ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 5.

УДК 514.745.8 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-126-135

Проверка обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко для алгебр Ли малой размерности

Ф. И. Лобзин

Лобзин Федор Игоревич — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: fiadat@mail.ru

Аннотация

В случае алгебр Ли $\mathfrak{g}$ малой размерности ≤ 7 доказан усиленный вариант обобщенной гипотезы Мищенко—Фоменко, а именно показано, что для любого элемента $a \in \mathfrak{g}^*$ на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ существует полный набор полиномов в биинволюции относительно стандартной скобки Пуассона-Ли и скобки с замороженным аргументом, ассоциированной с ковектором a.

Ключевые слова: Скобка Пуассона–Ли, согласованные скобки Пуассона, биинволютивные наборы многочленов.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
Ф. И. Лобзин. Проверка обобщенной гипотезы Мищенко — Фоменко для алгебр Ли малой размерности // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 126–135.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 5.

UDC 514.745.8 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-126-135

Verification of the generalized hypothesis of Mishchenko–Fomenko for Lie algebras of small dimension

F. I. Lobzin

Lobzin Fedor Igorevich — Lomonosov Moscow State University; The Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: fiadat@mail.ru

Abstract

In the case of Lie algebras $\mathfrak{g}$ of small dimension ≤ 7, an enhanced version of the Generalised argument shift conjecture is proved, namely, it is shown that for any element $a \in \mathfrak{g}^*$ on the dual space $\mathfrak{g}^*$ there is a complete set of polynomials in the bi-involution with respect to the standard Poisson-Lie bracket and the frozen argument bracket associated with the covector a.

Keywords: Lie–Poison bracket, compatible Poisson bracket , sets of polynomials in bi-involution.

Bibliography: 9 titles.

For citation:
F. I. Lobzin, 2023, “Verification of the generalized hypothesis of Mishchenko–Fomenko for Lie algebras of small dimension” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 126–135.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, соответственно $\mathfrak{g}^*$ — сопряженное пространство. Рассмотрим на $\mathfrak{g}^*$ тензорное поле:

$$(\mathcal{A}_x(x))_{ij} = (c_{ij}^k x_k),\ x \in \mathfrak{g}^*,$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$, x_k — координаты элемента $x \in \mathfrak{g}^*$ в двойственном к $e_1, \ldots, e_n$ базисе. Данное тензорное поле определяет скобку Пуассона–Ли на $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$: $\{f, g\}(x) = \mathcal{A}_x(df(x), dg(x))$. Функции $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, лежащие в ядре скобки Пуассона–Ли, называются функциями Казимира. Также можно рассмотреть похожую структуру, называемую скобкой Пуассона с замороженным аргументом:

$$(\mathcal{A}_a(x))_{ij} = (c_{ij}^k a_k),\ a, x \in \mathfrak{g}^*, \quad \{f, g\}_a(x) = \mathcal{A}_a(df(x), dg(x)).$$

Эти скобки являются согласованными в том смысле, что любая линейная комбинация $\mathcal{A}_x(x)$ и $\mathcal{A}_a(x)$ задает алгебру Ли на пространстве $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Набор из s коммутирующих функций над $\mathfrak{g}^*$ считается полным, если они функционально независимы и $s = \frac{1}{2}(\dim\ \mathfrak{g} + \mathrm{ind}\ \mathfrak{g})$. Наибольший практический интерес представляют наборы, состоящие из многочленов. В 70-х годах прошлого века была сформирована следующая гипотеза, касающаяся существования полных наборов в инволюции.

Гипотеза (Гипотеза Мищенко—Фоменко)**.** *На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует полный набор многочленов в инволюции относительно скобки Пуассона–Ли.*

А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко доказали эту гипотезу для полупростых и редуктивных алгебр Ли в [1] при помощи метода, описанного в следующем утверждении.

Утверждение 1 (Метод Мищенко—Фоменко сдвига аргумента)**.** *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $f_1 \ldots, f_m$ — полиномиальные функции Казимира скобки Пуассона–Ли. Разложим $f_i(x + \lambda \cdot a)$, по степеням λ:*

$$f_i(x + \lambda \cdot a) = f_{i,0} + \lambda \cdot f_{i,1} + \ldots \lambda^j \cdot f_{i,j} \ldots,\ x, a \in \mathfrak{g}^*, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда набор многочленов $(f_{i,j})$ находится в инволюции относительно скобки Пуассона–Ли.

Отметим, что наборы многочленов, построенные методом сдвига аргумента, будут также в инволюции и относительно скобки с замороженным аргументом, так что интересно рассмотреть естественное обобщение гипотезы 1 (сформулированное в [2], [3, conjecture 5.5]).

Гипотеза (Обобщенная гипотеза Мищенко—Фоменко)**.** *Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для всех регулярных элементов $a \in \mathfrak{g}^*$ существует полный набор многочленов в биинволюции, то есть набор, одновременно находящийся в инволюции относительно скобки $\{\cdot, \cdot\}$ и скобки $\{\cdot, \cdot\}_a$.*

Полученные при применении метода сдвига аргумента наборы являются полными не для всех алгебр Ли, даже если элемент $a \in \mathfrak{g}^*$ регулярный. Также наборы, построенные сдвигом аргумента, для которых элемент $a \in \mathfrak{g}^*$ является параметром, могут становится функционально зависимыми для некоторых сингулярных элементов $a \in \mathfrak{g}^*$ (см. определение 1).

