ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-70-84

Оценка распределения трещин по размерам и ориентациям по данным о следах трещин[1]

А. Я. Белов-Канель, А. О. Сулейкин

Канель-Белов Алексей Яковлевич — Магнитогорский государственный технический университет имени Г. И. Носова (г. Магнитогорск).
e-mail: kanelster@gmail.com
Сулейкин Аллан Олегович — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: allansuleykin@gmail.com

Аннотация

Для моделирования трещиноватого пародного массива нужно иметь информацию о геометрических характеристиках трещин - их размерах, ориентации, числе.

В результате геологических изысканий и наблюдений в процессе горных работ получают данные о числе и ориентации следов трещин.

Отсюда возникают задачи восстановления пространственной картины расположения трещин на поверхностях или по скважинам. Фактически возникающие здесь задачи являются задачами томографии. Эта работа посвящена их математической постановке и сведению к классическим задачам нахождения обратного преобразования Радона.

В данной работе при рассмотрении задач отыскания распределения трещин только по ориентациям под трещиной будем понимать будем понимать участок плоской поверхности, имеющий произвольную форму.

При решении задачи отыскания совместного распределения трещин по размерам и ориентациям мы будем полагать трещины дискообразными. Если предполагать трещины, скажем, эллиптичными, то задача не решается. Это связано с тем, что эллиптическая трещина задается пятью параметрами: ориентацией плоскости, направлением главных осей и их величинами. Поэтому функция распределения таких трещин по формам и ориентациям есть функция от пяти переменных. С другой стороны, функция распределения следов трещин по размерам и ориентациям есть уже функция от четырех переменных - направления секущей плоскости и величины и направления следа там. Поэтому, задача отыскания распределения трещин для эллиптических трещин, вообще говоря, не решается однозначно, из-за чего приходится предполагать дискообразность.

Ключевые слова: трещины, трещиноватость, скважины, плоскости, направления

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

А. Я. Канель-Белов, А. О. Сулейкин. Оценка распределения трещин по размерам и ориентациям по данным о следах трещин // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 70–84.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-19-20073): https://rscf.ru/project/22-19-20073/

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-70-84

Estimation of the distribution of fractures by sizes and orientations based on data on fracture traces

A. Ya. Kanel-Belov, A. O. Suleykin

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — Magnitogorsk State Nosov Technical University (Magnitogorsk). *e-mail: kanelster@gmail.com*
Suleykin Allan Olegovich — Lomonosov Moscow State Univerisity (Moscow).
e-mail: allansuleykin@gmail.com

Abstract

For modeling a fractured rock mass, it is necessary to have information about the geometric characteristics of the fractures - their sizes, orientations, and numbers.

As a result of geological surveys and observations during mining operations, data are obtained on the number and orientation of fracture traces.

This leads to the tasks of restoring the spatial pattern of the fracture distribution on surfaces or through boreholes. The tasks that actually arise here are tomography tasks. This work is dedicated to their mathematical formulation and reduction to classical problems of finding the inverse Radon transform.

In this work, when considering the tasks of finding the distribution of fractures by orientation alone, under a fracture we will understand a section of a flat surface, having an arbitrary shape.

In solving the problem of finding the joint distribution of fractures by size and orientation, we will consider the fractures to be disc-shaped. Assuming, for example, elliptical fractures makes the problem unsolvable. This is because an elliptical fracture is defined by five parameters: the orientation of the plane, the direction of the main axes, and their magnitudes. Therefore, the distribution function of such fractures by shapes and orientations is a function of five variables. On the other hand, the distribution function of fracture traces by sizes and orientations is already a function of four variables - the direction of the intersecting plane and the size and direction of the trace there. Therefore, the task of finding the distribution of fractures for elliptical fractures, generally speaking, is not solvable unambiguously, which is why disc-shaped fractures are assumed.

Keywords: fractures, fracturing, boreholes, planes, directions

Bibliography: 5 titles.

For citation:
A. Ya. Kanel-Balov, A. O. Suleykin. 2023, "Estimation of the distribution of fractures by sizes and orientations based on data on fracture traces" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 70–84.

1. Отыскание распределения трещин по ориентациям по числу трещин, пересекающих скважину

В этом параграфе мы рассмотрим задачу описания распределения трещин по направлениям по данным о числе трещин, пересекающих скважину. Мы покажем, что эта задача сводится к следующей классической задаче томографии:

Пусть

$$N(\vec{l}) = 1/2\int_{S^2} |(\vec{l},\vec{n})|R(\vec{n})d^2\vec{n}$$

По функции $N(\vec{l})$ найти $R(\vec{n})$.

Здесь $N(\vec{l})$ - математическое ожидание числа трещин, пересекающих скважину, заданную вектором $\vec{l}$ (то есть параллельную $\vec{l}$ и имеющую ту же длину), а величина $R(\vec{n})$ имеет смысл плотности суммарной площади трещин в единице объема с заданным нормальным вектором $\vec{n}$. Интегрирование производится по множеству всех нормалей, т.е. направлений, множитель $1/2$ стоит, т.к. при этом каждая трещина считается дважды: с вектором нормали $\vec{n}$ и $-\vec{n}$.

1.1. Постановка задачи

Вектором $\vec{l}$ мы будем задавать скважину, параллельную вектору $\vec{l}$ и имеющую длину $|\vec{l}|$; через $N(\vec{l})$ мы обозначим матожидание числа пересечений этой скважины с трещинами массива. Мы предполагаем массив однородным, так что $N(\lambda\vec{l}) = |\lambda|N(\vec{l})$.

Зададим параметры трещиноватости. Направление каждой трещины описывается нормальным вектором $\vec{n}$. Введем $R(\vec{n})$ – по сути дела это «плотность суммарной площади трещин, перепендикулярных вектору $\vec{n}$ в единичном объеме».

