

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 5.

УДК 517.28

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-49-69

## Доказательство правила Лопиталья

И. Б. Казаков

**Казаков Илья Борисович** — кандидат физико-математических наук, Московский физико-технический институт; Российский экономический университет им. Плеханова (г. Москва).  
*e-mail: i\_b\_kazakov@mail.ru*

## Аннотация

В настоящей работе представлено новое доказательство правила Лопиталья, предлагаемое для изучения преподавателям, читающим курс математического анализа. Соответствующая теорема сформулирована и доказана для 6 пределов  $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow a+0$ ,  $x \rightarrow a-0$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , для 2 неопределённостей вида  $\frac{0}{0}$  и  $\frac{\infty}{\infty}$  и для 4 значений предела  $A \in (-\infty, +\infty)$ ,  $A = -\infty$ ,  $A = +\infty$ ,  $A = \infty$ , т. е. представленная теорема покрывает  $6 * 2 * 4 = 48$  частных случаев правила Лопиталья. Представленное доказательство отличается от многих традиционных доказательств тем, что кроме определения предела функции по Коши в нём также используется определение предела функции по Гейне. В качестве важного вспомогательного утверждения, позволяющего применить определение предела функции по Гейне, используется теорема о единственном частичном пределе. Данное утверждение позволяет также применить арифметические свойства пределов последовательности в доказательстве для неопределённости вида  $\frac{\infty}{\infty}$  и предела  $x \rightarrow a+0$ , т. е. для случая, где достигается наиболее существенное упрощение доказательства.

*Ключевые слова:* Правило Лопиталья, частичные пределы, определение предела функции по Гейне, математический анализ для студентов первого курса

*Библиография:* 16 названий.

## Для цитирования:

И. Б. Казаков. Доказательство правила Лопиталья // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 49–69.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 5.

UDC 517.28

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-49-69

## A proof of the L'Hôpital's rule

I. B. Kazakov

**Kazakov Ilya Borisovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology; Plehanov Russian State University (Moscow).  
*e-mail: i\_b\_kazakov@mail.ru*

### Abstract

In this paper a new proof of the L'Hôpital's rule proposed for calculus lecturers is presented. The according theorem is formulated and proved for the six types of limit:  $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow a + 0$ ,  $x \rightarrow a - 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ , for the two indeterminate forms  $\frac{0}{0}$  and  $\frac{\infty}{\infty}$  and also for four values of limit  $A \in (-\infty, +\infty)$ ,  $A = -\infty$ ,  $A = +\infty$ ,  $A = \infty$ . Thus, the theorem covers  $6 * 2 * 4 = 48$  cases of the L'Hôpital's rule. The presented proof of the theorem differs from the traditional ones by using not only the Cuchy definition of limit a function but also the Heine one. The single partial limit theorem is used as the important auxiliary statement allowing to apply the Heine definition of limit. This statement also allows to apply arithmetic properties of sequence limits to the proof of the indeterminate form  $\frac{\infty}{\infty}$  and the limit  $x \rightarrow a + 0$ , i.e. for the case where the most significant simplification is achieved.

**Keywords:** the L'Hôpital's rule, partial limits, Heine definition of a limit of a function, calculus for the first-year students

**Bibliography:** 16 titles.

### For citation:

I. B. Kazakov, 2023, "A proof of the L'Hôpital's rule", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 49–69.

## 1. Введение

В настоящей работе представлено доказательство правила Лопиталя, использующее определение предела функции по Гейне, а также свойства частичных пределов последовательности. Используемые утверждения входят в стандартный курс математического анализа для технических специальностей, и, следовательно, представляемое доказательство вполне может быть изучено студентами первого курса. С точки зрения автора, данное доказательство является существенно более простым, чем многие традиционные доказательства (см. [4], [9], [14], [8], [2]). Отдельным образом следует упомянуть принадлежащее В.А.Ходакову доказательство, представленное в учебнике [6]. Однако оно, также как и другие доказательства, использует только лишь определение предела функции по Коши, а не определение предела функции по Гейне. Таким образом, содержание настоящей работы может быть использовано преподавателями математического анализа с целью упрощения изложения и сокращения лекционного времени.

Наиболее существенное упрощение достигается для неопределённости  $\frac{\infty}{\infty}$ . Доказательство для предела  $x \rightarrow a + 0$  и для неопределённости  $\frac{\infty}{\infty}$ , являющееся в настоящей работе наиболее важным, представлено в утверждении 33.

В разделе 2 сформулирована соответствующая теорема, доказательство которой изложено в разделе 3. Заключительные замечания представлены в разделе 4.

## 2. Формулировка теоремы

В курсе математического анализа рассматриваются двусторонние пределы, односторонние пределы, пределы к бесконечностям со знаком и пределы к бесконечности без знака, то есть пределы по базам  $x \rightarrow a + 0$ ,  $x \rightarrow a - 0$ ,  $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Значение предела может быть либо конечным действительным числом, либо бесконечностью со знаком либо бесконечностью без знака. Неопределённости в правиле Лопиталя бывают двух видов:  $\frac{0}{0}$  и  $\frac{\infty}{\infty}$ . Представим формулировку теоремы, покрывающую все упомянутые случаи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть:

1.  $\mathfrak{B}$  — база одного из следующих шести видов:  $x \rightarrow a + 0$ ,  $x \rightarrow a - 0$ ,  $x \rightarrow a$  (где  $a \in (-\infty, +\infty)$ ),  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ , и выполнено  $B \in \mathfrak{B}$ ;
2.  $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $B \in \mathfrak{B}$ ;
3.  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ .

Если выполнены следующие условия:

1. Функции  $f, g$  дифференцируемы на множестве  $B$ ;
2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) \lim_{\mathfrak{B}} f(x) = \lim_{\mathfrak{B}} g(x) = 0;$$

$$(b) \lim_{\mathfrak{B}} f(x) = \lim_{\mathfrak{B}} g(x) = \infty.$$

$$3. \forall x \in B \quad g'(x) \neq 0$$

$$4. \lim_{\mathfrak{B}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

То выполнено  $\lim_{\mathfrak{B}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Всего имеется 6 вариантов вида базы предела, 4 варианта значения предела и 2 варианта выбора неопределённости ( $\frac{0}{0}$  и  $\frac{\infty}{\infty}$ ). Таким образом, всего имеется  $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$  случаев правила Лопиталья, совокупно представленных в формулировке данной теоремы.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** В формулировке теоремы используется понятие предела по базе, не изучаемое в курсе математического анализа для студентов технических специальностей, однако изучаемое в курсе математического анализа для студентов механико-математических факультетов (например, по учебнику [3]). Использование этого понятия позволяет выразить все случаи в виде единой теоремы, не разделяя её на 6 утверждений.

### 3. Доказательство

Докажем теорему 1. В подразделах 3.1, 3.2, имеющих подготовительный характер, изложены используемые в доказательстве вспомогательные утверждения. Доказательство для случая  $x \rightarrow a + 0$  представлено в подразделе 3.3. Доказательства для всех остальных случаев, использующие замену переменной и связь двусторонних пределов с односторонними, представлены в подразделе 3.4.

#### 3.1. Известные факты

В настоящем подразделе представлены обозначения, понятия и утверждения, прямо или косвенно используемые в доказательстве теоремы 1, то есть в доказательствах утверждений из последующих подразделов 3.2, 3.3, 3.4. В изложении курса математического анализа эти обозначения, понятия и утверждения считаются уже известными к моменту изучения правила Лопиталья, и поэтому представлены без доказательств.

В соответствии с темами, последовательно изучаемыми в курсе математического анализа, данные сведения подразделяются на сведения, относящиеся к пределам последовательностей (подраздел 3.1.1), частичным пределам (подраздел 3.1.2), пределам функций (подраздел 3.1.3), замене переменной в пределе (подраздел 3.1.4), односторонним пределам (подраздел 3.1.5) и производным (подраздел 3.1.6) соответственно.

