ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 5.

УДК 517.955.8 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-31-48

Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения Шредингера с потенциалом $Q(x) = x^2$ [1]

А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Д. А. Шапошникова

Елисеев Александр Георгиевич — доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).
e-mail: yeliseevag@mpei.ru
Ратникова Татьяна Анатольевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).
e-mail: ratnikovata@mpei.ru
Шапошникова Дарья Алексеевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).
e-mail: shaposhnikovda@mpei.ru

Аннотация

В предложенной работе выполнено построение регуляризованной асимптотики решения сингулярно возмущенной неоднородной задачи Коши для уравнения Шредингера. Выбранный в работе потенциал $q(x) = x^2$ приводит к особенности в спектре предельного оператора в виде сильной точки поворота. Основная проблема, с которой сталкивается исследователь при применении метода регуляризации, связана с поиском и описанием регуляризирующих функций, которые содержат в себе неравномерную сингулярную зависимость решения искомой задачи, выделяя которые, можно оставшуюся часть решения искать в виде степенных рядов по малому параметру. Развитие метода регуляризации привело к пониманию того, что этот поиск тесно связан со спектральными характеристиками предельного оператора. В частности, установлено, каким образом следует описывать сингулярную зависимость асимптотического решения от малого параметра при выполнении условий стабильности спектра. При нарушении условий стабильности все обстоит значительно сложнее. Более того, до сих пор нет законченной математической теории для сингулярно возмущенных задач с нестабильным спектром, хотя с общематематических позиций их стали изучать порядка 50 лет назад. Особый интерес среди таких задач вызывают те, в которых спектральные особенности выражены в виде точечной нестабильности. В работах, посвященных сингулярно возмущенным задачам, некоторая часть особенностей такого вида названа точками поворота. Опираясь на идеи асимптотического интегрирования задач с нестабильным спектром С.А. Ломова и А.Г. Елисеева, указано каким образом и из каких соображений следует вводить регуляризирующие функции и дополнительные регуляризирующие операторы, подробно описан формализм метода регуляризации для поставленной задачи, проведено обоснование этого алгоритма и построено асимптотической решение любого порядка по малому параметру.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, асимптотическое решение, метод регуляризации, точка поворота.

Библиография: 21 названий.

[1]Результаты А. Г. Елисеева были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

Для цитирования:
А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Д. А. Шапошникова. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения Шредингера с потенциалом $Q(x) = x^2$ // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 31–48.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 5.

UDC 517.955.8 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-5-31-48

Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem for an equation of Schrodinger with potential $Q(x) = x^2$

A. G. Eliseev, T. A. Ratnikova, D. A. Shaposhnikova

Eliseev Alexander Georgievich — doctor of physical and mathematical science, associate professor, National Research University "MPEI" (Moscow).
e-mail: yeliseevag@mpei.ru
Ratnikova Tatyana Anatolyevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, National Research University "MPEI" (Moscow).
e-mail: ratnikovata@mpei.ru
Shaposhnikova Daria Alekseevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, National Research University "MPEI" (Moscow).

Abstract

In the proposed work, we construct a regularized asymptotics for the solution of a singularly perturbed inhomogeneous Cauchy problem for the Schrodinger equation. The potential $q(x) = x^2$ chosen in the paper leads to a singularity in the spectrum of the limit operator in the form of a strong turning point. The main problem that the researcher faces when applying the regularization method is related to the search and description of regularizing functions that contain a non-uniform singular dependence of the solution of the desired problem, highlighting which, you can search for the rest of the solution in the form of power series in a small parameter. The development of the regularization method led to the understanding that this search is closely related to the spectral characteristics of the limit operator. In particular, it is established how the singular dependence of the asymptotic solution on a small parameter should be described under the condition that the spectrum is stable. When stability conditions are violated, things are much more complicated. Moreover, there is still no complete mathematical theory for singularly perturbed problems with an unstable spectrum, although they began to be studied from a general mathematical standpoint about 50 years ago. Of particular interest among such problems are those in which the spectral features are expressed in the form of point instability. In papers devoted to singularly perturbed problems, some of the singularities of this type are called turning points. Based on the ideas of asymptotic integration of problems with an unstable spectrum by S.A. Lomov and A.G. Eliseev, it is indicated how and from what considerations regularizing functions and additional regularizing operators should be introduced, the formalism of the regularization method for the problem posed is described in detail, and justification of this algorithm and an asymptotic solution of any order with respect to a small parameter is constructed.