Определим это понятие формально. Пусть $\Theta(\vec{n},\phi)$ – множество нормальных векторов, образующих с $\vec{n}$ угол, меньший ϕ. $\Theta(\vec{n},\phi)$ можно представить как круг на единичной сфере с центром в точке $\vec{n}$; $|\Theta(\vec{n},\phi)|$ – его площадь. Пусть $\Sigma(\vec{n},\phi)$ – суммарная площадь трещин с нормальным вектором $\Theta(\vec{n},\phi)$, приходящаяся на единицу объема.

Интересующую нас величину $R(\vec{n})$ определим как предел:

$$R(\vec{n}) = \lim_{\phi\to 0}\Sigma\frac{(\vec{n},\phi)}{|\Theta(\vec{n},\phi)|} \tag{1}$$

Очевидно, что $R(\vec{n}) = R(-\vec{n})$

Пусть S – суммарная площадь всех трещин, приходящаяся на единицу объема. Тогда

$$S = 1/2\int_{S^2} R(\vec{n})d^2\vec{n} \tag{2}$$

Где S^2 – множество всех единичных векторов. Множитель $1/2$ введен потому, что каждая трещина учитывается дважды: с нормальным вектором $\vec{n}$ и $-\vec{n}$. Если трещины нормально распределены по направлениям, т.е. $R(\vec{n}) = R - const$, то

$$S = 2\pi R \tag{3}$$

Распределение трещин по направлениям удобно задавать вектор-функцией $R(\vec{n})$, где $|\vec{R}(\vec{n})| = R(\vec{n})$ и $R(\vec{n})||\vec{n}$. При этом $R(-\vec{n}) = -R(\vec{n})$. Положим $R(\lambda\vec{n}) = |\lambda|R(\vec{n})$. Равенство (2) переписывается в виде:

$$S = 1/2 * \int_{S^2} R(\vec{n})d^2\vec{n}$$

Аналогично определяется $\vec{R}(\vec{n})$ для плоской задачи. Вместо суммарной площади в единице объема берется суммарная длина в единице площади. Определим $\Theta(\vec{n},\phi)$ аналогично, при этом это будет уже не площадкой на единичной сфере, а дугой единичной окружности, длину которой мы обозначим $|\Theta(\vec{n},\phi)|$; $\vec{R}(\vec{n})$ определим аналогично.

Формулы (1)-(2) для плоского случая перепишутся без изменений, а формула (3) перепишется в виде:

$$C = \pi R$$

для случая, когда $R(\vec{n}) = R = const$.

Задача отыскания распределения трещин по направлениям формулируется следующим образом: по функции $N(\vec{n})$ определить $R(\vec{n})$. Отметим, что эта задача связана с задачей отыскания распределения трещин по направлениям по данным о следах трещин в плоских сечениях: рассмотрев только направления $\vec{l}$, лежащие в плоскости α, мы, решив плоскую задачу, найдем распределение следов трещин в плоскости α по направлениям. Останется только более трудная пространственная задача отыскания $\vec{R}(\vec{n})$ по данным о сечениях трещин плоскостями.

1.2. Решение прямой задачи и окончательная постановка задачи отыскания распределения трещин по направлениям по числу трещин, пересекающих скважину.

Решим прямую задачу, т.е. выразим $N(\vec{e})$ через $R(\vec{n})$.

Вначале мы рассмотрим случай, когда все трещины представляют собой систему равностоящих параллельных плоскостей: затем общий случай сведем к этому.

Пусть d – расстояние между соседними плоскостями, $R = 1/d$, $\vec{n}_0$ – нормаль к системе плоскостей. Нетрудно убедиться в том, что функция $R(\vec{n})$ имеет вид:

$$R(\vec{n}) = [\delta(\vec{n}, \vec{n}_0) + \delta(\vec{n}, -\vec{n}_0)] \cdot R \tag{4}$$

где δ – дельта-функция на сфере, определяемая соотношением

$$\int_{S^2} \delta(\vec{n}, \vec{n}_0) f(\vec{n}) d^2\vec{n} = f(\vec{n}_0) \tag{5}$$

для любой непрерывной функции f на сфере.

Среднее число $N(\vec{e})$ плоскостей, пересекающих вектор $\vec{e}$ равно

$$N(\vec{e}) = (|\vec{l}|/d) \cdot |cos(\phi)| \tag{6}$$

где ϕ – угол между $\vec{l}$ и $\vec{n}$.

Пусть $|\vec{R}| = R$, $\vec{R}||\vec{n}$. Тогда формулу (8) можно переписать в виде:

$$N(\vec{l}) = |\vec{l} \cdot \vec{R}| \tag{7}$$

Это выражение можно, учитывая (6), записать в более удобном виде:

$$N(\vec{l}) = 1/2 * \int_{S^2} |\vec{l} \cdot \vec{n}| R(\vec{n}) d^2\vec{n}$$

или

$$N(\vec{l}) = 1/2 \int_{S^2} |\vec{l} \cdot \vec{R}| d^2\vec{n}$$

Пусть теперь трещины группируются в несколько систем. И пусть трещины каждой системы являются неограниченными плоскостями, параллельными между собой и находящимися на одинаковых расстояниях.

Пусть $\vec{n}_i$ – выбранная нормаль к i-й системе, d_i – расстояние между соседними плоскостями; i-ю систему удобно обозначать вектором $\vec{R}_i$ таким, что $\vec{R}_i||\vec{n}_i$, $|\vec{R}_i| = 1/d_i$. Формула (6) запишется в виде:

$$R(\vec{n}) = \Sigma_{i=1}^{N} [\delta(\vec{n}; \vec{R}/|\vec{R}|) * |\vec{R}| + \delta(\vec{n}; -\vec{R}/|\vec{R}|)] \tag{8}$$

Равенство (7) имеет место и в случае нескольких систем, поскольку вследствие аддитивности числа точек пересечения, имеем:

$$N(\vec{l}) = \Sigma_{i=1}^{N} |\vec{l} \cdot \vec{R}_i|$$

Для плоского случая формулы (4), (5), (8) запишутся без изменений (только дельта-функция будет определена на окружности), а (6) перепишется в виде:

$$N(\vec{l}) = 1/2 \int_{S^2} |\vec{l} \cdot \vec{R}(\vec{n})| d^2\vec{n}$$

Перейдем теперь к общему случаю.