### 3.1.1. Предел последовательности

Прежде всего, введём обозначения для  $\varepsilon$ -окрестностей, где  $\varepsilon > 0$ . Для конечных действительных чисел  $a \in (-\infty, +\infty)$  и для бесконечностей  $-\infty, +\infty, \infty$  соответствующие окрестности определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} O_\varepsilon(a) &= (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \\ O_\varepsilon(+\infty) &= (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty), \\ O_\varepsilon(-\infty) &= (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}), \\ O_\varepsilon(\infty) &= (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty) \end{aligned}$$

Все окрестности являются подмножествами числовой прямой  $\mathbb{R}$ . Эти окрестности обладают свойствами отделимости, выражаемыми следующими утверждениями:

**Утверждение 1.** Пусть  $A, B \in [-\infty, +\infty]$ ,  $A \neq B$  — различные элементы расширенной числовой прямой. Тогда существует  $\varepsilon > 0$  такое, что выполнено  $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $A \in (-\infty, +\infty)$ . Тогда существует  $\varepsilon > 0$  такое, что выполнено  $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(\infty) = \emptyset$

Соответствующим образом определено понятие предела последовательности  $x_n \rightarrow A$ , где рассматриваются 4 случая:  $A \in (-\infty, +\infty)$ ,  $A = -\infty$ ,  $A = +\infty$ ,  $A = \infty$ .

**DEFINITION 1.** Пусть  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$  — элемент расширенной числовой прямой или бесконечность без знака. Полагаем, что  $x_n \rightarrow A$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует натуральное число  $N$  такое, что для любого  $n > N$  выполнено  $x_n \in O_\varepsilon(A)$ .

Конечным числом членов последовательности возможно пренебречь:

**Утверждение 3.** Пусть  $x_n, y_n$  — последовательности,  $N$  — натуральное число,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ . Если  $x_n \rightarrow A$ , и для всех  $n$  выполнено  $y_n = x_{n+N}$ , то  $y_n \rightarrow A$ .

Далее будут использоваться некоторые связанные с бесконечностями арифметические свойства пределов последовательности, а также лемма о двух милиционерах.

**Утверждение 4.** Пусть  $x_n, y_n$  — последовательности, и выполнено  $x_n \rightarrow A$ ,  $y_n \rightarrow B$ , где  $A, B \in (-\infty, +\infty)$ . Тогда  $x_n + y_n \rightarrow A + B$ ,  $x_n - y_n \rightarrow A - B$ ,  $x_n y_n \rightarrow AB$ . Если, кроме того,  $B \neq 0$ , и для всех  $n$  выполнено  $y_n \neq 0$ , то выполнено  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{A}{B}$ .

**Утверждение 5.** Пусть  $x_n, y_n$  — последовательности, и выполнено  $x_n \rightarrow A$ ,  $y_n \rightarrow B$ , где  $A \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$ ,  $B \in (-\infty, +\infty)$  Тогда  $x_n + y_n \rightarrow A$ ,  $x_n - y_n \rightarrow A$

**Утверждение 6.** Пусть  $x_n, y_n$  — последовательности, и выполнено  $x_n \rightarrow A$ ,  $y_n \rightarrow B$ , где  $A \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$ ,  $B \in (-\infty, +\infty)$ , а также для всех  $n$   $x_n \neq 0$ . Тогда  $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0$

**Утверждение 7.** Пусть  $x_n, y_n$  — последовательности, и выполнено  $x_n \rightarrow A$ ,  $y_n \rightarrow B$ , где  $A \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$ ,  $B \in (-\infty, +\infty)$ ,  $B > 0$ , а также для всех  $n$   $y_n \neq 0$ . Тогда  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow A$

**Утверждение 8.** Пусть  $x_n, y_n, z_n$  — последовательности, и выполнено  $x_n \rightarrow A$ ,  $z_n \rightarrow A$ ,  $\forall n$   $x_n \leq y_n \leq z_n$ , где  $A \in [-\infty, +\infty]$ . Тогда  $y_n \rightarrow A$ .

### 3.1.2. Частичные пределы

В представленном в настоящей работе доказательстве существенным образом используются свойства частичных пределов последовательностей, в частности теорема Больцано-Вейерштрасса и её обобщение на расширенную числовую прямую. Введём обозначение: строго монотонно возрастающую (к бесконечности) последовательность натуральных чисел  $n_k$  обозначим как  $n_k \uparrow \uparrow +\infty$ .

**DEFINITION 2.** Будем говорить, что последовательность  $y_k$  является подпоследовательностью последовательности  $x_n$ , если существует последовательность натуральных чисел  $n_k \uparrow +\infty$  такая, что для всех  $k$  выполнено  $y_k = x_{n_k}$ .

**DEFINITION 3.** Полагаем, что элемент расширенной числовой прямой  $A \in [-\infty, +\infty]$  является частичным пределом последовательности  $x_n$ , если существует последовательность  $y_k$ , являющаяся подпоследовательностью последовательности  $x_n$ , и для которой выполнено  $y_k \rightarrow A$ .

**Утверждение 9.** Пусть  $y_k$  — подпоследовательность  $x_n$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ . Если выполнено  $x_n \rightarrow A$ , то также выполнено  $y_k \rightarrow A$ .

**Утверждение 10.** Пусть  $y_k$  — подпоследовательность  $x_n$ . Если  $A$  является частичным пределом последовательности  $y_k$ , то оно является также и частичным пределом последовательности  $x_n$ .

**Утверждение 11.** Пусть  $x_n$  — последовательность,  $A \in [-\infty, +\infty]$  — элемент расширенной числовой прямой. Если существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для всех  $n$  выполнено  $x_n \notin O_\varepsilon(A)$ , то  $A$  не является частичным пределом  $x_n$ .

**Утверждение 12.** Пусть  $x_n$  — ограниченная последовательность (т.е. существует  $M$  такое, что  $|x_n| \leq M$ ). Тогда существует конечное действительное число  $A \in (-\infty, +\infty)$  такое, что  $A$  является частичным пределом  $x_n$ .

**Утверждение 13.** Пусть  $x_n$  — произвольная последовательность. Тогда существует элемент расширенной числовой прямой  $A \in [-\infty, +\infty]$  такой, что  $A$  является частичным пределом  $x_n$ .

### 3.1.3. Предел функции

Выведем определения предела функции по Коши и по Гейне. Определение по Коши представлено в общем виде как определение предела функции по базе. Соответственно, представлены базы пределов, изучаемых в курсе математического анализа. «Определение Гейне», поскольку фактически является критерием, сформулировано для базы  $x \rightarrow a + 0$  в виде соответствующих утверждений 15 и 16.