Keywords: singularly perturbed problem, asymptotic solution, regularization method, turning point.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
A. G. Eliseev, T. A. Ratnikova, D. A. Shaposhnikova, 2023, "Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem for an equation of Schrodinger with potential $Q(x) = x^2$", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 31–48.

1. Введение

В настоящее время различным методам асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных задач посвящено огромное количество работ, их столь много, что полного обзора в статье ограниченного объема привести не представляется возможным. Отсылаем читателя к монографиям [1, 2], где приведены подробные библиографии по существующим подходам в теории сингулярных возмущений и сделан обзор о современном состоянии метода регуляризации С.А. Ломова, основные принципы которого по признанию самого автора в монографии [1] были заложены в конце пятидесятых, начале шестидесятых годов прошлого века в цикле работ [3]–[7]. Основная проблема, с которой сталкивается исследователь при применении последнего метода, связана с поиском и описанием регуляризирующих функций, которые содержат в себе неравномерную сингулярную зависимость решения искомой задачи, выделяя которые, можно оставшуюся часть решения искать в виде степенных рядов по малому параметру. Развитие метода регуляризации привело к пониманию того, что этот поиск тесно связан со спектральными характеристиками предельного оператора. В частности установлено, каким образом следует описывать сингулярную зависимость асимптотического решения от малого параметра при выполнении условий стабильности спектра [1]. При нарушении условий стабильности все обстоит значительно сложнее. Более того, до сих пор нет законченной математической теории для сингулярно возмущенных задач с нестабильным спектром, хотя с общематематических позиций их стали изучать порядка пятидесяти лет назад. Особый интерес среди таких задач вызывают те, в которых спектральные особенности выражены в виде точечной нестабильности (см., например, [9]–[17]). В работах, посвященных сингулярно возмущенным задачам, некоторая часть особенностей такого вида названа точками поворота и проведена их классификация:

1) простая точка поворота — собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга и одно собственное значение в отдельных точках обращается в нуль;

2) слабая точка поворота — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения, а базис из собственных векторов сохраняет гладкость;

3) сильная точка поворота — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения, а базис из собственных векторов теряет гладкость.

Приведем здесь ссылки на несколько последних исследований в рамках метода регуляризации сингулярно возмущенных задач с особенностями в спектре предельного оператора указанного вида: по простой точке поворота см. работы [9, 10, 11], по слабой точке поворота — [12, 13, 14], сильной точке поворота — [16, 17].

Типичными физическими примерами сингулярно возмущенных задач являются уравнение Навье-Стокса с малой вязкостью и уравнение Шредингера, если постоянную Планка $\hbar$ считать малой величиной[2]. Формальный предельный переход $\hbar \to 0$ в соотношениях квантовой теории осуществляет переход от квантовой к классической механике (см., например, [19, § 6]),

[2]Строго говоря, постоянная Планка $\hbar$ является размерной величиной и имеет вполне конкретное значение, и утверждение о малости $\hbar$ следует понимать в том смысле, что всегда можно выделить безразмерную комбинацию параметров, содержащую $\hbar$ в какой-то степени, малую по сравнению с другими безразмерными параметрами, не содержащими $\hbar$.

поэтому в тех случаях, когда целесообразно искать приближенные (по малому $\hbar$) решения уравнения Шредингера, говорят о квазиклассическом приближении (см. [19, гл. 7]). Описанный квазиклассический переход в нестационарном уравнении Шредингера в координатном представлении на полуоси с гамильтонианом $\hat{H}(p,x) = \hat{p}^2 + \hat{x}^2$ порождает сингулярно возмущенную задачу, асимптотическому интегрированию которой посвящена настоящая работа. Следует сразу отметить, что рассматриваемая нами задача содержит неоднородное уравнение, что, как станет ясно в основном тексте статьи, существенно усложняет процесс построения регуляризованного асимптотического ряда.

Во многом наши исследования по асимптотическому интегрированию задачи Коши для нестационарного и неоднородного уравнения Шредингера с обозначенным выше гамильтонианом при $\hbar \to 0$ представляют собой развитие идей работы [16, 17], где рассмотрена задача Коши для параболического уравнения с сильной точкой поворота.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для нестационарного уравнения Шредингера ($\varepsilon \equiv \hbar$) с неоднородностью $h(x,t)$:

$$\begin{cases} i\varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u = h(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \end{cases} \tag{1}$$

где выполнены условия:

1) $f(x) \in C^\infty(-\infty,+\infty)$;

2) $h(x,t) \in C^\infty(-\infty,+\infty) \times [0,T]$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)| dx < \infty$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 |h(x,t)| dx < \infty$ сходятся равномерно по t (достаточные условия для существования классического решения задачи);

4) $\forall k,m,n \in N$: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^m |f_0^{(k)}(x)|\, dx < \infty$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^m |h^{(k,n)}(x,t)|\, dx < \infty$ сходятся равномерно по t (достаточные условия для построения асимптотического ряда).