Прежде всего, заметим, что мера множества прямых данного направления, пересекающих трещину, зависит не от ее формы, а только от площади и ориентации; далее непрерывное распределение по направлениям можно аппроксимировать дискретным; таким образом, (6) справедлива и в общем случае.

Рассуждения, связанные с рассмотрением сначала одной системы трещин, затем нескольких, затем аппроксимацией в дальнейшем будут свернутыми.

Окончательная постановка задачи имеет следующий вид:

Пусть задано соотношение

$$N(\vec{l}) = 1/2 \int_{S^2} |\vec{l} \cdot \vec{n}| R(\vec{n}) d^2\vec{n}$$

в объемном или

$$N(\vec{l}) = 1/2 \int_{S^1} |\vec{l} \cdot \vec{n}| R(\vec{n}) d\vec{n}$$

в плоском случаях.

Далее приведем решение и окончательные формулы задачи по восстановлению $R(\vec{n})$ через $N(\vec{l})$.

1.3. Решение обратной задачи

Пусть $\vec{l} = (x_1, x_2, x_3)$. Заметим, что

$$\frac{\partial^2 N(\vec{l})}{\partial x_i \partial x_j} = \int_{S^2} \delta(|\vec{l}, \vec{n}|) * \langle \vec{l}, \vec{e} \rangle \langle \vec{l}, \vec{e} \rangle R(\vec{n}) d^2\vec{n}$$

отсюда

$$\Delta N(\vec{l}) = 1/2 * \int_{\vec{n} \perp \vec{l}} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) R(\vec{n}) d\vec{n} = 1/2 |\vec{l}| \int_{\vec{n} \perp \vec{l}} R(\vec{n}) d\vec{n} \tag{9}$$

где Δ – оператор Лапласа.

1.3.1. Плоский случай

В плоском случае вместо (9) будет соотношение

$$\Delta N(\vec{l}) = 1/2 |\vec{l}| * 2 * R(\vec{l}_\perp)$$

где $\vec{l}_\perp$ – едииничный вектор, перпендикулярный $\vec{l}$. Отсюда имеем плоской задачи:

$$R(\vec{n}) = \Delta N(\vec{n}_\perp) \tag{10}$$

1.3.2. Пространственный случай

Формула (9) определяет преобразование Радона на сфере. Поэтому $R(\vec{n})$ находится по $N(\vec{l})$ с помощью обратного преобразования Радона.

Приведем формулы. Применив обратное преобразование Радона, получим

$$\vec{R}(\vec{n}) = -1/\pi^2 * \int_{S^2} (|\vec{n},\vec{\xi}| - 1)^{-2} \Delta N(\vec{\xi}) d^2\vec{\xi} \tag{11}$$

Откуда

$$\vec{R}(\vec{n}) = 1/\pi^2 * \int_{S^2} [(|\vec{n}\vec{\xi}| - 1)^{-3} - (|\vec{n}\vec{\xi}| - 1)^{-2}] \; N(\vec{\xi}) d^2\vec{\xi} \tag{12}$$

Формулы (11) – (12) включают в себя сингулярные интегралы.

Задача, подобно другим задачам томографии, поставлена некорректно.

2. Определение геометрических характеристик трещин по данным о распределении следов трещин в сечениях

2.1. Определение необходимых величин

Пусть для каждого сечения с нормальным вектором $\vec{n}$ и каждого вектора $\vec{l} \perp \vec{n}$ известна «плотность математического ожидания» $\hat{N}(\vec{n},\vec{l})$ числа следов трещин, имеющих длину $\vec{l}$ и направление, параллельное $\vec{l}$, в единице площади сечения, задаваемого нормальным вектором $\vec{n}$.

Практически распределение $\hat{N}(\vec{n},\vec{l})$ представляет собой всю существенную информацию, доступную наблюдению в сечении. Поэтому важна задача определения параметров трещиноватости по функции $\hat{N}(\vec{n},\vec{l})$.

Дадим теперь строгое определеелние $\hat{N}(\vec{n},\vec{l})$. Рассмотрим сечение с нормальным вектором $\vec{n}$. Рассмотрим множество $\Theta_{\varepsilon,\phi}$ векторов, образующих с $\vec{l}$ угол, меньший ϕ и отличающийся от $\vec{l}$ по длине меньше, чем на ε.

В этом параграфе задачи отыскания геометрических характеристик трещин по данным о распределении их следов в сечениях сведена к следующим задачам восстановления:

Пусть

$$M(\vec{n}) = 1/2 * \int_{S^2} R(\vec{l}) * |[\vec{l},\vec{n}]| d^2\vec{l} \tag{13}$$

$$K(\vec{n},\vec{l}) = 1/2 * \int_{\vec{e}\perp\vec{l}} R(\vec{e}) * [\vec{n},\vec{e}]^2 \tag{14}$$

где величина R имеет смысл плотности суммарной площади трещин в единице объема с данным вектором нормали, $M(\vec{n})$ – математическое ожидание суммарной длины следов трещин в участке площади $|\vec{l}|$ с вектором нормали параллельным $\vec{l}$; $[\,,\,]$ – векторное произведение.

Интеграл берется по множеству векторов нормали. Смысл множителя 1/2 в заключается в том, что при интегрировании каждая трещина учитывается дважды: с вектором нормали $\vec{n}$ и $-\vec{n}$. Дадим также $\hat{N}(\vec{n},\vec{l})$, имеющей смысл плотности математического ожидания следов трещин длины $|\vec{l}|$, и параллельных $\vec{n}$ на участке единичной площади, заданном нормальным вектором $\vec{n}$, $L(\vec{A},\vec{l})$ – плотности числа следов трещин, имеющих длину $|\vec{l}|$ на площадке, заданной нормальным вектором $\vec{A}$, $S(\vec{n},r)$ – плотность числа трещин радиуса r, имеющих нормальный вектор $\vec{n}$. $S(r)$ – соответственно, плотность числа всех трещин радиуса r в пересчете на единицу объема.