Первая гипотеза была доказана Садэтовым в 2004 году (см.[4]), но полученные его алгоритмом наборы редко оказываются в инволюции относительно скобки с замороженным аргументом. Обобщенная гипотеза Мищенко—Фоменко доказана, например, для полупростых алгебр Ли (для полупростых элементов $a \in \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ в [1], для остальных регулярных элементов [2]). Также подобная задача была рассмотрена в [6], где полные наборы в биинволюции были построены для всех комплексных (в этой работе этот результат будет обобщен и на вещественные случаи) семимерных нильпотентных алгебр Ли. Несмотря на то, что обобщенная гипотеза была сформулирована только для регулярных элементов a, в данной работе эта задача рассмотрена и для сингулярных элементов тоже.

Определение 1. *Элемент $a \in \mathfrak{g}^*$ называется сингулярным, если*

$$\dim(\mathrm{Ann}\ a) > \mathrm{ind}\ \mathfrak{g},\ \textit{где}\ \mathrm{Ann}\ a = \{\xi \in \mathfrak{g} |\, \mathrm{ad}^*_\xi a = 0\},\ \mathrm{ind}\ \mathfrak{g} = \min_b(\dim\ \mathrm{Ann}(b)).$$

Предложение 1. *Пусть в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует коммутативная подалгебра, размерности $s = \frac{1}{2}(\dim\ \mathfrak{g} + \mathrm{ind}\ \mathfrak{g})$. Тогда существует полный набор многочленов в инволюции относительно скобки Пуассона–Ли, который будет в инволюции и относительно скобки с замороженным аргументом для любого элемента $a \in \mathfrak{g}^*$. А именно Пусть $e_1, ..., e_k$ — базис этой подалагебры. Тогда соответствующие линейные функции $f_i : g^* \to \mathbb{R}$, $f_i(x) = x(e_i)$, $x \in g^*$, образуют полный набор в биинволюции относительно скобки $\{\cdot,\cdot\}$ и $\{\cdot,\cdot\}_a$ для любого $a \in g^*$.*

Доказательство этого предложения тривиально. В следующем разделе мы разберем все случаи вещественных алгебр Ли размерности меньше 6 и вещественных нильпотентных алгебр Ли, размерностей 6 и 7, для которых не выполняются условия этого предложения.

2. Построение наборов в биинволюции

Рассмотрим пример (обозначения из статьи [9]):

Алгебра	Функции Казимира	Многочлены, полученные методом сдвига аргумента
23457G $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_1, e_5] = e_6$, $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_2, e_4] = e_6$, $[e_2, e_5] = -e_7$, $[e_3, e_4] = e_7$	x_6, x_7, $2x_5^3 - 3x_4^2x_7 - 6x_4x_5x_6+$ $+6x_3x_6^2 + 6x_3x_5x_7-$ $-6x_2x_6x_7 - 6x_1x_7^2$	$f_1 = x_6$, $f_2 = x_7$, $f_3 = 2x_5^3 - 3x_4^2x_7 - 6x_4x_5x_6$ $+6x_3x_6^2 + 6x_3x_5x_7 - 6x_2x_6x_7$ $-6x_1x_7^2$, $f_4 =$ сдвиг, $f_5 =$ сдвиг

Найдем такие a, что многочлены f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 будут функционально зависимыми, то есть найдем такие a, что $\mathrm{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) < 5$. Так как $f_1 = x_6$, $f_2 = x_7$, из условия $\mathrm{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) < 5$ следует

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} -x_7^2 & -x_6x_7 & x_6^2 + x_5x_7 \\ -a_7^2 & -a_6a_7 & a_6^2 + a_5a_7 \\ -2a_7x_7 & -a_6x_7 - a_7x_6 & 2a_6x_6 + a_5x_7 + a_6x_5 \end{pmatrix} < 3,$$

В предыдущей матрице первый столбец — производные по x_1, второй столбец — производные по x_2, третий столбец — производные по x_3, тогда:

$$\det\begin{pmatrix} -x_7^2 & -x_6x_7 & x_6^2 + x_5x_7 \\ -a_7^2 & -a_6a_7 & a_6^2 + a_5a_7 \\ -2a_7x_7 & -a_6x_7 - a_7x_6 & 2a_6x_6 + a_5x_7 + a_6x_5 \end{pmatrix} \equiv 0,$$

следовательно коэффициенты при всех мономах равны нулю. Коэффициент при x_6^3 равен $a_7^3 = 0$, следовательно $a_7 = 0$. Коэффициент при x_7^3 равен $a_6^3 = 0$, следовательно $a_6 = 0$.

Аналогично можно рассмотреть другую подматрицу матрицы Якоби, а именно: первый столбец — производные по x_4, второй столбец — производные по x_5, третий столбец — производные по x_6. Проведя такие же рассуждения получим: $a_5 = 0$.

При $a_5 = a_6 = a_7 = 0$ подойдет набор : $x_4, x_5, x_6, x_7, x_3x_6^2 + x_3x_5x_7 - x_2x_6x_7 - x_1x_7^2$. Этот полный инволютивный набор взят из [8], то что все эти многочлены попарно коммутируют относительно скобок с такими замороженными аргументами можно проверить явно.