Классическим решением задачи (1) называется функция $u(x,t,\varepsilon)$, непрерывная в $\overline{Q}_T = (-\infty,+\infty) \times [0,T] \times (0,\varepsilon_0]$, имеющая непрерывные $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в Q_T, удовлетворяющая во всех точках Q_T уравнению (1) и непрерывно примыкающая к начальным условиям $f(x)$.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. *Классическое решение задачи* (1) *при выполненных условиях 1)– 3) существует и единственно.*

Доказательство. См. Приложение 1. □

Для наглядного представления о виде спектральной особенности в поставленной задаче следует перейти к матричной форме записи:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix},$$

здесь введена замена $\varepsilon \cdot \partial u / \partial x = v$. Тогда матрица предельного оператора имеет вид:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь легко заметить, что матрица $A(x)$ диагонализируема и имеет гладкий базис из собственных векторов при $x \neq 0$, а в точке пересечения собственных значений (т.е при $x = 0$) соответствующий ей предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову и базис из собственных векторов теряет гладкость по x. Согласно указанной во введении классификации, такая спектральная особенность представляет собой сильную точку поворота.

В общем случае регуляризирующие функции необходимо строить, опираясь на каноническую форму предельного оператора, к которой можно привести с помощью гладких преобразований (см., например, работу [18]), и соответствующий базис, но в предложенной задаче оператор уже имеет каноническую форму и в соответствующих построениях нет необходимости. Более того, необходимо произвести регуляризацию правой части $h(x,t)$ (это связано с тем, что предельный оператор с матрицей $A(x)$ в точке $x = 0$ необратим).

3. Формализм метода регуляризации

3.1. Регуляризирующая функция и дополнительные регуляризирующие операторы

Регуляризирующую функцию задачи (1) будем искать в стандартной форме $e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$, для решений линейных однородных уравнений такие сингулярности были выделены ещё Ж. Лиувиллем в [20]. Итак, осуществляя подстановку $u(x,t) = v(x,t)e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$ в соответствующее однородное уравнение задачи (1) и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε, получим:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - x^2\right)u + i\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}u - 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{2}$$

Анализ последнего выражения позволяет утверждать, что для поиска $u(x,t)$ в виде регулярного ряда по ε нужно в качестве $\varphi(x,t)$ взять решение следующей задачи:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = x^2, \qquad \varphi(x,0) = 0. \tag{3}$$

Выбор начального условия для $\varphi(x,t)$ обусловлен тем, чтобы в дальнейшем начальное условие для $v(x,t)$ содержало сингулярную зависимость от ε. Кроме того, при таком выборе начальное условие на $v(x,t)$ наследует начальное условие задачи (1).

Задача (3) представляет собой задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, решать которую будем методом характеристик (см. [21, гл. 5, § 4, с. 268–272]). Обозначив $p = \partial\varphi/\partial t$ и $q = \partial\varphi/\partial x$, получим следующую характеристическую систему для уравнения задачи (3):

$$\begin{gathered}\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{2x} = \frac{d\varphi}{p - 2q^2} = d\tau,\\ \text{Н.У.:}\;\; t = 0,\; x = s,\; \varphi = 0,\; q = 0,\; p = s^2.\end{gathered} \tag{4}$$

Начальные условия в последней системе получены параметризацией (s — параметр) начального условия задачи (3).

Интегрируя систему (4), получаем искомую поверхность в параметрическом виде:

$$t = \tau, \quad x = s\cos 2\tau, \quad \varphi = s^2\frac{\sin 4\tau}{4}.$$

Тогда окончательно для функции $\varphi(x,t)$ в явном виде имеем:

$$\varphi(x,t) = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{tg}\,2t. \tag{5}$$

Дополнительный регуляризирующий сингулярный оператор, связанный с точечной необратимостью предельного оператора $A(x)$, строится с помощью фундаментального решения задачи (1) на всей прямой, которое можно получить методом интегрального преобразования Фурье для однородного уравнения с дельта-функцией в начальном условии (см. п. 5). Их задача: вложить правую часть уравнения в образ предельного оператора. Выпишем здесь только окончательный результат:

$$K(x,\xi,t)=\frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon\sin 2t}}\exp\left[i\left(\operatorname{ctg}2t\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon}-\frac{x\xi}{\varepsilon\sin 2t}\right)\right].$$

$K(x,\xi,t)$ обладает свойством $K(x,\xi,0)=\delta(x-\xi)$.