Приведем формулы обращения для (13), (14):

Пусть $K^{\varepsilon,\phi}_{\vec{n},\vec{l}}$ – число следов трещин с вектором из этого множества в единице площади.

Величину $\hat{N}(\vec{n},\vec{l})$ определим как предел:

$$\hat{N}(\vec{n},\vec{l}) = \lim_{\varepsilon\to 0,\phi\to 0} K^{\varepsilon,\phi}_{\vec{n},\vec{l}}/4\varepsilon\phi$$

При нахождении распределения трещин по размерам и ориентациям приходится предполагать, что трещины дискообразны. В предположении, что трещины эллиптичны задача не разрешима. Причина состоит в том, что $\hat{N}(\vec{n},\vec{l})$ – функция от четырех параметров: два описывают направление $\vec{n}$, два описывают $\vec{l}$. Уже эллиптические трещины зависят от пяти параметров: 2 параметра описывают направление, 2 параметра – величины осей, 1 – их поворот.

Очевидно, что $\hat{N}(\pm\vec{n},\pm\vec{l}) = \hat{N}(\vec{n},\vec{l})$. Положим $N(\lambda\vec{n},\vec{l}) = |\lambda|N(\vec{n},\vec{l})$.

Смысл $N(\vec{a},\vec{b})$ – это плотность числа следов параллельных и равных по модулю вектору $\vec{b}$ в сечении площади $|\vec{a}|$ с нормальным вектором, параллельным $\vec{a}$.

Функция $N(\vec{a},\vec{b})$ «помнит» всю информацию о следах. Нам понадобятся функции, «помнящие» только часть этой информации.

$$K(\vec{A},\vec{l}) = \int_0^{+\infty} \lambda\hat{N}(\vec{A},\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}\cdot\lambda)d\lambda$$

$K(\vec{A},\vec{l})$ – имеет смысл «плотности суммарной длины следов трещин, параллельных $\vec{l}$ в сечении площади $|\vec{A}|$ с нормальным вектором, параллельным $\vec{A}$».

$$M(\vec{A}) = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} N(\vec{A},\vec{l})d|\vec{l}|d\phi$$

где ϕ – аргумент $\vec{l}$.

Величина $M(\vec{A})$ имеет смысл математического ожидания суммарной длины всех следов трещин в элементе площади, определяемым вектором $\vec{A}$. Очевидно, что при $\lambda \neq 0$

$$L(\lambda\vec{A},\vec{l}) = |\lambda|L(\vec{A},\vec{l}),\ M(\lambda\vec{A}) = |\lambda| * M(\vec{A})$$

$$K(\lambda\vec{A},\vec{l}) = |\lambda|K(\vec{A},\vec{l}),\ K(\vec{A},\lambda\vec{l}) = |\lambda|K(\vec{A},\vec{l})$$

И, кроме того,

$$M(\vec{A}) = \int_0^{+\infty}\vec{l}\cdot L(\vec{A},\vec{l})dl = \int_{|\vec{l}|=1} K(\vec{A},\vec{l})d\vec{l}$$

Определим теперь функцию $S(\vec{n},r)$, описывающую распределение трещин и по размерам, и по направлениям, имеющую смысл плотности числа дискообразных трещин радиуса r с вектором нормали n, отнесенных к единице объема.

Дадим теперь строгое определение.

Пусть $R^{\Delta r\,\Delta\phi}_{\vec{n},\vec{r}}$ – число трещин в единице объема, нормальный вектор к которым образуется с $\vec{n}$ угол, меньший $\Delta\phi$ и радиус которых отличается от r не больше чем на Δr.

Тогда

$$S(\vec{n},r) = \lim_{\Delta r,\,\Delta\phi\to 0} R^{\Delta r\,\Delta\phi}_{\vec{n},\vec{r}}/2\Delta r|\Theta(\vec{n},\phi)|$$

где $\Theta(\vec{n},\vec{r})$ была определена ранее. Очевидно, что $S(-\vec{n},\vec{r}) = S(\vec{n},\vec{r})$ и если все трещины дискообразны, то из определения $S(\vec{n},\vec{r})$ непосредственно следует, что

$$R(\vec{n}) = \int_O S(\vec{n},r)\pi r^2 dr$$

С каждой дискообразной трещиной радиуса r и нормалью $\vec{n}$ удобно связать вектор r, параллельный $\vec{n}$, где $|\vec{r}| = r$. Тогда вместо $S(\vec{n},r)$ будем рассматривать функцию $S(\vec{r})$. Положим

$$L(l) = \int_{S^2} L(\vec{n},l)d^2\vec{n}$$

Функция $L(l)$ имеет смысл распределения следов трещин по длинам.

Введем теперь функцию $P(r)$ распределения трещин по радиусам.

Пусть $W_r^{\Delta r}$ – среднее число трещин в единице объема, чей радиус отличается от r не более чем на Δr. Функцию $P(r)$ мы определим как предел

$$P(r) = \lim W_r^{\Delta r}/2\Delta r$$

2.2. Постановка задач

Рассмотрим следующие задачи:

1. По $\hat{N}(\vec{n},\vec{l})$ найти $S(\vec{r})$
2. По $K(\vec{n},\vec{l})$ найти $R(\vec{n})$
3. По $M(\vec{n})$ найти $R(\vec{n})$
4. По $L(\vec{n},l)$ найти $P(r)$ 4'. по $L(l)$ найти $P(r)$
5. По $L(\vec{n},l)$ найти $S(\vec{R})$

Задачи $1-5$, как и все задачи томографии некорректны в том смысле, в каком смысле некорректны задачи численного дифференцирования.

Кроме того, задачи $1, 2, 4$ переопределены: функция $\hat{N}(\vec{n},\vec{l})$ зависит от четырех параметров, $S(\vec{R})$ – от трех, $K(\vec{n},\vec{l})$ – от трех, $R(\vec{n})$ – от двух, $L(\vec{n},l)$ – от трех, $P(r)$ – от одного. Поэтому функции $\hat{N}$, N, K, L, M не могут быть произвольными. Так, функция $K(\vec{n},\vec{l})$ полностью определяется $R(\vec{n})$, которая зависит от меньшего числа параметров, чем $K(\vec{n},\vec{l})$. Функция $\hat{N}(\vec{n},\vec{l})$ зависит от большего числа параметров, чем функция $S(\vec{R})$, которая ее определяет.