Теорема 1. *Пусть вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ удовлетворяет одному из следующих условий: либо $\dim\mathfrak{g} \leqslant 5$, либо $\mathfrak{g}$ нильпотентна и $\dim\mathfrak{g}$ равна 6 или 7. Тогда для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ верна обобщенная гипотеза Мищенко—Фоменко. Более того для каждого сингулярного элемента $a \in \mathfrak{g}^*$, существует полный набор многочленов в биинволюции относительно скобок $\{\cdot,\cdot\}$ и $\{\cdot,\cdot\}_a$.*

Доказательство.

Теорема следует из таблицы, представленной далее. Таблица состоит из алгебр Ли для которых не выполняются условия предложения 1 (для остальных утверждение теоремы следует из этого предложения).

Комментарии к таблице: *В первых двух столбцах таблицы выписаны алгебры Ли (в обозначениях из статей [7] (размерности меньше 6), [9] (размерности 7)), их коммутационные соотношения и функции Казимира (функции Казимира для всех алгебр из таблицы кроме последних 7 взяты из [8], для остальных случаев функции Казимира вычислены автором). В третьем столбце предъявлены полные биинволютивные наборы многочленов для всех регулярных ковекторов. В четвертом столбце отдельно выписаны полные биинволютивные наборы (построены различными методами) для тех сингулярных ковекторов (их множество описано аналогично примеру), для которых набор многочленов из третьего столбца является не полным. Также в четвертом столбце указаны размерности аннуляторов соответствующих ковекторов (у семимерных алгебр Ли размерность аннуляторов в четвертом столбце таблицы не указана, так как всегда равна 5). Первая строчка в каждой ячейке 3-го и 4-го столбца обозначает условия на координаты ковектора. Запись $(a_1,\ a_2,\ a_3) \neq 0$ означает, что хотя бы одна из этих координат не равна нулю.*

Замечание 6. *В следующей таблице опущены алгебры (обозначения из [7]):*

$$\mathbf{A_{3,8}},\ \mathbf{A_{3,9}},\ \mathbf{A_{4,8}},\ \mathbf{A_{4,10}},\ \mathbf{A_{4,23}},\ \mathbf{A_{5,3}}.$$

Так как для этих алгебр Ли полные биинволютивные наборы многочленов получаются методом сдвига аргумента для всех a, кроме a, таких что $\mathcal{A}_a(x) \equiv 0$.

$\mathbf{A_{5,37}}$ $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_1,e_4]=2e_1$, $[e_2,e_4]=e_2$, $[e_3,e_4]=e_3$, $[e_2,e_5]=-e_3$, $[e_3,e_5]=e_2$	$\frac{x_2^2+x_3^2+2x_1x_5}{x_1}$	$(a_1,\ a_2,\ a_3)\neq 0$ $f_1=x_1$, $f_2=x_2^2+x_3^2+2x_1x_5$, $f_3=a_2x_2+a_3x_3+a_1x_5$	$a_1=a_2=a_3=0$ $\dim(\mathrm{Ann}(a))=5$ $g_1=x_1,\ g_2=x_5$, $g_3=x_2^2+x_3^2+2x_1x_5$
$\mathbf{A_{5,40}}$ $[e_1,e_2]=2e_1$, $[e_1,e_3]=-e_2$, $[e_2,e_3]=2e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_2,e_4]=e_4$, $[e_2,e_5]=-e_5$, $[e_3,e_5]=e_4$	$x_2x_4x_5-x_1x_4^2+$ $+x_3x_5^2$	$(a_4,\ a_5)\neq 0$ $f_1=x_2x_4x_5-x_1x_4^2+x_3x_5^2$, $f_2=x_2a_4a_5+x_4a_2a_5+$ $+x_5a_2a_4-x_1a_4^2-2x_4a_1a_4+$ $+x_3a_5^2+2x_5a_3a_5$, $f_3=x_2x_4a_5+x_2x_5a_4+$ $+x_4x_5a_2-2x_1x_4a_4-x_4^2a_1+$ $+2x_3x_5a_5+a_3x_5^2$	$a_4=a_5=0$ $\dim(\mathrm{Ann}(a))=3$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5$, $g_3=x_2x_4x_5-x_1x_4^2+x_3x_5^2$