**DEFINITION 4.** Базой  $\mathfrak{B}$  над множеством  $X$  называется семейство его подмножеств, обладающее следующими свойствами:

1. Для любого  $B \in \mathfrak{B}$  выполнено  $B \neq \emptyset$
2. Для любых  $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$  найдётся  $B_3 \in \mathfrak{B}$  такое, что выполнено  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

В курсе математического анализа рассматриваются следующие базы над множеством действительных чисел  $\mathbb{R}$ :

1.  $\mathfrak{B}_{x \rightarrow a+0} = \{(a, a + \delta)\}_{\delta > 0}$ , где  $a \in (-\infty, +\infty)$
2.  $\mathfrak{B}_{x \rightarrow a-0} = \{(a - \delta, a)\}_{\delta > 0}$ , где  $a \in (-\infty, +\infty)$
3.  $\mathfrak{B}_{x \rightarrow a} = \{(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)\}_{\delta > 0}$ , где  $a \in (-\infty, +\infty)$
4.  $\mathfrak{B}_{x \rightarrow +\infty} = \{(\frac{1}{\delta}, +\infty)\}_{\delta > 0}$
5.  $\mathfrak{B}_{x \rightarrow -\infty} = \{(-\infty, -\frac{1}{\delta})\}_{\delta > 0}$

$$6. \mathfrak{B}_{x \rightarrow \infty} = \{(-\infty, -\frac{1}{\delta}) \cup (\frac{1}{\delta}, +\infty)\}_{\delta > 0}$$

Все перечисленные базы обладают свойством отделимости:

**Утверждение 14.** Пусть  $\mathfrak{B}$  — база одного из следующих шести видов:  $x \rightarrow a+0$ ,  $x \rightarrow a-0$ ,  $x \rightarrow a$  (где  $a \in (-\infty, +\infty)$ ),  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$  — конечное множество. Тогда найдётся множество  $B \in \mathfrak{B}$  такое, что выполнено  $B \cap X = \emptyset$

**DEFINITION 5.** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{B}$  — база над множеством действительных чисел  $\mathfrak{B}$  такая, что для всех  $B \in \mathfrak{B}$  выполнено  $B \cap E \neq \emptyset$ . Полагаем, что  $\lim_{\mathfrak{B}} f(x) = A$ , где  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует элемент базы  $B \in \mathfrak{B}$  такой, что для всех  $x \in E \cap B$  выполнено  $f(x) \in O_\varepsilon(A)$

**Утверждение 15.** Пусть  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$   $x_n$  — последовательность, обладающая следующими свойствами:

1.  $\forall n \ x_n \in (a, b)$
2.  $x_n \rightarrow a$

Если выполнено  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ , то также выполнено  $f(x_n) \rightarrow A$ .

**Утверждение 16.** Пусть  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq A$ , то существует последовательность  $x_n$ , обладающая следующими свойствами:

1.  $\forall n \ x_n \in (a, b)$
2.  $x_n \rightarrow a$
3.  $f(x_n) \not\rightarrow A$

### 3.1.4. Замена переменной

Выпишем утверждения, соответствующие частным случаям замены переменной в пределе  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  и  $x \rightarrow -x$ .

**Утверждение 17.** Пусть  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1 : (0, \frac{1}{a}) \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $a > 0$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ . Если для всех  $x \in (0, \frac{1}{a})$  выполнено  $f_1(x) = f(\frac{1}{x})$ , то условия  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow +0} f_1(x) = A$  равносильны.

**Утверждение 18.** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1 : (-E) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ . Если для всех  $x \in (-E)$  выполнено  $f_1(x) = f(-x)$ , то:

1. Условия  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow -b+0} f_1(x) = A$  равносильны.
2. Условия  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = A$  равносильны.

### 3.1.5. Односторонние пределы

Выпишем свойства односторонних пределов, используемые в доказательстве случаев  $x \rightarrow a$  и  $x \rightarrow \infty$ .

**Утверждение 19.** Пусть  $f : (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ . Тогда условия  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$  равносильны.

**Утверждение 20.** Пусть  $f : (-\infty, -\frac{1}{\delta}) \cup (\frac{1}{\delta}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ . Тогда условия  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  равносильны.

### 3.1.6. Производная

Доказательство правила Лопиталья использует предварительно изучаемые теоремы дифференциального исчисления: теорему Ролля (утверждение 22) и теорему Коши о среднем значении (утверждения 23, 24). С точки зрения автора, доопределение функций нулем в основной части доказательства может снизить строгость изложения, поэтому упомянутые теоремы дифференциального исчисления представлены в специфических формах, которые уже готовы для непосредственного применения в доказательствах соответствующих утверждений. Кроме того, для случая  $x \rightarrow +\infty$ , а также для случаев левосторонних пределов необходима теорема о дифференцировании сложной функции (утверждение 21).

**DEFINITION 6.** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — внутренняя точка множества  $E$ . Будем говорить, что функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , если выполнено  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ , где  $A \in (-\infty, +\infty)$ . Данный предел называется производной функции  $f$  в точке  $x_0$ , и обозначается как  $f'(x_0)$

**Утверждение 21.** Пусть  $f : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ ,  $f(E_1) \subset E_2$ ,  $x_0$  — внутренняя точка множества  $E_1$ ,  $y_0$  — внутренняя точка множества  $E_2$ ,  $y_0 = f(x_0)$ , для всех  $x \in E_1$  выполнено  $h(x) = g(f(x))$ . Если функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , и функция  $g$  дифференцируема в точке  $y_0$ , то функция  $h$  также дифференцируема в точке  $x_0$ , и выполнено  $h'(x_0) = f'(x_0)g'(y_0)$

**Утверждение 22.** Пусть  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x, y \in (a, b)$ ,  $x < y$ .

Если выполнены следующие условия:

1. Функция  $f$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$
2.  $f(x) = f(y)$

То найдётся  $\xi \in (x, y)$  такое, что выполнено  $f'(\xi) = 0$ .

**Утверждение 23.** Пусть  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in (a, b)$ .

Если выполнены следующие условия:

1. Функции  $f, g$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$
3. Для всех  $x \in (a, b)$  выполнено  $g'(x) \neq 0$

То найдётся  $\xi \in (a, c)$  такое, что выполнено  $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(c)}{g(c)}$

**Утверждение 24.** Пусть  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x, y \in (a, b)$ ,  $x < y$

Если выполнены следующие условия:

1. Функции  $f, g$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$
2. Для всех  $x \in (a, b)$  выполнено  $g'(x) \neq 0$

То найдётся  $\xi \in (x, y)$  такое, что выполнено  $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)}$

### 3.2. Вспомогательные леммы

В настоящем подразделе представим и докажем вспомогательные леммы, используемые в доказательстве.

В подразделе 3.2.1 представим теорему о единственном частичном пределе (утверждение 25), а также её аналог для последовательности, не сходящейся к бесконечности без знака (утверждение 26). С помощью этой теоремы установим утверждения об отделимости для предела последовательности (утверждение 27) и для предела функции (утверждение 28), позволяющие использовать определение предела функции по Гейне при работе с бесконечностями. Отдельно отметим, что в основной части доказательства используется только конечное утверждение 28 подраздела 3.2.1.

В подразделе 3.2.2 представлено утверждение 31, используемое для сужения области определения функции  $\frac{f}{g}$  в целях недопущения деления на ноль.

#### 3.2.1. Теорема о единственном частичном пределе и её следствия

**Утверждение 25.** Пусть  $x_n$  — последовательность,  $A \in [-\infty, +\infty]$ . Если выполнено  $x_n \nrightarrow A$ , то существует  $B \in [-\infty, +\infty]$ ,  $B \neq A$  такое, что  $B$  — частичный предел последовательности  $x_n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Так как  $x_n \nrightarrow A$ , то существует  $\varepsilon > 0$  такое, что множество  $\mathbb{R} \setminus O_\varepsilon(A)$  содержит бесконечное число членов последовательности  $x_n$ . Выберем такое  $\varepsilon > 0$ .
2. Пронумеруем члены последовательности  $x_n$ , лежащие в множестве  $\mathbb{R} \setminus O_\varepsilon(A)$ , последовательностью натуральных чисел  $n_k \uparrow +\infty$ , т.е. построим  $n_k$  таким образом, чтобы для всех  $k$  было выполнено  $x_{n_k} \in \mathbb{R} \setminus O_\varepsilon(A)$ .
3. Положим  $y_k = x_{n_k}$ . В соответствии с утверждением 13, у последовательности  $y_k$  есть хотя бы один частичный предел  $B \in [-\infty, +\infty]$ .
4. Так как  $y_k$  — подпоследовательность  $x_n$ , и  $B$  — частичный предел  $y_k$ , то, в соответствии с утверждением 10,  $B$  — частичный предел  $x_n$ .
5. Так как для всех  $k$  выполнено  $y_k \notin O_\varepsilon(A)$ , то, в соответствии с утверждением 11,  $A$  не является частичным пределом последовательности  $y_k$ . И, следовательно,  $B \neq A$ .