Дополнительные сингулярные интегральные операторы для регуляризации правой части итерационных задач получим, если проинтегрировать $K(x,\xi,t)$ по переменной ξ и для удобства поделив на i. Тогда получим:

$$\sigma_0(x,t,\varepsilon)(\cdot)=-i\int_0^t(\cdot)d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,\xi,t-\tau)d\xi=-\,i\int_0^t(\cdot)\frac{1}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}}e^{-\frac{ix^2\operatorname{tg}2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau,$$

$$\sigma_1(x,t,\varepsilon)(\cdot)=-i\int_0^t(\cdot)d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\xi K(x,\xi,t-\tau)d\xi=-\,ix\int_0^t(\cdot)\frac{1}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}^3}e^{-\frac{ix^2\operatorname{tg}2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau.$$

Фактически сингулярные операторы $\sigma_0(x,t,\varepsilon)(\cdot)$, $\sigma_1(x,t,\varepsilon)(\cdot)$ — суть решения уравнения Шредингера с правыми частями $i\varepsilon$, $i\varepsilon x$. Действия операторов на функцию запишется как:

$$\begin{aligned}\sigma_0(f(t))&=-i\int_0^t\frac{f(\tau)}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}}e^{-\frac{ix^2\operatorname{tg}2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau=-if(t)*\frac{e^{-\frac{ix^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}},\\ \sigma_1(f(t))&=-ix\int_0^t\frac{f(\tau)}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}^3}e^{-\frac{ix^2\operatorname{tg}2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau=-ixf(t)*\frac{e^{-\frac{ix^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}^3}.\end{aligned}\tag{6}$$

Введем оператор $T_\varepsilon=i\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}+\varepsilon^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-x^2$. Тогда действие оператора T_ε запишется как

$$T_\varepsilon(\sigma_0(f(t)))=\varepsilon f(t)+f(t)*T_\varepsilon\frac{e^{-\frac{ix^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}=\varepsilon f(t),$$

$$T_\varepsilon(\sigma_1(f(t)))=\varepsilon xf(t)+xf(t)*T_\varepsilon\frac{e^{-\frac{ix^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}^3}=\varepsilon xf(t).$$

3.2. Построение регуляризованного асимптотического ряда

Введенные в предыдущем разделе регуляризирующая функция $e^{-i\varphi/\varepsilon}$ и дополнительные регуляризирующие операторы $\sigma_0(x,t,\varepsilon),\sigma_1(x,t,\varepsilon)$ позволяют рассчитывать, что оставшуюся часть решения можно искать в виде степенных рядов по ε. Искать решение исходной задачи (1) будем в виде:

$$u(x,t,\varepsilon)=e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x,t)+\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k\left[\sigma_0(y_k(t))+\sigma_1(z_k(t))\right]+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(x,t).\tag{7}$$

Здесь начало суммирования с $k=-1$ во втором ряде обусловлено необходимостью регуляризации правой части $h(x,t)$ для разрешимости задачи (1) на нулевом шаге по ε.

Учитывая соотношения (2) и свойства построенных операторов (6), подставим (7) в задачу (1). При этом получим:

$$\begin{cases} e^{-i\varphi/\varepsilon}\left(i\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+1}\dot{v}_k+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+2}v_k''-i2x\operatorname{tg}2t\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+1}v_k'-i\operatorname{tg}2t\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+1}v_k\right)+\\ +\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\left[y_{k-1}+xz_{k-1}\right]+i\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+1}\dot{w}_k+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+2}w_k''-x^2\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}w_k=h(x,t),\\ \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}v_k(x,0)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}w_k(x,0)=f(x). \end{cases} \tag{8}$$