$\mathbf{A_{6,21}}$ $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_5]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_4$, $[e_2,e_4]=e_5$, $[e_3,e_4]=e_6$	x_6, $x_4^2+2x_2x_6-$ $-2x_3x_5$	$(a_4,\ a_5,\ a_6)\neq 0$ $f_1=x_5,\ f_2=x_6$, $f_3=x_4^2+2x_2x_6-2x_3x_5$, $f_4=a_4x_4+a_6x_2-a_5x_3$	$a_4=a_5=a_6=0$ $\dim(\mathrm{Ann}(a))=4$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5$, $g_3=x_6,\ g_4=x_2x_6-x_3x_5$
$\mathbf{A_{6,22}}$ $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_5$, $[e_1,e_5]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_4$, $[e_2,e_4]=e_5$, $[e_3,e_4]=e_6$	x_6, $2x_5^3+3x_4^2x_6-$ $-6x_2x_6^2-$ $-6x_3x_5x_6$	$(a_4,\ a_5,\ a_6)\neq 0$ $f_1=x_5,\ f_2=x_6$, $f_3=x_4^2-2x_2x_6-2x_3x_5$, $f_4=a_4x_4-a_6x_2-a_5x_3$	$a_4=a_5=a_6=0$ $\dim(\mathrm{Ann}(a))=4$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5$, $g_3=x_6,\ g_4=x_2x_6-x_3x_5$
$\mathbf{247E_1}$ $[e_1,e_2]=e_4$, $[e_1,e_3]=e_5$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_7$, $[e_3,e_5]=e_7$	x_6, x_7, $x_4^2+x_5^2-$ $-2x_2x_6+2x_1x_7$	$(a_4,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_5,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7$, $f_4=x_4^2-2x_2x_6+2x_1x_7$, $f_5=a_4x_4-a_6x_2+a_7x_1$	$a_4=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6$, $g_4=x_7\ g_5=x_2x_6-x_1x_7$
23457C $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_1,e_5]=e_6$, $[e_2,e_5]=-e_7$, $[e_3,e_4]=e_7$	x_6, x_7, $x_4^2-2x_3x_5+$ $+2x_2x_6+$ $+2x_1x_7$	$(a_5,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_6,\ f_2=x_7$, $f_3=x_1x_7-x_2x_6+x_3x_5-\frac{x_4^2}{2}$, $f_4=a_7x_1-a_6x_2+a_3x_5+$ $+a_5x_3-a_4x_4$, $f_5=-a_5x_5x_7+\frac{1}{2}x_5^2a_7+$ $+a_6x_4x_7-x_4x_6a_7$	$a_5=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5$, $g_3=x_6,\ g_4=x_7$, $g_4=-x_3x_5+x_2x_6+x_1x_7$
12457H $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_5]=e_6$, $[e_1,e_6]=e_7$, $[e_2,e_3]=e_5$, $[e_2,e_4]=e_6$, $[e_3,e_4]=e_7$	x_7, $x_6^2-2x_5x_7$, $x_4x_5-x_3x_6+$ $+x_2x_7$	$(a_5,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_7,\ f_2=x_6,\ f_3=x_5$, $f_4=x_4x_5-x_3x_6+x_2x_7$, $f_5=a_5x_4-x_3a_6+a_7x_2$	$a_5=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6$, $g_4=x_7\ g_4=x_2x_6-x_1x_7$
12457C $[e_1,e_2]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_1,e_5]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_6$, $[e_2,e_6]=e_7$, $[e_4,e_5]=-e_7$	x_7, $x_6^2-2x_3x_7$, $x_5^2-2x_4x_6-$ $-2x_1x_7$	$(a_4,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_3,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7$, $f_4=x_5^2-2x_4x_6-2x_1x_7$, $f_5=a_5x_5-a_6x_4-a_7x_1$	$a_4=a_6=a_7=0$ $g_1=x_3,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6$, $g_4=x_7,\ g_5=x_1x_7-x_4x_6$
12457L $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_1,e_6]=e_7$, $[e_2,e_3]=e_5$, $[e_2,e_5]=e_6$, $[e_2,e_6]=e_7$, $[e_3,e_4]=-e_7$, $[e_3,e_5]=e_7$	x_7, $x_4^2-2x_3x_6+x_5^2-$ $-2x_1x_7+2x_2x_7$, $x_6^2-2x_4x_7-$ $-2x_5x_7$	$(a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_7$, $f_2=x_4^2-2x_3x_6+x_5^2-$ $-2x_1x_7+2x_2x_7$, $f_3=a_4x_4-a_3x_6-a_6x_3+$ $+a_5x_5-a_7x_1+a_7x_2$, $f_4=x_6^2-2x_4x_7-2x_5x_7$, $f_5=a_6x_6-a_7x_4-a_7x_5$	$a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6$, $g_4=x_7$, $g_5=x_3x_6+x_1x_7-x_2x_7$
247Q $[e_1,e_2]=e_4$, $[e_1,e_3]=e_5$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_6$, $[e_2,e_5]=e_7$, $[e_3,e_4]=e_7$	x_6, x_7, $x_5x_6^2-x_3x_6x_7+$ $+x_4x_5x_7+x_1x_7^2$	$(a_5,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_5,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7$, $f_4=-x_3x_6+x_4x_5+x_1x_7$, $f_5=-a_6x_3+a_5x_4+a_7x_1$	$a_5=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6$, $g_4=x_7,\ g_5=x_3x_6-x_1x_7$