□

**Утверждение 26.** Пусть  $x_n$  — последовательность, для которой выполнено  $x_n \nrightarrow \infty$ . Тогда существует  $B \in (-\infty, +\infty)$  такое, что  $B$  — частичный предел последовательности  $x_n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Так как  $x_n \nrightarrow \infty$ , то существует  $\varepsilon > 0$  такое, что множество  $\mathbb{R} \setminus O_\varepsilon(\infty) = [-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$  содержит бесконечное число членов последовательности  $x_n$ . Выберем такое  $\varepsilon > 0$ .
2. Пронумеруем члены последовательности  $x_n$ , лежащие в множестве  $[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$ , последовательностью натуральных чисел  $n_k \uparrow +\infty$ , т.е. построим  $n_k$  таким образом, чтобы для всех  $k$  было выполнено  $x_{n_k} \in [-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$ .
3. Положим  $y_k = x_{n_k}$ . Так как для всех  $k$  выполнено  $y_k \in [-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$ , то, в соответствии с утверждением 12, у ограниченной последовательности  $y_k$  есть хотя бы один частичный предел  $B \in (-\infty, +\infty)$ .
4. Так как  $y_k$  — подпоследовательность  $x_n$ , и  $B$  — частичный предел  $y_k$ , то, в соответствии с утверждением 10,  $B$  — частичный предел  $x_n$ .

□

**Утверждение 27.** Пусть  $x_n$  — последовательность, для которой выполнено  $x_n \nrightarrow A$ , где  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ . Тогда существуют  $\varepsilon > 0$  и  $B \in [-\infty, +\infty]$  такие, что  $B$  — частичный предел  $x_n$ , и выполнено  $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Возможны 2 случая: случай  $A \in [-\infty, +\infty]$  и случай  $A = \infty$ .
2. Случай  $A \in [-\infty, +\infty]$ :
  - 2.1. Так как  $x_n \not\rightarrow A$ , то, в соответствии с утверждением 25, существует  $B \in [-\infty, +\infty]$  такое, что  $B$  — частичный предел  $x_n$ , и  $B \neq A$ .
  - 2.2. Так как  $A, B \in [-\infty, +\infty]$ ,  $A \neq B$ , то, в соответствии с утверждением 1, существует  $\varepsilon > 0$  такое, что выполнено  $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$ .
3. Случай  $A = \infty$ :
  - 3.1. Так как  $x_n \not\rightarrow \infty$ , то, в соответствии с утверждением 26, существует  $B \in (-\infty, +\infty)$  такое, что  $B$  — частичный предел  $x_n$ .
  - 3.2. В соответствии с утверждением 2, существует  $\varepsilon > 0$  такое, что выполнено  $O_\varepsilon(B) \cap O_\varepsilon(\infty) = \emptyset$ .

□

**Утверждение 28.** Пусть  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq A$ , то существуют  $\varepsilon > 0$ ,  $B \in [-\infty, +\infty]$  и последовательность  $x_n$  такие, что выполнено:

1.  $\forall n \ x_n \in (a, b)$
2.  $x_n \rightarrow a$
3.  $f(x_n) \rightarrow B$
4.  $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Так как  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq A$ , то, в соответствии с утверждением 16, существует последовательность  $y_s$ , обладающая следующими свойствами:

1.  $\forall s \ y_s \in (a, b)$
2.  $y_s \rightarrow a$
3.  $f(y_s) \not\rightarrow A$

2. Положим  $z_s = f(y_s)$ . Так как  $z_s \not\rightarrow A$ , то, в соответствии с утверждением 27, существуют  $\varepsilon > 0$  и  $B \in [-\infty, +\infty]$  такие, что  $B$  является частичным пределом  $z_s$ , и выполнено  $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$ .
3. Так как  $B$  является частичным пределом  $z_s$ , то существует последовательность натуральных чисел  $s_n \uparrow +\infty$  такая, что выполнено  $f(y_{s_n}) = z_{s_n} \rightarrow B$ .
4. Положим  $x_n = y_{s_n}$ . Тогда  $\forall n \ x_n = y_{s_n} \in (a, b)$ ,  $f(x_n) = f(y_{s_n}) \rightarrow B$ .
5. Так как  $x_n$  — подпоследовательность  $y_s$ , и выполнено  $y_s \rightarrow a$ , то, в соответствии с утверждением 9, также выполнено  $x_n \rightarrow a$ .

□

### 3.2.2. Сужение области определения

**Утверждение 29.** Пусть:

1.  $\mathfrak{B}$  — база одного из следующих четырех видов:  $x \rightarrow a + 0$ ,  $x \rightarrow a - 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$
2.  $B \in \mathbb{B}$

3.  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$

4.  $X = \{x \in B | g(x) = 0\}$

Если выполнено  $\forall x \ g'(x) \neq 0$ , то  $|X| \leq 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Предположим обратное, т.е. что у функции  $g$  имеется на множестве  $B$  более одного нуля.
2. Тогда найдутся  $x_1, x_2 \in B$ ,  $x_1 < x_2$  такие, что выполнено  $g(x_1) = g(x_2) = 0$ .
3. Так как  $B \in \mathbb{B}$ , и база  $\mathbb{B}$  является одной из баз  $x \rightarrow a + 0$ ,  $x \rightarrow a - 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ , то множество  $B$  является выпуклым.
4. Так как множество  $B$  является выпуклым,  $x_1, x_2 \in B$ , и функция  $g$  дифференцируема на множестве  $B$ , то, в соответствии с утверждением 22, найдётся  $\xi \in (x_1, x_2) \subset B$  такое, что выполнено  $g'(\xi) = 0$ , что противоречит условию, налагаемому на функцию  $g$ .

□

**Утверждение 30.** Пусть:

1.  $\mathfrak{B}$  — база одного из следующих двух видов:  $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow \infty$
2.  $B \in \mathfrak{B}$
3.  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$
4.  $X = \{x \in B | g(x) = 0\}$

Если выполнено  $\forall x \ g'(x) \neq 0$ , то  $|X| \leq 2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Предположим обратное, т.е. что у функции  $g$  на множестве  $B$  имеется более двух нулей.
2. Так как  $B \in \mathbb{B}$ , и база  $\mathbb{B}$  является одной из баз  $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow \infty$ , то  $B = B_1 \cup B_2$ , где  $B_1, B_2$  — выпуклые множества.
3. Так как функция  $g$  имеет хотя бы три различных нуля на множестве  $B$ , то, в соответствии с принципом Дирихле, хотя бы одно из множеств  $B_1, B_2$  содержит два различных нуля функции  $g$ . Пусть, для определённости, два различных нуля содержатся в множестве  $B_1$ .
4. То есть найдутся  $x_1, x_2 \in B_1$ ,  $x_1 < x_2$  такие, что выполнено  $g(x_1) = g(x_2) = 0$ .
5. Так как множество  $B_1$  является выпуклым,  $x_1, x_2 \in B_1$ , и функция  $g$  дифференцируема на множестве  $B_1 \subset B$ , то, в соответствии с утверждением 22, найдётся  $\xi \in (x_1, x_2) \subset B_1$  такое, что выполнено  $g'(\xi) = 0$ , что противоречит условию, налагаемому на функцию  $g$ .