Наконец, тот факт, что $N(\vec{l})$ и $M(\vec{l})$ не могут быть произвольными, следует из того, что не каждый выпуклый центрально симметричный компакт штейнеровский.

В дальнейшем мы сначала рассмотрим только задачи нахождения распределения трещин по ориентациям, затем в следующем параграфе мы решим совместную задачу, начав со случая, когда распределение следов трещин данной ориентации нам известно.

2.3. Отыскание распределения трещин только по направлениям

2.3.1. Связь с плоской задачей и задачей определения $R(\vec{n})$ по $N(\vec{l})$

Рассмотрим направления $\vec{l}$, параллельные плоскости α и сечение массива плоскостью α. Мы имеем плоскую задачу. Покажем, что

$$M(\vec{A}) = \pi/2|\vec{A}| \int_{\vec{l}\perp\vec{A};\,|\vec{l}|=1} N(\vec{l}) \tag{15}$$

Воспользуемся аддитивностью и тем что $M(\vec{A})$, как и $N(\vec{l})$, не зависит от формы трещин, и с помощью тех же рассуждений, что и в предыдущем параграфе, установим, что формулу (15) достаточно проверить для случая, когда трещины образуют систему параллельных плоскостей. Далее, рассматривая только плоскость $||\alpha$, мы сводим задачу к следующей.

Пусть M – средняя суммарная длина отрезков в единице площади. $N(\vec{l})$ имеет тот же смысл, только задача уже плоская, доказать (15).

Тем самым задача определения $R(\vec{n})$ по $M(\vec{n})$ «решена», поскольку формула (15) по сути дела является преобразованием Радона на сфере: решение имеется с помощью обратного преобразования.

Приведем соответствующие формулы.

$$N(\vec{l}) = 1/2 \int_{S^2} |\vec{l} \cdot \vec{n}| R(\vec{n}) d^2\vec{n}$$

$$R(\vec{n}) = -1/\pi^2 \int_{S^2} [(\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-2} - (\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-3}] N(\vec{\xi}) d^2\vec{\xi}$$

Из (15) и формулы для обратного преобразования Радона следует, что

$$N(\vec{l}) = -1/\pi^3 \int_{S^2} (\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-2} M(\vec{\xi}) d^2\vec{\xi}$$

Из формул выше следует, что

$$R(\vec{n}) = 1/\pi^5 \int_{S^2} [(\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-2} - (\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-3}] d^2\vec{\xi} *$$

$$* \int_{S^2} (\vec{\xi} \cdot \vec{n} - 1)^{-2} M(\vec{x}) d^2\vec{x}$$

После преобразований имеем:

$$R(\vec{n}) = -1/\pi^5 \int_{S^2} \Phi(\vec{n}, \vec{x}) d^2\vec{x} \cdot M(\vec{x})$$

где

$$\Phi(\vec{n}, \vec{x}) = \int_{S^2} (\vec{\xi} \cdot \vec{\eta} - 1)^{-2} M(\vec{\eta}) d^2\vec{\eta} [(\vec{\xi} * \vec{n} - 1)^{-2} - (\vec{\xi} * \vec{n} - 1)^{-3}] d^2\vec{\xi}$$

В силу симметрии $\Phi(\vec{n}, \vec{x})$ зависит от угла ϕ_0 между $\vec{n}$ и $\vec{l}$. По той же причине можно считать, что $\vec{x} = \vec{e}_x$, а $\vec{n}$ лежит в плоскости XOY.

Перейдя к полярным координатам, получаем

$$\Phi(\vec{n}, \vec{x}) = \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} \sin\phi (1 - |\sin\phi \sin\phi|) * (1 - |\sin(\phi + \phi_0) \sin\phi|) d\phi_0$$

Заметим, что полученные формулы практически малопригодны из-за большого числа измерений и низкой точности. В них входит сингулярный интеграл большой степени. Здесь они приведены для полноты.

Выясним теперь связь между между $K(\vec{n}, \vec{l})$ и $N(\vec{l})$. Для этого можно воспользоваться результатами предыдущего параграфа для плоской задачи. А именно, при фиксированном $\vec{n}_0$ функция $K(\vec{n}_0, \vec{l})$ – это не что иное, как плоский аналог функции $R(\vec{n})$. Из формулы (19) тогда следует, что $K(\vec{n}, \vec{l}) = \Delta N(\vec{e})$, где $\vec{e} \perp \vec{l}$, оператор Лапласа берется в плоскости, перпендикулярной $\vec{n}$. Это соотношение можно записать несколько более красиво. Пусть $\vec{a}(x)$ – векторное поле. Введем оператор $[\partial/\partial\vec{a}]^k$.

Для произвольной функции f определим $[\partial/\partial\vec{a}]^k f(x)$ следующим образом: в точке x найдем $\vec{A} = \vec{a}(x)$. Затем, считая $\vec{A}$ постоянным вектором найдем $g(x) = (\partial/\partial\vec{a})^k f(x)$.

Положим $[\partial/\partial\vec{a}]^k f(x) = g(x)$.

Если $\vec{a}(x)$ – постоянный вектор, что $\partial/\partial a^k = [\partial/\partial a]^k$, однако в других случаях $[\partial/\partial\vec{a}]^k \cdot \cdot [\partial/\partial\vec{a}]^1 \neq [\partial/\partial\vec{a}]^{k+1}$.

Поскольку $[\partial/\partial\vec{n}]^2 N(\vec{n}) = 0$, то соотношение (19) для плоской задачи перепишется в виде $R(\vec{n}) = 1/2[\partial/\partial\vec{n}_\perp]^2 N(\vec{n})$, где $\vec{n}_\perp \perp \vec{n}$ и $|\vec{n}| = 1$.