23457B $[e_1,e_2]=e_3,$ $[e_1,e_3]=e_4,$ $[e_1,e_4]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_6]=e_7,$ $[e_3,e_4]=-e_7$	$x_5,$ $x_7,$ $x_5x_6^2+x_4^2x_7-$ $-2x_3x_6x_7-$ $-2x_1x_7^2$	$(a_4,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_5,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7,$ $f_4=x_4^2-2x_3x_6-2x_1x_7,$ $f_5=a_4x_4-a_6x_3-a_7x_1$	$a_4=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6,$ $g_4=x_7,\ g_5=x_3x_6+x_1x_7$
247J $[e_1,e_2]=e_4,$ $[e_1,e_3]=e_5,$ $[e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_5]=e_7,$ $[e_3,e_4]=e_7,$ $[e_3,e_5]=e_6$	$x_6,$ $x_7,$ $x_4^2x_6-$ $-2x_4x_5x_7+$ $+2x_2x_6x_7-$ $-2x_1x_7^2$	$(a_4,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_4,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7,$ $f_4=-x_4x_5+x_2x_6-x_1x_7,$ $f_5=-a_4x_5+a_6x_2-a_7x_1$	$a_4=a_7=a_6=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6,$ $g_4=x_7,\ g_5=x_2x_6-x_1x_7$
257L $[e_1,e_2]=e_5,$ $[e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_6,$ $[e_2,e_5]=e_7,$ $[e_3,e_4]=e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $2x_4^2x_6-x_5^2x_7+$ $+2x_2x_6x_7-$ $-2x_1x_7^2$	$(a_5,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_4,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7,$ $f_4=-x_5^2+2x_2x_6-2x_1x_7,$ $f_5=-a_5x_5+a_6x_2-a_7x_1$	$a_5=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6,$ $g_4=x_7,\ g_5=x_2x_6-x_1x_7$
247G $[e_1,e_2]=e_4,$ $[e_1,e_3]=e_5,$ $[e_1,e_4]=e_7,$ $[e_2,e_4]=e_6,$ $[e_3,e_5]=e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $x_5^2x_6+x_4^2x_7+$ $+2x_1x_6x_7-$ $-2x_2x_7^2$	$(a_4,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_5,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7,$ $f_4=x_4^2+2x_1x_6-2x_2x_7,$ $f_5=a_4x_4+a_6x_1-a_7x_2$	$a_4=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6,$ $g_4=x_7,\ g_5=x_1x_6-x_2x_7$
23457F $[e_1,e_2]=e_3,$ $[e_1,e_3]=e_4,$ $[e_1,e_4]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_5]=-e_7,$ $[e_2,e_6]=-e_7,$ $[e_3,e_4]=e_7$	$x_5-x_6,$ $x_7,$ $x_5^3-3x_5^2x_6+$ $+3x_4^2x_7-$ $-6x_3x_6x_7+$ $+6x_1x_7^2$	$(a_4,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_5,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7,$ $f_4=x_4^2-2x_3x_6+2x_1x_7,$ $f_5=a_5x_4-a_6x_3+a_7x_1$	$a_4=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6,$ $g_4=x_7,\ g_5=x_3x_6-x_1x_7$
2357C $[e_1,e_2]=e_4,$ $[e_1,e_4]=e_5,$ $[e_1,e_5]=e_7,$ $[e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_4]=e_6,$ $[e_3,e_4]=-e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $x_5^3-3x_4x_5x_7+$ $+3x_3x_6x_7+$ $+3x_2x_7^2$	$(a_5,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_5,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7,$ $f_4=-x_4x_5+x_3x_6+x_2x_7,$ $f_5=-a_5x_4+a_6x_3+a_7x_2$	$a_5=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6,$ $g_4=x_7,\ g_5=x_3x_6+x_2x_7$
2357D $[e_1,e_2]=e_4,$ $[e_1,e_3]=e_6,$ $[e_1,e_4]=e_5,$ $[e_1,e_5]=e_7,$ $[e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_4]=e_6,$ $[e_3,e_4]=-e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $x_5^3-3x_5x_6^2-$ $-3x_4x_5x_7+$ $+3x_3x_6x_7+$ $+3x_2x_7^2$	$(a_4,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_5,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7,$ $f_4=-x_4x_5+x_3x_6+x_2x_7,$ $f_5=-a_5x_4+a_6x_3+a_7x_2$	$a_4=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6,$ $g_4=x_7,\ g_5=x_3x_6+x_2x_7$
247R$_\mathbf{1}$ $[e_1,e_2]=e_4,$ $[e_1,e_3]=e_5,$ $[e_1,e_4]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_6,$ $[e_2,e_4]=e_7,$ $[e_3,e_5]=e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $2x_5x_6^2-x_4^2x_7-$ $-x_5^2x_7+$ $+2x_2x_6x_7-$ $-2x_1x_7^2$	$(a_4,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_5,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7,$ $f_4=-x_4^2+2x_2x_6-2x_1x_7,$ $f_5=-a_4x_4+a_6x_2-a_7x_1$	$a_4=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6,$ $g_4=x_7,\ g_5=x_2x_6-x_1x_7$