□

**Утверждение 31.** Пусть:

1.  $\mathfrak{B}$  — база одного из следующих шести видов:  $x \rightarrow a + 0$ ,  $x \rightarrow a - 0$ ,  $x \rightarrow a$  (где  $a \in (-\infty, +\infty)$ ),  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$
2.  $B \in \mathfrak{B}$
3.  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$

Если выполнены следующие условия:

1. Функция  $g$  дифференцируема на множестве  $B$
2.  $\forall x \in B \ g'(x) \neq 0$

То существует  $B' \in \mathfrak{B}$ ,  $B' \subset B$  такое, что:

1. Для любого  $x \in B'$  выполнено  $g(x) \neq 0$
2. Для любых  $x, y \in B'$ , таких что  $x < y$  и  $[x, y] \subset B'$ , выполнено  $g(x) \neq g(y)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Обозначим:  $X = \{x \in B | g(x) = 0\}$ .
2. Докажем, что множество  $X$  конечно.
  - 2.1. В случае баз  $x \rightarrow a + 0$ ,  $x \rightarrow a - 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ , в соответствии с утверждением 29, выполнено  $|X| \leq 1$
  - 2.2. В случае баз  $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow \infty$ , в соответствии с утверждением 30, выполнено  $|X| \leq 2$
3. Так как  $X$  – конечно, то в соответствии с утверждением 14, найдётся множество  $B_0 \in \mathfrak{B}$  такое, что выполнено  $B_0 \cap X = \emptyset$
4. В соответствии с определением базы, выберем элемент  $B' \in \mathfrak{B}$  такой, что  $B' \subset B \cap B_0$ . Таким образом, выполнено  $B' \subset B$ , и для всех  $x \in B'$  выполнено  $g'(x) \neq 0$ .
5. Зафиксируем  $x, y \in B'$  такие, что выполнено  $x < y$  и  $[x, y] \subset B'$ .
6. Предположим обратное, т.е. что выполнено  $g(x) = g(y)$ .
7. Так как функция  $g$  дифференцируема на множестве  $B'$ ,  $x < y$ ,  $[x, y] \subset B'$ ,  $g(x) = g(y)$ , то, в соответствии с утверждением 22, найдётся  $\xi \in (x, y) \subset B' \subset B$  такое, что выполнено  $g'(\xi) = 0$ , что противоречит условию, накладываемому на функцию  $g$ .

□

### 3.3. Случай $x \rightarrow a + 0$

В настоящем подразделе представлена основная часть доказательства правила Лопиталя, т.е. доказательство для случая  $x \rightarrow a + 0$ . Неопределённости  $\frac{0}{0}$  и  $\frac{\infty}{\infty}$  рассмотрены в подразделах 3.3.1 и 3.3.2 соответственно.

Оба доказательства являются доказательствами от противного, рассматривающими соответствующие последовательности Гейне. Однако, доказательство для неопределённости  $\frac{0}{0}$  концептуально мало чем отличается от доказательств, использующих традиционные подходы.

В доказательстве для неопределённости  $\frac{\infty}{\infty}$  определение Гейне используется не напрямую, а через предварительно доказанную лемму (см. утверждение 28). Использование этой леммы позволяет рассматривать последовательность Гейне  $x_n$  такую, что соответствующая последовательность  $f(x_n)/g(x_n)$  не только не сходится к предполагаемому пределу  $A$ , но также сходится к некоторому другому пределу  $B$ .

#### 3.3.1. Неопределённость $\frac{0}{0}$

**Утверждение 32.** Пусть  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$

Если выполнены следующие условия:

1. Функции  $f, g$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$
3. Для всех  $x \in (a, b)$  выполнено  $g'(x) \neq 0$
4.  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

То выполнено  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

**Этап I: Построение последовательности Гейне**

1. В соответствии с утверждением 31, найдётся  $b' \in (a, b)$  такое, что для всех  $x \in (a, b')$  выполнено  $g(x) \neq 0$ . Откуда следует, что функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  определена на всём интервале  $(a, b')$ .
2. Предположим обратное, т.е.  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq A$ . Тогда, в соответствии с утверждением 16, применённом к ограничению функции  $\frac{f}{g}$  на множество  $(a, b')$ , существует последовательность  $x_n$ , обладающая следующими свойствами:

1.  $\forall n \ x_n \in (a, b)$
2.  $x_n \rightarrow a$
3.  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \not\rightarrow A$

**Этап II: Применение теоремы Коши о среднем**

3. В соответствии с утверждением 23, построим последовательность  $\xi_n$ , обладающую следующими свойствами:

1.  $\forall n \ \xi_n \in (a, x_n) \subset (a, b')$
2.  $\forall n \ \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$

4. Так как  $x_n \rightarrow a$ , и для всех  $n$  выполнено  $a < \xi_n < x_n$ , то, в соответствии с утверждением 8, также выполнено  $\xi_n \rightarrow a$ .
  5. Так как  $\forall n \ \xi_n \in (a, b')$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ,  $\xi_n \rightarrow a$ , то, в соответствии с утверждением 15, выполнено также  $\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \rightarrow A$ .
  6. Таким образом,  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \rightarrow A$ , что противоречит  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \not\rightarrow A$  (см. п.2)
- 

### 3.3.2. Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$

**Утверждение 33.** Пусть  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$

Если выполнены следующие условия:

1. Функции  $f, g$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$
3. Для всех  $x \in (a, b)$  выполнено  $g'(x) \neq 0$
4.  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

То выполнено  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

**Этап I: Построение последовательности Гейне**

1. В соответствии с утверждением 31, найдётся  $b' \in (a, b)$  такое, что для всех  $x \in (a, b')$  выполнено  $g(x) \neq 0$ , а также для любых  $x, y \in (a, b')$ ,  $x < y$  выполнено  $g(x) \neq g(y)$ . Отсюда следует, что функция  $\frac{f}{g}$  определена на всём интервале  $(a, b')$ .
2. Предположим обратное, т.е.  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq A$ . Тогда, в соответствии с утверждением 28, применённым к ограничению функции  $\frac{f}{g}$  на интервал  $(a, b')$ , существуют  $\varepsilon > 0$ ,  $B \in [-\infty, +\infty]$  и последовательность  $x_n$  такие, что выполнено:

1.  $\forall n \ x_n \in (a, b')$

2.  $x_n \rightarrow a$

3.  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow B$

4.  $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$

3. Так как  $x_n \rightarrow a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$  и  $\forall n \ x_n \in (a, b)$ , то, в соответствии с утверждением 15, выполнено  $g(x_n) \rightarrow \infty$ .

### Этап II: Отбрасывание конечного числа членов последовательности

4. Докажем, что существует  $c \in (a, b')$  такое, что для всех  $x \in (a, c)$  выполнено  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in O_\varepsilon(A)$ .

4.1. Так как  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ , то существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in (a, a + \delta) \cap (a, b)$  выполнено  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in O_\varepsilon(A)$ .

4.2. Положим  $c = \min(a + \delta, b')/2$ . Тогда для всех  $x \in (a, c) \subset (a, a + \delta) \cap (a, b)$  выполнено  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in O_\varepsilon(A)$ .

5. Докажем, что существует натуральное число  $N$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено  $x_n \in (a, c)$ .

5.1. Так как  $x_n \rightarrow a$ , то существует натуральное число  $N$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено  $x_n \in O_{c-a}(a) = (a - (c - a), c)$ . Выберем такое  $N$ .

5.2. Однако, для всех  $n$  выполнено  $x_n \in (a, b)$ . Таким образом, для всех  $n > N$  выполнено  $x_n \in (a - (c - a), c) \cap (a, b) = (a, c)$ .