В этих обозначениях связь между K и N можно записать следующим образом:

$$K(\vec{n}, \vec{l}) = [\partial/\partial\vec{l}]^2 N([\vec{n}, \vec{l}]), |\vec{l}| = 1$$

или в общем случае:

$$K(\vec{n}, \vec{l}) = [\partial/\partial\vec{l}/|\vec{l}|]^2 N([\vec{n}, \vec{l}/|\vec{l}|])$$

2.3.2. Решение прямых задач

Чтобы завершить рассмотрение $M(\vec{n})$, покажем, что

$$M(\vec{n}) = 1/2 \int_{S^2} R(\vec{l})|\vec{l},\vec{n}|d\vec{l} \tag{16}$$

Рассуждая, как и в предыдущем параграфе, видим, что (16) достаточно установить для одной системы трещин с единичным расстоянием между соседними трещинами. Тогда $R(\vec{e}) = \delta(\vec{l},\vec{n}_0) + \delta(\vec{l},-\vec{n}_0)$, где $\vec{n}_0$ – вектор нормали к системе, и равенство (16) запишется в виде:

$$M(\vec{n}) = |[\vec{n},\vec{n}_0]| = |\sin\phi| \tag{17}$$

где ϕ – угол между $\vec{n}$ и $\vec{n}_0$.

(17) вытекает из того факта, что следы трещин на плоскости, образующей с нашей системой угол ϕ, образуют систему параллельных прямых с расстоянием $l/|\sin\phi|$ между соседними прямыми, а тем самым длина следов, приходящихся на единицу площади сечения, будет равна $|\sin\phi|/d$. Покажем, что

$$K(\vec{n},\vec{l}) = 1/2 \int_{\vec{e}\perp\vec{l}} R(\vec{e})[\vec{n},\vec{e}]^2$$

Рассмотрим плоскость β с нормальным вектором $\vec{n}$ и множеством $M^{d\phi}$ плоскостей, чье пересечение с плоскостью β образует с $\vec{l}$ угол меньший $d\phi$.

Из соотношения симметрии следует, что без ограничения общности можно считать, что $\vec{n}||(OZ)$, $\vec{l}||(OY)$. Тогда множество нормалей $\mathfrak{D}$ к плоскостям из $M^{d\phi}$ образует сферический сектор с углом $2d\phi$. Пусть угол ψ – «угол падения», отсчитывается от северного полюса, $90^0 - \psi$ – это широта, а угол ϕ – «долгота» отсчитывается от оси (OX) по часовой стрелке. Нам понадобится одно наблюдение.

Рассмотрим малую по размерам область на сфере, dS – ее площадь, ψ_0 – значение ψ в этой области.

R_0 – значение функции распределения трещин по направлениям в этой области, тогда средняя площадь трещин, нормаль к которым принадлежит этой области в единице объема равна $R_0 dS$.

Относительное число следов этих трещин в единице площади будет равно $R_0 dS\sin\phi$, как это следует из доказательства формулы (16).

Перейдем теперь к доказательству (17).

Пересечение $\mathfrak{D}$ с окружностью $\phi_0 = const$ есть пара дуг длины $2\sin\phi_0 d\phi$ каждая; таким образом, площадь участка сферы, задаваемая неравенствами $|\phi-\phi_0| < d\phi$, $|\phi| < d\phi$, равна $4d\psi d\phi|sin\phi_0|$, средняя площадь поверхности трещин с соответствующей нормалью в пересчете на единицу объема будет равна $4R_{\psi,0}\sin^2\phi_0 d\psi d\phi$, а суммарная длина их следов на плоскости β в единице площади будет равна $R_{\psi_0,0}\sin^2\phi d(2\psi)d(2\phi)$.

Отсюда следует, что суммарная длина следов трещин из M в единице площади dK равна

$$dK = d(2\phi!) * \int_{\vec{e}\perp\vec{l}} R(\vec{e})sin^2\phi d\phi$$

И поскольку $\sin\phi = |[\vec{n},\vec{e}]|$, то это выражение можно переписать в виде:

$$\frac{dK}{d(2\phi)} = \int_{\vec{e}\perp\vec{l}} R(\vec{e})([n,e])^2$$

что равносильно (17).

Из (17) следует формула

$$\int_{\vec{n}\perp\vec{l}} R(\vec{e})K(\vec{n},\vec{l}) = \pi/2 \cdot \int_{\vec{e}\perp\vec{l}} R(\vec{e})$$

В самом деле:

$$\int_{\vec{n}\perp\vec{l}} K(\vec{n},\vec{l}) = 1/2 * \int_{\vec{e}\perp\vec{l}} R(\vec{e}) \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi = \pi/2 \int_{\vec{e}\perp\vec{l}} R(\vec{e}) d\vec{e}$$

2.3.3. Решение обратных задач

Нам осталось по $K(\vec{n},\vec{l})$ определить $R(\vec{e})$. Это можно сделать с помощью обратного преобразования Радона, примененного к функции

$$\pi/2 \int_{\vec{e}\perp\vec{l}} R(\vec{e}) d\vec{e}$$

Выпишем ответ:

$$R(\vec{e}) = -1/\pi^3 \int_{S^2} (|\vec{e}\cdot\vec{l}| - 1)^{-2} [\int_{\vec{n}\perp\vec{l}} K(\vec{n},\vec{l}) d\vec{n}]$$

3. Отыскание распределения трещин по размерам и ориентациям

В этом параграфе будет решаться задача отыскания распределения дискообразных трещин по размерам исходя из данных о распределении по размерам следов трещин в сечениях.

Для задач 1, 4, и 5, поставленных в предыдущем параграфе, будут приведены явные формулы.

Сначала мы решим задачу отыскания распределения трещин только по размерам, затем воспользуемся полученным результатом для решения совместной задачи.

Задача разбивается на 2 задачи и сводится, таким образом, во-первых, к случаю, когда все трещины параллельны, во-вторых, к уже разобранной задаче отыскания распределения по направлениям.