23457D $[e_1,e_2]=e_3,$ $[e_1,e_3]=e_4,$ $[e_1,e_4]=e_5,$ $[e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_6,$ $[e_2,e_5]=-e_7,$ $[e_3,e_4]=e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $2x_4x_6^2-x_5^2x_6+$ $+x_4^2x_7-$ $-2x_3x_5x_7+$ $+2x_2x_6x_7+$ $+2x_1x_7^2$	$(a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_6,\ f_2=x_7,$ $f_3=2x_4x_6^2-x_5^2x_6+x_4^2x_7-$ $-2x_3x_5x_7+2x_2x_6x_7+$ $+2x_1x_7^2,$ $f_4=$ сдвиг, $f_5=$ сдвиг	$a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,$ $g_3=x_6,\ g_4=x_7,$ $g_5=-x_3x_5+x_2x_6+x_1x_7$
247K $[e_1,e_2]=e_4,$ $[e_1,e_3]=e_5,$ $[e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_4]=e_6,$ $[e_2,e_5]=e_7,$ $[e_3,e_4]=e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $2x_3x_6^2-x_5^2x_6$ $+2x_4x_5x_7$ $-2x_2x_6x_7$ $+2x_1x_7^2$	$(a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_6,\ f_2=x_7,$ $f_3=2x_3x_6^2-x_5^2x_6+$ $+2x_4x_5x_7-2x_2x_6x_7+$ $+2x_1x_7^2,$ $f_4=$ сдвиг, $f_5=$ сдвиг	$a_7=a_6=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,$ $g_3=x_6,\ g_4=x_7,$ $g_5=x_3x_6^2-x_2x_6x_7+x_1x_7^2$
247H $[e_1,e_2]=e_4,$ $[e_1,e_3]=e_5,$ $[e_1,e_4]=e_7,$ $[e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_4]=e_6,$ $[e_3,e_5]=e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $2x_3x_6^2-x_5^2x_6-$ $-x_4^2x_7-$ $-2x_1x_6x_7+$ $+2x_2x_7^2$	$(a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_6,\ f_2=x_7,$ $f_3=2x_3x_6^2-x_5^2x_6-x_4^2x_7-$ $-2x_1x_6x_7+2x_2x_7^2,$ $f_4=$ сдвиг, $f_5=$ сдвиг	$a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,$ $g_3=x_6,\ g_4=x_7,$ $g_5=x_3x_6^2-x_1x_6x_7+x_2x_7^2$
23457G $[e_1,e_2]=e_3,$ $[e_1,e_3]=e_4,$ $[e_1,e_4]=e_5,$ $[e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_4]=e_6,$ $[e_2,e_5]=-e_7,$ $[e_3,e_4]=e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $2x_5^3-3x_4^2x_7-$ $-6x_4x_5x_6+$ $+6x_3x_6^2+$ $+6x_3x_5x_7=$ $-6x_2x_6x_7=$ $-6x_1x_7^2$	$(a_5,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_6,\ f_2=x_7,$ $f_3=2x_5^3-3x_4^2x_7-$ $-6x_4x_5x_6+6x_3x_6^2+$ $+6x_3x_5x_7-6x_2x_6x_7-$ $-6x_1x_7^2,$ $f_4=$ сдвиг, $f_5=$ сдвиг	$a_5=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,$ $g_3=x_6,\ g_4=x_7,$ $g_5=x_3x_6^2+x_3x_5x_7-x_1x_7^2-$ $-x_2x_6x_7$
$\mathbf{12457N_1}, \lambda=\mathbf{1}$ $[e_1,e_2]=e_3,$ $[e_1,e_3]=e_4,$ $[e_1,e_4]=e_6+e_7$ $[e_1,e_6]=e_7,$ $[e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_5]=e_6,$ $[e_3,e_5]=e_7$	$x_7,$ $x_6^2-2x_4x_7+$ $+x_6x_7,$ $2x_6^3+3x_6^2x_7$ $+3x_4^2x_7$ $+3x_5^2x_7$ $-6x_3x_6x_7$ $-6x_4x_6x_7$ $+6x_2x_7^2$	$(a_5,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_4,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7,$ $f_4=x_5^2-2x_3x_6+2x_2x_7,$ $f_5=a_5x_5-a_6x_3+a_7x_2$	$a_5=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,$ $g_3=x_6,\ g_4=x_7,$ $g_5=x_3x_6-x_2x_7$
12457K $[e_1,e_2]=e_3,$ $[e_1,e_3]=e_4,$ $[e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_5,$ $[e_2,e_4]=e_6,$ $[e_2,e_5]=e_7,$ $[e_2,e_6]=e_7,$ $[e_3,e_5]=-e_7$	$x_7,$ $x_6^2-2x_4x_7,$ $x_6^3+3x_4x_5x_6$ $-3x_3x_6x_7$ $-3x_4x_6x_7$ $-3x_1x_7^2$	$(a_4,\ a_6,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_4,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7,$ $f_4=x_4x_5-x_3x_6-x_1x_7,$ $f_5=a_4x_5-a_6x_3-a_7x_1$	$a_4=a_6=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6,$ $g_4=x_7,$ $g_5=x_3x_6+x_1x_7$
12457F $[e_1,e_2]=e_4,$ $[e_1,e_4]=e_5,$ $[e_1,e_5]=e_6,$ $[e_2,e_3]=e_6,$ $[e_2,e_4]=e_6,$ $[e_2,e_6]=e_7,$ $[e_4,e_5]=-e_7$	$x_7,$ $x_6^2-2x_3x_7,$ $2x_6^3+3x_5^2x_7-$ $-6x_4x_6x_7-$ $-6x_1x_7^2$	$(a_5,\ a_7)\neq 0$ $f_1=x_4,\ f_2=x_6,\ f_3=x_7,$ $f_4=x_5^2-2x_1x_7,$ $f_5=a_5x_5-a_7x_1$	$a_5=a_7=0$ $g_1=x_4,\ g_2=x_5,\ g_3=x_6,$ $g_4=x_7,$ $g_5=x_4x_6+x_1x_7$