6. Положим  $y_n = x_{n+N}$ . В соответствии с утверждением 3 и свойствами последовательности  $x_n$  (п.2, 3, 5), установим следующие свойства последовательности  $y_n$ :

1.  $\forall n \ y_n = x_{n+N} \in (a, c)$

2.  $y_n \rightarrow a$

3.  $\frac{f(y_n)}{g(y_n)} \rightarrow B$

4.  $g(y_n) \rightarrow \infty$

### Этап III: Применение теоремы Коши о среднем значении

7. Положим  $z_n = \frac{f(c) - f(y_n)}{g(c) - g(y_n)}$ . Так как  $\forall n \ y_n \in (a, c) \subset (a, b')$ , то, в силу установленного в п.2,  $\forall n \ g(y_n) \neq g(c)$ , и, следовательно,  $z_n$  определена для всех  $n$ . Также отметим, что для всех  $n$  выполнено  $g(y_n) \neq 0$ .

8. Докажем, что для всех  $n$  выполнено  $z_n \in O_\varepsilon(A)$ .

8.1. В соответствии с утверждением 24, построим последовательность  $\xi_n$ , обладающую следующими свойствами:

1.  $\forall n \ \xi_n \in (y_n, c) \subset (a, c)$

2.  $\forall n \ \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{f(c) - f(y_n)}{g(c) - g(y_n)} = z_n$

8.2. Так как  $\forall n \ \xi_n \in (a, c)$ , то, в соответствии с п.4,  $\forall n \ z_n = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \in O_\varepsilon(A)$

#### Этап IV: Применение арифметических свойств предела последовательности

9. Докажем, что выполнено  $z_n = \frac{\frac{f(y_n) - f(c)}{g(y_n) - g(c)}}{1 - \frac{g(c)}{g(y_n)}} \rightarrow B$ . Предварительно отметим, для всех  $n$  выполнено  $1 - \frac{g(c)}{g(y_n)} \neq 0$ . (см. п.1)

9.1. Так как  $g(y_n) \rightarrow \infty$ , то в соответствии с утверждением 6, выполнено  $\frac{f(c)}{g(y_n)} \rightarrow 0$  и  $\frac{g(c)}{g(y_n)} \rightarrow 0$

9.2. В соответствии с утверждением 4, также выполнено  $1 - \frac{g(c)}{g(y_n)} \rightarrow 1$

9.3. Рассмотрим случай  $B \in (-\infty, +\infty)$ . В соответствии с утверждением 4, выполнено  $z_n = \frac{\frac{f(y_n) - f(c)}{g(y_n) - g(c)}}{1 - \frac{g(c)}{g(y_n)}} \rightarrow \frac{B-0}{1-0} = B$

9.4. Рассмотрим случай  $B \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$ .

9.4.1. Так как  $\frac{f(y_n)}{g(y_n)} \rightarrow B$ ,  $\frac{f(c)}{g(y_n)} \rightarrow 0$ , то, в соответствии с утверждением 5, выполнено  $\frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(c)}{g(y_n)} \rightarrow B$

9.4.2. Так как  $\frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(c)}{g(y_n)} \rightarrow B$ ,  $1 - \frac{g(c)}{g(y_n)} \rightarrow 1$ , то, в соответствии с утверждением 7, выполнено  $z_n = \frac{\frac{f(y_n) - f(c)}{g(y_n) - g(c)}}{1 - \frac{g(c)}{g(y_n)}} \rightarrow B$

10. Так как  $z_n \rightarrow B$ , то существует натуральное число  $N'$  такое, что для всех  $n > N'$  выполнено  $z_n \in O_\varepsilon(B)$ . В частности,  $z_{N'+1} \in O_\varepsilon(B)$ .

11. Таким образом,  $z_{N'+1} \in O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B)$  (п. 8, 10), что противоречит  $O_\varepsilon(A) \cap O_\varepsilon(B) = \emptyset$  (п. 2).

□

### 3.4. Остальные случаи

В настоящем подразделе представлено завершение доказательства правила Лопиталья, то есть доказательства для всех случаев, кроме уже рассмотренного случая  $x \rightarrow a + 0$ . В подразделе 3.4.1 рассмотрен случай  $x \rightarrow +\infty$ , и, далее в подразделах 3.4.2, 3.4.3 рассматриваются случаи левосторонних и двусторонних пределов соответственно.

Случай  $x \rightarrow +\infty$  сводится к случаю  $x \rightarrow a + 0$  посредством применения замены  $x \rightarrow \frac{1}{x}$ . Случаи левосторонних пределов сводятся к случаям правосторонних пределов посредством применения замены  $x \rightarrow -x$ . Утверждения для двусторонних пределов следуют из соответствующих утверждений для односторонних пределов.

#### 3.4.1. Случай $x \rightarrow +\infty$

**Утверждение 34.** Пусть  $f, g : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $a > 0$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$

Если выполнены следующие условия:

1. Функции  $f, g$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$
2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$$

3. Для всех  $x \in (a, +\infty)$  выполнено  $g'(x) \neq 0$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

То выполнено  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. В соответствии с утверждением 31, существует  $a' \in (a, +\infty)$  такое, что для всех  $x \in (a', +\infty)$  выполнено  $g(x) \neq 0$ . Откуда следует, что функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  определена на всём полуинтервале  $(a', +\infty)$

2. Отметим, что так как  $\forall x \in (a', +\infty) g'(x) \neq 0$ , то функция  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  также определена для всех  $x \in (a', +\infty)$

3. Определим функции  $f_1, g_1 : (0, \frac{1}{a'}) \rightarrow \mathbb{R}$  следующим образом: для каждого  $x \in (0, \frac{1}{a'})$  полагаем  $f_1(x) = f(\frac{1}{x})$ ,  $g_1(x) = g(\frac{1}{x})$ .

4. В соответствии с утверждением 21, функции  $f_1, g_1$  дифференцируемы на интервале  $(0, \frac{1}{a'})$ , и для всех  $x \in (0, \frac{1}{a'})$  выполнено  $f_1'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})$ ,  $g_1'(x) = -\frac{1}{x^2} g'(\frac{1}{x})$

5. Докажем, что для всех  $x \in (0, \frac{1}{a'})$  выполнено  $g_1(x) \neq 0$ . Откуда следует, что функция  $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$  определена на всём интервале  $(0, \frac{1}{a'})$

5.1. Зафиксируем  $x \in (0, \frac{1}{a'})$ .

5.2. Тогда  $\frac{1}{x} \in (a', +\infty)$ , и, следовательно  $g_1(x) = g(\frac{1}{x}) \neq 0$ .

6. Докажем, что для всех  $x \in (0, \frac{1}{a'})$  выполнено  $g_1'(x) \neq 0$ . Откуда следует, что функция  $\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)}$  определена на всём интервале  $(0, \frac{1}{a'})$

6.1. Зафиксируем  $x \in (0, \frac{1}{a'})$ .

6.2. Тогда выполнено  $\frac{1}{x} \in (a', +\infty)$ , и, следовательно,  $g'(\frac{1}{x}) \neq 0$

6.3. Так как  $-\frac{1}{x^2} \neq 0$ ,  $g'(\frac{1}{x}) \neq 0$ , то  $g_1'(x) = -\frac{1}{x^2} g'(\frac{1}{x}) \neq 0$

7. Докажем, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$1. \lim_{x \rightarrow +0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +0} g_1(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +0} g_1(x) = \infty$$

7.1. В случае если выполнено  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , то, в соответствии с утверждением 17, также выполнено  $\lim_{x \rightarrow +0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +0} g_1(x) = 0$

7.2. В случае если выполнено  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$ , то, в соответствии с утверждением 17, также выполнено  $\lim_{x \rightarrow +0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +0} g_1(x) = \infty$

8. Так как  $\forall x \in (0, \frac{1}{a'}) \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2} g'(\frac{1}{x})} = \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ , то, в соответствии с утверждением 17, выполнено  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = A$ . Области определения функций  $\frac{f'}{g}, \frac{f_1'}{g_1}$  рассмотрены в п.2, 6 соответственно.

