.

Получено: 03.09.2023
Принято в печать: 21.12.2023