123457I, $\boldsymbol{\lambda = 0}$ $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_1, e_6] = e_7,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_3, e_4] = e_7$	$x_7,$ $x_6^2 - 2x_5x_7,$ $2x_6^5 - 10x_5x_6^3x_7$ $+15x_5^2x_6x_7^2$ $-15x_4x_5x_7^3$ $+15x_3x_6x_7^3$ $-15x_2x_7^4$	$(a_5,\ a_6,\ a_7) \neq 0$ $f_1 = x_5,\ f_2 = x_6,\ f_3 = x_7,$ $f_4 = -x_4x_5 + x_3x_6 - x_2x_7,$ $f_5 = a_5x_4 + a_6x_3 - a_7x_2$	$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4,\ g_2 = x_5,\ g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = x_3x_6 - x_2x_7$
37D$_\mathbf{1}$ $[e_1, e_2] = e_5,$ $[e_1, e_3] = e_6,$ $[e_1, e_4] = e_7,$ $[e_2, e_3] = -e_7,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_3, e_4] = -e_5$	$x_5,$ $x_6,$ x_7	$(a_5,\ a_6,\ a_7) \neq 0$ $f_1 = x_5,\ f_2 = x_6,\ f_3 = x_7,$ $f_4 = x_2x_5 + x_3x_6 + x_4x_7,$ $f_5 = a_5x_2 + a_6x_3 + a_7x_4$	$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4,\ g_2 = x_5,\ g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,\ g_5 = x_2x_5 + x_3x_6$
247E $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_5] = e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $x_4x_5 - x_2x_6-$ $-x_3x_6 + x_1x_7$	$(a_5,\ a_6,\ a_7) \neq 0$ $f_1 = x_4 - x_5,\ f_2 = x_6,$ $f_3 = x_7,$ $f_4 = x_4x_5 - x_2x_6 - x_3x_6+$ $+x_1x_7,$ $f_5 = a_4x_5 + a_5x_4 + a_7x_1-$ $-a_6(x_2 + x_3)$	$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4,\ g_2 = x_5,\ g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = -x_2x_6 - x_3x_6 + x_1x_7$
247H$_\mathbf{1}$ $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_5] = e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7,$ $[e_3, e_5] = -e_6$	$x_6,$ $x_7,$ $2x_6^2x_1 + 2x_7^2x_1-$ $-2x_2x_6^2-$ $-2x_3x_6x_7+$ $+x_4^2x_6+$ $+2x_5x_6x_7-$ $-x_5^2x_6$	$(a_6,\ a_7) \neq 0$ $f_1 = x_6,\ f_2 = x_7,$ $f_3 = 2x_6^2x_1 + 2x_7^2x_1-$ $-2x_2x_6^2 - 2x_3x_6x_7+$ $+x_4^2x_6 + 2x_5x_6x_7-$ $= x_5^2x_6,$ $f_4 =$ сдвиг, $f_5 =$ сдвиг	$a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4,\ g_2 = x_5,\ g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = 2x_6^2x_1 + 2x_7^2x_1-$ $-2x_2x_6^2 - 2x_3x_6x_7$
247R $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6,$ $[e_1, e_5] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_6,$ $[e_2, e_5] = e_7,$ $[e_3, e_4] = e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $-x_5x_6^2+$ $+x_2x_7x_6+$ $+x_3x_7x_6-$ $-x_1x_7^2+$ $+x_4x_6^2 - x_4x_5x_7$	$(a_6,\ a_7) \neq 0$ $f_1 = x_6,\ f_2 = x_7,$ $f_3 = -x_5x_6^2 + x_2x_7x_6+$ $+x_3x_7x_6 - x_1x_7^2+$ $+x_4x_6^2 - x_4x_5x_7,$ $f_4 =$ сдвиг, $f_5 =$ сдвиг	$a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4,\ g_2 = x_5,\ g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = x_2x_7x_6 + x_3x_7x_6-$ $-x_1x_7^2 + x_4x_6^2$
2357D$_\mathbf{1}$ $[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_6,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_7,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_4] = -e_6,$ $[e_3, e_4] = -e_7$	$x_6,$ $x_7,$ $x_5^3 + 3x_5x_6^2-$ $-3x_4x_5x_7-$ $-3x_3x_6x_7+$ $+3x_2x_7^2$	$(a_4,\ a_6,\ a_7) \neq 0$ $f_1 = x_5,\ f_2 = x_6,\ f_3 = x_7,$ $f_4 = -x_4x_5 - x_3x_6 + x_2x_7,$ $f_5 = -a_5x_4 - a_6x_3 + a_7x_2$	$a_4 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4,\ g_2 = x_5,\ g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,\ g_5 = -x_3x_6 + x_2x_7$
12457L$_\mathbf{1}$ $[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = -e_6,$ $[e_1, e_6] = e_7,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_5] = -e_6,$ $[e_3, e_5] = -e_7$	$x_7,$ $x_6^2 + 2x_4x_7,$ $x_4^2 + 2x_3x_6+$ $+x_5^2 - 2x_2x_7$	$(a_5,\ a_6,\ a_7) \neq 0$ $f_1 = x_4,\ f_2 = x_6,\ f_3 = x_7,$ $f_4 = 2x_3x_6 + x_5^2 - 2x_2x_7,$ $f_5 = a_6x_3 + a_5x_5 - a_7x_2$	$a_5 = a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4,\ g_2 = x_5,\ g_3 = x_6,$ $g_4 = x_7,$ $g_5 = 2x_3x_6 + x_5^2 - 2x_2x_7$