В случае, когда все трещины параллельны, величины $g(r)$ и $\phi(l)$, имеющие смысл соответственно плотности относительного числа дискообразных трещин радиуса r, и плотности относительного числа сечений длины l, оказывается, $\phi(l)$ не зависит от направления секущей плоскости. Покажем, что:

$$\phi(2l) = 1/\alpha \int_l \frac{g(r)\vec{l}dr}{r\sqrt{r^2-l^2}} \tag{18}$$

Задача определения g по ϕ есть классическая задача томографии, к которой сводятся задачи отыскания распределения трещин по размерам.

В общем случае вводится величина $Q(\vec{A},\vec{l},r)$, имеющая смысл плотности математического ожидания числа трещин радиуса r, след которого в сечении, заданном вектором $\vec{A}$, параллелен вектору $\vec{l}$. Величины Q и N связаны равенством, аналогичном (18):

$$N(A,l) = 1/2 \int_l \frac{Q(\vec{A},\vec{l},r)\vec{l}dr}{r\sqrt{r^2-l^2}} \tag{19}$$

В свою очередь, аналогично

$$Q(\vec{A},\vec{l},r) = \int_{\vec{e}\perp\vec{l}} S(\vec{l},r)|[\vec{A},\vec{l}]|^2 \tag{20}$$

Ниже приводится вывод обращения формул (19), (20) и итоговая формула, выражающая $S(\vec{n},r)$ через $\hat{N}(\vec{A},\vec{l})$.

3.1. Отыскание распределения трещин только по размерам

3.1.1. Простейший случай

Найдем распределение размеров сечений для одной дискообразной трещины радиуса r.

Нетрудно увидеть, что $P_r(x)$ – плотность вероятности того, что сечение имеет длину x, описывается равенствами:

$$P_r(2l) = \begin{cases} \dfrac{1}{r\sqrt{r^2 - l^2}}, & 0 < 1 < r \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{21}$$

Равенство (21) справедливо также в случае, центры дискообразных трещин имеют пуассоновское распределение, а также в случае, когда дисков конечное число, а все сдвиги секущей плоскости равновероятны. Т.е. мы предположим, что множество возможных сдвигов ограничено, является отрезком и вероятностная мера на этом множестве равномерная. При этом все сдвиги секущей плоскости, пересекающие наш набор трещин, принадлежат рассматриваемому множеству сдвигов.

В последнем случае (21) это следует из формулы полной вероятности:

$$P_r(l) = \Sigma P(D_i) \cdot P(D_i|l) = [\Sigma P(D_i)]\frac{1/2}{r\sqrt{r^2 - (1/4)^2}} = \frac{1/2}{r\sqrt{r^2 - (1/4)^2}}$$

поскольку $\Sigma P(D_i) = 1$.

Здесь $P(D_i)$ – вероятность того, что сечение принадлежит i-ому диску, $P(D_i|l)$ – соответствующая условная плотность вероятности.

В дальнейшем мы будем предполагать, «равномерную равновероятность» сдвигов секущей плоскости.

3.1.2. Случай, когда все трещины параллельны

Поскольку ни распределение сечений по длинам, ни отношение вероятностей быть пересеченными для дискообразных параллельных трещин не зависит от угла наклона секущей плоскости, достаточно рассмотреть случай, когда плоскость сечения перпендикулярна плоскости трещин.

Пусть $D(r)$ – плотность относительного числа дискообразных трещин радиуса r, $\phi(l)$ – плотность относительного числа сечений длины l. Иными словами, $\phi(l)$ и $D(r)$ определяются как пределы:

$$\phi(l) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{W_l^{\Delta l}}{\Delta l}$$

$$D(r) = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\hat{W}_r^{\Delta r}}{\Delta r}$$

где $W_l^{\Delta l}$ – относительное число следов, длина которых заключена между l и $l + \Delta l$. $\hat{W}_r^{\Delta r}$ определяется аналогично.

Пусть $G(r)$ – распределение трещин, пересекающих данную фиксированную секущую плоскость β по радиусам. Как легко видеть:

$$G(r) = g(r)r/\alpha \tag{22}$$

где $\alpha = \int_o^{+\infty} rg(r)dr$.

Поскольку для двух трещин отношение вероятностей быть пересеченными равно отношению радиусов, отношение плотностей вероятностей для трещин, пересекающих β радиусов r_1 и r_2 будет равно $(g(r_1)/r_1) : (g(r_2)/r_2)$, откуда следует (22).

Из (22) вытекает равенство:

$$\phi(2l) = 1/\alpha \int_l \frac{g(r)dr}{r\sqrt{r^2 - l^2}} \tag{23}$$

Нам понадобится в дальнейшем также $\phi(2l)$ через $\overline{g}(r)$

$$\phi(2l) = 1/\alpha \int_l \frac{\overline{g}(r)ldr}{r\sqrt{r^2 - l^2}} \tag{24}$$

Формулы (23), (24) выше дают решение прямой задачи – задачи отыскания ϕ по g. Перейдем теперь к рассмотрению обратной задачи. Сведем ее к задаче нахождения обратного преобразования Радона на плоскости.

Равенства (23), (24) можно переписать в виде:

$$\phi(2l)/2l = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\sqrt{1+t^2})dt$$

где $H(x) = g(x)/x^2$.

Положим $\hat{H}(x,y) = H(\sqrt{x^2+y^2})$, тогда $\phi(t)/t = \int_L \hat{H}(x,y)$.

где L – прямая, проходящая на расстоянии $t/2$ от начала координат.

Функция $\hat{H}$ по функции ϕ восстанавливается обратным преобразованием Радона. Воспользовавшись формулой обращения, получим:

$$H(t) = -1/\pi^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(2|l|)}{|l|}(l - r\cos\psi)^{-2}dl$$

отсюда

$$g(r) = -\alpha r/\pi^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(2|l|)}{|l|}(l - r\cos\psi)^{-2}dl \tag{25}$$

и, соответственно,

$$g(r) = -r^2/\pi^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(2|l|)}{|l|}(l - r\cos\psi)^{-2}dl \tag{26}$$

3.2. Отыскание совместного распределения трещин по размерам и ориентациям

Перейдем теперь к задаче отыскания совместного распределения. Сведем эту задачу к уже разобранным. План действий таков: рассмотрим «следы трещин, параллельные $\vec{l}$», из распределения этих следов по размерам найдем распределение соответствующих трещин по радиусам; затем, перейдя к рассмотрению только трещин радиуса r, мы найдем их распределение по направлениям. Все вместе нам дает функцию $S(r)$.