9. Выводы п.4, 6, 7, 8 образуют условия правила Лопиталья в случае  $x \rightarrow +0$  для функций  $f_1, g_1$ . В соответствии с утверждениями 32, 33 выполнено  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$

10. Так как для всех  $\forall x \in (0, \frac{1}{a'}) \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})} = \frac{f(x)}{g(x)}$  и  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$  (п.9), то, в соответствии с утверждением 17, выполнено  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ . Области определения функций  $\frac{f}{g}, \frac{f_1}{g_1}$  рассмотрены в п.1, 5 соответственно.

### 3.4.2. Случаи левосторонних пределов

**Утверждение 35.** Пусть  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ .

Если выполнены следующие условия:

1. Функции  $f, g$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$

2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = \infty$$

3. Для всех  $x \in (a, b)$  выполнено  $g'(x) \neq 0$

$$4. \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

$$\text{То выполнено } \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Определим функции  $f_1, g_1 : (-b, -a) \rightarrow \mathbb{R}$  следующим образом: для каждого  $x \in (-b, -a)$  полагаем  $f_1(x) = f(-x)$ ,  $g_1(x) = g(-x)$ .

2. В соответствии с утверждением 21, функции  $f_1, g_1$  дифференцируемы на интервале  $(-b, -a)$ , и для всех  $x \in (-b, -a)$  выполнено  $f'_1(x) = -f'(-x)$ ,  $g'_1(x) = -g'(-x)$

3. Докажем, что для всех  $x \in (-b, -a)$  выполнено  $g'_1(x) \neq 0$ .

3.1. Зафиксируем  $x \in (-b, -a)$

3.2. Тогда выполнено  $-x \in (a, b)$ , и, следовательно,  $g'_1(x) = -g'(-x) \neq 0$

4. Докажем, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$1. \lim_{x \rightarrow -b+0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -b+0} g_1(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -b+0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -b+0} g_1(x) = \infty$$

4.1. В случае если выполнено  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$ , то, в соответствии с утверждением 18, также выполнено  $\lim_{x \rightarrow -b+0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -b+0} g_1(x) = 0$

4.2. В случае если выполнено  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = \infty$ , то, в соответствии с утверждением 18, также выполнено  $\lim_{x \rightarrow -b+0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -b+0} g_1(x) = \infty$

5. Отдельно выпишем соотношения областей определения функций:  $\text{dom}(\frac{f'_1}{g'_1}) = -\text{dom}(\frac{f'}{g})$ ,  $\text{dom}(\frac{f_1}{g_1}) = -\text{dom}(\frac{f}{g})$

6. Так как  $\forall x \in (-b, -a) \frac{f'_1}{g'_1}(x) = \frac{f'_1(x)}{g'_1(x)} = \frac{-f'(-x)}{-g'(-x)} = \frac{f'(-x)}{g'(-x)} = \frac{f'}{g}(-x)$ , то, в соответствии с утверждением 18, выполнено  $\lim_{x \rightarrow -b+0} \frac{f'_1(x)}{g'_1(x)} = A$

7. Выводы п.2,3,4,6 образуют условия правила Лопиталя в случае  $x \rightarrow -b+0$ . В соответствии с утверждениями 32, 33 выполнено  $\lim_{x \rightarrow -b+0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$

8. Так как для всех  $\forall x \in (-b, -a) \frac{f_1}{g_1}(x) = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f}{g}(-x)$ , то, в соответствии с утверждением 18, выполнено  $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

□

**Утверждение 36.** Пусть  $f, g : (-\infty, -a) \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $a > 0$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ .

Если выполнены следующие условия:

1. Функции  $f, g$  дифференцируемы на полуинтервале  $(-\infty, -a)$

2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$$

3. Для всех  $x \in (a, b)$  выполнено  $g'(x) \neq 0$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

$$\text{То выполнено } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Определим функции  $f_1, g_1 : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  следующим образом: для каждого  $x \in (a, +\infty)$  полагаем  $f_1(x) = f(-x)$ ,  $g_1(x) = g(-x)$ .

2. В соответствии с утверждением 21, функции  $f_1, g_1$  дифференцируемы на интервале  $(a, +\infty)$ , и для всех  $x \in (a, +\infty)$  выполнено  $f'_1(x) = -f'(-x)$ ,  $g'_1(x) = -g'(-x)$

3. Докажем, что для всех  $x \in (a, +\infty)$  выполнено  $g'_1(x) \neq 0$ .

3.1. Зафиксируем  $x \in (a, +\infty)$

3.2. Тогда выполнено  $-x \in (-\infty, -a)$ , и, следовательно,  $g'_1(x) = -g'(-x) \neq 0$

4. Докажем, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = \infty$$

4.1. В случае если выполнено  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ , то, в соответствии с утверждением 18, также выполнено  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = 0$

4.2. В случае если выполнено  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$ , то, в соответствии с утверждением 18, также выполнено  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = \infty$

5. Отдельно выпишем соотношения областей определения функций:  $\text{dom}(\frac{f'_1}{g'_1}) = -\text{dom}(\frac{f'}{g})$ ,  $\text{dom}(\frac{f_1}{g_1}) = -\text{dom}(\frac{f}{g})$

6. Так как  $\forall x \in (-\infty, -a)$   $\frac{f'_1}{g'_1}(x) = \frac{f'_1(x)}{g'_1(x)} = \frac{-f'(-x)}{-g'(-x)} = \frac{f'(-x)}{g'(-x)} = \frac{f'}{g}(-x)$ , то, в соответствии с утверждением 18, выполнено  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'_1(x)}{g'_1(x)} = A$

7. Выводы п.2,3,4,6 образуют условия правила Лопиталя в случае  $x \rightarrow +\infty$ . В соответствии с утверждением 34 выполнено  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$

8. Так как для всех  $\forall x \in (-\infty, -a)$   $\frac{f_1}{g_1}(x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f}{g}(-x)$ , то, в соответствии с утверждением 18, выполнено  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

□

### 3.4.3. Случай двусторонних пределов

**Утверждение 37.** Пусть  $f, g : (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}$ .

Если выполнены следующие условия:

1. Функции  $f, g$  дифференцируемы на множестве  $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$

2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

3. Для всех  $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$  выполнено  $g'(x) \neq 0$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

$$\text{То выполнено } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. В соответствии с утверждением 31, существует  $\delta' > 0$  такое, что для всех  $x \in (a - \delta', a) \cup (a, a + \delta')$  выполнено  $g(x) \neq 0$ . Откуда следует, что функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  определена на всём множестве  $(a, a - \delta') \cup (a, a + \delta')$ . Далее будем рассматривать сами функции  $f, g$  как определённые на множестве  $(a, a - \delta') \cup (a, a + \delta')$ .

2. В соответствии с утверждением 19, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$1. \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$$

3. Аналогично, также в соответствии с утверждением 19, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$1. \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} g(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} g(x) = \infty$$

4. Вновь применяя утверждение 19, получаем выполнение условий  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

5. Выводы п.2, 4, 5 образуют условия правила Лопиталья в случаях  $x \rightarrow a + 0$  и  $x \rightarrow a - 0$ . В соответствии с утверждениями 32, 33, 35 выполнено  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A, \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$

6. Применяя утверждение 19 в обратную сторону, получаем  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$

□

**Утверждение 38.** Пусть  $f, g : (-\infty, -\frac{1}{\delta}) \cup (\frac{1}{\delta}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, A \in [-\infty, +\infty] \cup \{\infty\}.$

Если выполнены следующие условия:

1. Функции  $f, g$  дифференцируемы на множестве  $(-\infty, -\frac{1}{\delta}) \cup (\frac{1}{\delta}, +\infty)$

2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

3. Для всех  $x \in (-\infty, -\frac{1}{\delta}) \cup (\frac{1}{\delta}, +\infty)$  выполнено  $g'(x) \neq 0$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

То выполнено  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. В соответствии с утверждением 31, существует  $\delta' > 0$  такое, что для всех  $x \in (a - \delta', a) \cup (a, a + \delta')$  выполнено  $g(x) \neq 0$ . Откуда следует, что функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  определена на всём множестве  $(a, a - \delta') \cup (a, a + \delta')$ . Далее будем рассматривать сами функции  $f, g$  как определённые на множестве  $(a, a - \delta') \cup (a, a + \delta')$ .