12457N, $\lambda = 1$ $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_7$, $[e_1, e_5] = e_6$, $[e_1, e_6] = e_7$, $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_2, e_4] = e_6$, $[e_2, e_5] = e_7$, $[e_2, e_6] = e_7$, $[e_3, e_4] = e_7$, $[e_3, e_5] = -e_7$	x_7, $x_7x_4 + x_7x_4-$ $-\frac{1}{2}x_6^2 - x_6x_7$, $3x_3x_6x_7-$ $-3x_3x_7^2-$ $-3x_4x_5x_7+$ $+3x_1x_7^2-$ $-3x_2x_7^2+$ $+3x_4x_6x_7+$ $+3x_5x_6x_7-$ $-\frac{3}{2}x_6^2x_7 - x_6^3$.	$(a_5 - a_5,\ a_6,\ a_7) \neq 0$ $f_1 = x_4 + x_5$, $f_2 = x_6$, $f_3 = x_7$, $f_4 = 2(x_6 - x_7)x_3+$ $+\frac{1}{2}(x_4 - x_5)^2 + 2x_7(x_1 - x_2)$, $f_5 = 2(a_6 - a_7)x_3+$ $+(a_4 - a_5)(x_4 - x_5)+$ $+2a_7(x_1 - x_2)$	$a_4 = a_5,\ a_6 = a_7 = 0$ $g_1 = x_4$, $g_2 = x_5$, $g_3 = x_6$, $g_4 = x_7$, $g_5 = 2(x_6 - x_7)x_3+$ $+2x_7(x_1 - x_2)$

Наборы многочленов в биинволюции строятся не однозначно. В таблице приведены примеры таких многочленов.

□

Можно рассмотреть естественное обобщение известной гипотезы Милованова на биинволютивные наборы.

Гипотеза (Милованов (Обобщенная))**.** *На любой нильпотентной алгебре Ли существуют полные биинволютивные наборы состоящие только из линейных и квадратичных многочленов.*

Подобная задача была рассмотрена в [6], однако, в [6] были построены полные биинволютивные наборы состоящие только из линейных и квадратичных многочленов для некоторых алгебр Ли из [8]. Этот результат был улучшен а именно, в алгебрах

$$\mathbf{247G},\ \mathbf{257R},\ \mathbf{12457N}(\lambda = \mathbf{1}),\ \mathbf{123457I},\ \mathbf{2357D_1},\ \mathbf{12457N_1}(\lambda = \mathbf{1}).$$

были построены наборы из квадратичных и линейных многочленов, которые не получаются методом сдвига аргумента. Таким образом это обобщение не проверено только для следующий нильпотентных 7-ных алгебр Ли:

$$\mathbf{23457D},\ \mathbf{247K},\ \mathbf{247H},\ \mathbf{23457G},\ \mathbf{247H_1},\ \mathbf{247R}.$$

Автор считает, что в перечисленных выше алгебрах сформулированное ранее обобщение гипотезы Милованова не будет выполнено.

Автор благодарен А.А. Ошемкову за постоянное внимание к работе и плодотворные дискуссии, а также А. В. Болсинову за ценные комментарии и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мищенко А. С. Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. 1978. Сер. матем. Т. 42, № 2. С. 396-415.

2. Bolsinov A. V., Zhang P. Jordan–Kronecker invariants of finite–dimensional Lie algebras // Transformation Groups. 2016. Vol. 21, P. 51-86.

3. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. Open problems, questions and challenges in finitedimensional integrable systems // Phil. Trans. R. 2018. vol.376.

4. Sadetov S. T. A proof of the Mishchenko–Fomenko conjecture // Dokl. Math. 2004. Vol. 70, № 1. P. 635-638.

5. Bolsinov A. V. Compatible Poisson brackets on Lie algebras and completeness of families of functions in involution // Math. USSR–Izv. 1992. Vol. 38, № 1. P. 69-90.

6. Ворушилов К. С. Полные наборы полиномов в биинволюции на нильпотентных семимерных алгебрах Ли // Матем. сб. 2021. Т. 212, № 9. 3-17.

7.] Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H. Invariants of real low dimension Lie algebras // J. Mathematical Phys. 1976. vol. 17, № 6. P. 986-994.

8. Ooms A. I. The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven // journal of algebra. 2012. Vol. 365, P. 83-113.

9. Ming-Peng Gong Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (over algebraically closed fields and R) // PhD thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada. http://hdl.handle.net/10012/1148, 1998.

REFERENCES

1. Mishchenko A. S. Fomenko A. T. 1978, "Euler equations on finite-dimensional Lie groups", *Math. USSR-Izv.*, Vol. 12, no. 2, pp. 371–389.

2. Bolsinov A. V., Zhang P. 2016, "Jordan–Kronecker invariants of finite–dimensional Lie algebras", *Transformation Groups.*, Vol. 21, pp. 51–86.

3. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. 2018, "Open problems, questions and challenges in finitedimensional integrable systems" // *Phil. Trans. R.*, Vol. 376.

4. Sadetov S. T. 2004, "A proof of the Mishchenko-–Fomenko conjecture", *Dokl. Math.*, Vol. 70, no. 1, pp. 635–638.

5. Bolsinov A. V. 1992, "Compatible Poisson brackets on Lie algebras and completeness of families of functions in involution", *Math. USSR–Izv.*, Vol. 38, no. 1, pp. 69–90.

6. Vorushilov K. C. 2021, "Complete sets of polynomials in bi-involution on nilpotent seven-dimensional Lie algebras", *Sb. Math.*, Vol. 212, no. 9, pp. 1193–1207.

7. Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H. 1976, "Invariants of real low dimension Lie algebras", *J. Mathematical Phys.* .vol. 17, no. 6, pp. 986–994.

8. Ooms A. I. 2012, "The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven", *Journal of algebra.*, Vol. 365, pp. 83–113.

9. Ming-Peng Gong. 1998, "Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (over algebraically closed fields and R)", *PhD thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada*, http://hdl.handle.net/10012/1148.

Получено: 26.05.2023
Принято в печать: 21.12.2023