Пусть $Q(\vec{A},\vec{l},r)$ – «плотность математического ожидания числа трещин радиуса r на площадке, заданной вектором $\vec{A}$, след которых параллелен e».

Пусть $\Pi^{d\phi,dr}_{\vec{A},\vec{l},r}$ – математическое ожидание числа трещин, радиус которых отличается от r не более чем на dr, а направление следов на площадке, заданной вектором $\vec{A}$ образует с $\vec{l}$ угол не больше $d\phi$. Величину Q мы определим как предел:

$$Q(\vec{A},\vec{l},r) = \lim_{d\phi,\, dr \to 0} \Pi^{d\phi,dr}_{\vec{A},\vec{l},r}/4d\phi dr$$

Формулы $(23), (24), (25), (26)$ перепишутся в виде

$$\hat{N}(\vec{A},\vec{l}) = |\vec{l}|/2 \cdot \int_1^{+\infty} \frac{Q(\vec{A},\vec{l},r)dr}{r\sqrt{r^2-l^2}}$$

$$Q(\vec{A},\vec{l},r) = -r^2/2\pi^2 \int_0^{\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{N}(\vec{A},2|\beta|\vec{l}/|\vec{l}|)}{|\beta|}(\beta - r\cos\phi)^{-2}d\beta$$

Поскольку математическое ожидание длины следы трещины радиуса r равно $\pi r^2/2r$ или $\pi r/2$, $T(\vec{A},\vec{l},r)$ – плотность матожидания суммарной длины следов трещин радиуса r, параллельных $\vec{l}$ на площадке заданной $\vec{A}$ равна $Q(\vec{A},\vec{l},r)\cdot \pi r/2$.

Соотношения выше переписываются в виде:

$$T(\vec{A},\vec{l},r) = 1/2 \int_{\vec{e}\perp\vec{l}} \overline{S}(\vec{l},r) * [\vec{A},\vec{e}]^2$$

$$S(\vec{n},r) = 1/4\pi^5 \int_{S^2} (|\vec{n}\cdot\vec{e}-1)^{-2} d^2\vec{e} * \int_{\vec{x}\perp\vec{l}} d\vec{x} \int_0^{\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{N}(\vec{A},2|\beta|\vec{l}/|\vec{l}|)}{|\beta|}(\beta - r\cos\phi)^{-2}d\beta$$

Теперь перейдем к задачам 4,5: задача отыскания $P(r)$ по $L(l)$ полностью аналогична случаю, когда все трещины параллельны, поскольку распределение длин сечений для одной дискообразной трещины не зависит от направления секущей плоскости. Связь между $P(r)$ и $L(l)$ такая же, как между g и ϕ. Выпишем соотношения:

$$L(2l) = 1/\alpha \int_1^{+\infty} \frac{P(r)dr}{r\sqrt{r^2-l^2}}$$

$$P(r) = -\alpha r/2\pi^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(2|l|)}{|l|}(l - r\cos\psi)^{-2}dl$$

Перейдем теперь к задаче 5: задаче определения $S(\vec{n},r)$ по $L(\vec{n},l)$. Эта задача аналогична задаче 3.

Вывод формул полностью аналогичен выводу формул для решения задачи 1. В итоге имеем:

$$S(\vec{n},r) = -1/4\pi^8 \int_{S^2} \Phi(\vec{n},\vec{\eta})d^2\vec{\eta} * \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L(\vec{n},\beta)}{|\beta|}(\beta - r\cos\psi)^{-2}d\beta$$

где $\Phi(\vec{n},\vec{\eta})$ определяется равенством:

$$\Phi(\vec{n},\vec{\eta}) = \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} \sin\phi(1-|\sin\phi\sin\phi|)(1-|\sin(\phi+\phi_0)\sin\phi|)d\phi_0$$

В заключение хочется сделать несколько замечаний. Хотя для восстановления функции $R(\vec{n})$ достаточно знать только количество трещин в единице площади сечения, а для восстановления $S(\vec{n},r)$ – еще и распределение следов по размерам, учет ориентации следов приводит к большей точности: в задачах 1 и 2 соответствующий оператор восстановления имеет на два порядка меньшую сингулярность, чем в соответствующих задачах 3,5. Разделение задач восстановления размеров и ориентации хорошо еще и потому, что количество следов трещин в сечении велико.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kendall M., Moran, P. Geometric probabilities // M.:Nauka, 1972.
2. Santaló, L. A. Integral geometry and geometric probability // M.:Nauka, 1983.
3. Matheron, G. Random sets and integral geometry // M.:Mir, 1978.
4. Anoshchenko, N. N. Geometric analysis of fracturing and blockiness in deposits of facing stone // M.:MGI, 1983.
5. Ambartzumian, R.V., Mecke, J. & Stoyan, D. Introduction to stochastic geometry // M.:Nauka, 1989.

REFERENCES

1. Kendall, M. & Moran, P. 1972, “Geometric probabilities”, *Nauka, Moscow*.
2. Santaló, L. A. 1983, “Integral geometry and geometric probability”, *Nauka*, Moscow.
3. Matheron, G. 1978, “Random sets and integral geometry”, *Mir*, Moscow.
4. Anoshchenko, N. N. 1983, “Geometric analysis of fracturing and blockiness in deposits of facing stone”, *Moscow State Geological Prospecting University*, Moscow.
5. Ambartzumian, R.V., Mecke, J. & Stoyan, D. 1989, “Introduction to stochastic geometry”, *Nauka*, Moscow.

Получено: 05.09.2023
Принято в печать: 21.12.2023