2. В соответствии с утверждением 20, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$

3. Аналогично, также в соответствии с утверждением 20, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$

4. Вновь применяя утверждение 20, получаем выполнение условий  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ .

5. Выводы п.2, 4, 5 образуют условия правила Лопиталья в случаях  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ . В соответствии с утверждениями 32, 33, 36 выполнено  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ .

6. Применяя утверждение 20 в обратную сторону, получаем  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ .

□

Случай  $x \rightarrow a + 0$  покрывается утверждениями 32, 33, а случай  $x \rightarrow +\infty$  — утверждением 34. Далее, случаи  $x \rightarrow a - 0$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow \infty$  покрываются утверждениями 35, 36, 37, 38 соответственно. Таким образом, теорема 1 доказана.

## 4. Заключение

В курсе математического анализа изложение полного доказательства правила Лопиталья является одной из тем повышенной сложности. Одним из возможных путей обобщения представленного результата является ослабление условия  $\forall x g'(x) \neq 0$ : доказательство использует теорему Коши о среднем, в которой, в свою очередь, условие  $g' \neq 0$  ослабляется до условия  $(f')^2 + (g')^2 \neq 0$ . Однако, несмотря на возможность ослабления, данное условие существенно: контрпримеры, демонстрирующие существенность данного условия, представлены в [11], [13], [16]. Имеются также некоторые другие обобщения правила Лопиталья, см. например, работы [12], [15].

Далее планируются публикации, посвященные другим темам математического анализа, таким как «Равномерная непрерывность», «Равномерная сходимость», а также «Многомерный предел и дифференцируемость функций многих переменных». В этих публикациях будут представлены доказательства соответствующих теорем, использующие критерии, аналогичные определению предела функции по Гейне.

Отдельно отметим, что «определение по Гейне» может быть обобщено также и для пределов по произвольной базе: в общем случае последовательность заменяется направленностью, т. е. множеством элементов соответствующего пространства, на котором введено отношение частичного порядка. (см., например, [10], [5]). Поскольку для некоторой точки топологического

пространства система её окрестностей является базой предела, то используемые в настоящей работе технические рассуждения (например, понятие частичного предела и его свойства) могут быть перенесены на произвольные топологические и метрические пространства.

Автор, таким образом, предполагает, что использование «определения Гейне» позволит, возможно, упростить доказательства некоторых теорем общей топологии и функционального анализа.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология // М.: Высшая школа. 1979, 336 с.
2. Бесов О. В. Лекции по математическому анализу // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2014, 480 с.
3. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. Изд. 10-е, испр. // М.: МЦНМО. 2019, xii+564 с.
4. Иванов Г. Е. Лекции по математическому анализу // М.: МФТИ. 2017, 340 с.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ // М.: Наука. 1984, 752 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: Учеб. Для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т. 1. 2-е изд., перераб. и доп. // М.: Высш. шк. 1988, 713 с.
7. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов // М.: Наука. 1975, 240 с.
8. Никольский С. М. Курс математического анализа: учебное пособие. 6-е изд., стер. // М.: Физматлит. 2001, 592 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления // М.: Наука. 1966, 607 с.
10. Энгелькинг Р. Общая топология // М.: Мир. 1986, 752 с.
11. Boas R. P. Counterexamples to L'Hôpital's rule // American Mathematical Monthly. 1986. vol. 93, no. 9, pp. 644 - 645.
12. Lee C. M. Generalizations of l'Hôpital's rule // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. vol. 66, no. 2, pp. 315-320.
13. Tausk D. V. Counterexample to l'Hôpital's rule // URL:<https://www.ime.usp.br/~tausk/texts/CounterExampleLHospital.pdf>
14. Taylor A. E. L'Hospital's Rule // The American Mathematical Monthly. 1952. Volume: 59, Issue: 1, pp. 20 — 24.
15. Vianello M. A generalization of l'Hôpital's rule via absolute continuity and Banach modules // Real Analysis Exchange. 1993. vol. 18, no. 2, pp. 557-567.
16. Vyborny R., Nester R. L'Hôpital's rule, a counterexample // Elemente der Mathematik. 1989. Volume: 44, Issue: 5, pp. 116-121.

## REFERENCES

1. Aleksandryan, R. A. & Mirzahanyan, E. A. 1979, «Obshchaya topologiya [General topology]», Vysshaya shkola, Moscow, Russia, 336 pp.
2. Besov O. V. 2014, «Lekcii po matematicheskomu analizu [Lectures on calculus]», FIZMATLIT, Moscow, Russia, 480 pp.
3. Zorich, V. A. 2019, «Matematicheskij analiz. CHast' 1. [Calculus. Part 1]», 10th edition, MCCME, Moscow, Russia, xii+564 pp.
4. Ivanov, G. E. 2017, «Lekcii po matematicheskomu analizu [Lectures on calculus]», MIPT, Moscow, Russia, 340 pp.
5. Kantorovich, L. V. & Akilov, G. P. 1984, «Funkcional'nyj analiz [Functional analysis]», Nauka, Moscow, Russia, 752 pp.
6. Kudryavcev, L. D. 1988, «Kurs matematicheskogo analiza [The course of calculus]. Volume 1», 2nd edition, Vysshaya shkola, Moscow, Russia, 713 pp.
7. Lavrov, I. A. & Maksimova, L. L. 1975, «Zadachi po teorii mnozhestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov [Problems in Set Theory, Mathematical Logic and the Theory of Algorithms]», Nauka, Moscow, Russia, 240 pp.
8. Nikol'skij, S. M. 2001, «Kurs matematicheskogo analiza [The course of calculus]», 6th edition, FIZMATLIT, Moscow, Russia., 592 pp.
9. Fihtengol'c, G. M. 1966, «Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya [The course of differential and integral calculus]», Nauka, Moscow, Russia, 607 pp.
10. Engel'king, R. 1986, «Obshchaya topologiya [General topology]», Mir, Moscow, Russia, 752 pp.
11. Boas, R. P. 1986, «Counterexamples to L'Hôpital's rule», American Mathematical Monthly, vol. 93, no. 9, pp. 644 — 645.
12. Lee, C. M. 1977, «Generalizations of l'Hôpital's rule», Proc. Amer. Math. Soc, vol. 66, no. 2, pp. 315-320.
13. Tausk, D. V., «Counterexample to l'Hôpital's rule», Available at: <https://www.ime.usp.br/~tausk/texts/CounterExampleLHospital.pdf>
14. Taylor, A. E. 1952, «L'Hospital's Rule», The American Mathematical Monthly, Volume: 59, Issue: 1, pp. 20 — 24.
15. Vianello, M. 1993, «A generalization of l'Hôpital's rule via absolute continuity and Banach modules», Real Analysis Exchange, vol. 18, no. 2, pp. 557-567.
16. Vyborny, R. & Nester, R. 1989, «L'Hôpital's rule, a counterexample», Elemente der Mathematik, Volume: 44, Issue: 5, pp. 116-121.

Получено: 08.10.2023

Принято в печать: 21.12.2023