здесь $v_k=v_k(x,t), w_k=w_k(x,t)$, а $y_k=y_k(t), z_k=z_k(t)$, точкой обозначена частная производная по времени, штрихом — частная производная по координате. Выделив в (8) группы слагаемых при регуляризирующей функции и без нее, приходим к серии итерационных задач:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_k}{\partial t}-2x\operatorname{tg}2t\dfrac{\partial v_k}{\partial x}-\operatorname{tg}2tv_k=i\dfrac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x^2},\\ y_k(t)*T_\varepsilon\Big(\dfrac{e^{-\frac{ix^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}\Big)=0,\\ z_k(t)*T_\varepsilon\Big(x\dfrac{e^{-\frac{ix^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}\Big)=0,\\ x^2w_k=-h(x,t)\delta_0^k+i\dfrac{\partial w_{k-1}}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x^2}+y_{k-1}(t)+xz_{k-1}(t),\quad k=\overline{0,\infty}. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь δ_k^0 — символ Кронекера: $\delta_0^0=1$, $\delta_k^0=0$ при $k\neq 0$. Отметим, что при отрицательном индексе $k=-1$ функции $v_{=1}(x,t)$ и $w_{-1}(x,t)$ необходимо считать равными нулю (этих слагаемых просто нет в ряде (7)). Функции $y_{-1}(t)$, $z_{-1}(t)$ произвольны на шаге $k=-1$. Они определяются из условия разрешимости на итерациноом шаге $k=0$.

Рассмотрим итерационную задачу на шаге $k=0$ в (9)):

$$\begin{cases} \dot{v}_0(x,t)-2x\operatorname{tg}2tv_0'(x,t)-\operatorname{tg}2tv_0=0,\\ y_0(t)*T_\varepsilon\Big(\dfrac{e^{-\frac{ix^2\operatorname{th}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}\Big)=0,\\ z_0(t)*T_\varepsilon\Big(x\dfrac{e^{-\frac{ix^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}\Big)=0,\\ x^2w_0(x,t)=-h(x,t)+y_{-1}(t)+xz_{-1}(t)\\ v_0(x,0)+w_0(x,0)=f(x), \end{cases} \tag{10}$$

Для разрешимости второго уравнения из системы (10) достаточно положить

$$y_{-1}(t)\equiv -h(0,t),\quad z_{-1}(t)\equiv -\frac{\partial h}{\partial x}(0,t). \tag{11}$$

Тогда для $w_0(x,t)$ получим гладкое решение:

$$w_0(x,t)=-\frac{h(x,t)-h(0,t)-\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)}{x^2}\equiv ih_0(x,t), \tag{12}$$

что в свою очередь приводит к задаче Коши для определения функции $v_0(x,t)$:

$$\begin{cases} \dot{v}_0(x,t)-2x\operatorname{tg}(2t)v_0'(x,t)-\operatorname{tg}2tv_0=0,\\ v_0(x,0)=\dfrac{h(x,t)-h(0,t)-\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)}{x^2}+f(x). \end{cases} \tag{13}$$

Последняя задача легко решается обычными методами интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$v_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\cos 2t}} \Big(f\Big(\frac{x}{\cos 2t}\Big) - h_0\Big(\frac{x}{\cos 2t}, 0\Big)\Big). \tag{14}$$

Отметим, что функции $z_0(t)$ и $y_0(t)$ на нулевом шаге не определяются, выражения для них будут получены на следующем итерационном шаге. Этот факт не позволяет нам пока выписать главный член асимптотики.

Переходим теперь к задаче на шаге $k = 1$ в (9):

$$\begin{cases} \dot v_1(x,t) - 2x\operatorname{tg} 2t v_1'(x,t) - \operatorname{tg} 2t v_1(x,t) = iv_0''(x,t), \\ y_1(t) * T_\varepsilon\big(\dfrac{e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}\big) = 0, \\ z_1(t) * T_\varepsilon\big(x\dfrac{e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}\big) = 0, \\ x^2 w_1(x,t) = i\dot w_0(x,t) + y_0(t) + xz_0(t), \\ v_1(x,0) + w_1(x,0) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

Подставляя $w_0(x,t)$ из (12) в уравнение для $w_1(x,t)$ этой системы, убеждаемся, что для его разрешимости нужно положить

$$y_0(t) \equiv -i\frac{\partial h_0}{\partial t}(0,t), \quad z_0(t) \equiv -i\frac{\partial^2 h_0}{\partial x \partial t}(0,t). \tag{16}$$

Тогда аналогично предыдущему итерационному шагу для $w_1(x,t)$ также получим гладкое решение

$$w_1(x,t) = i\frac{\dot h_0(x,t) + \frac{\partial h_0}{\partial t}(0,t) + \frac{\partial^2 h_0}{\partial x \partial t}(0,t)}{x^2} \equiv ih_1(x,t),$$

а для $v_1(x,t)$ из (15) — задачу Коши для квазилинейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - 2x\operatorname{tg} 2t \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} - \operatorname{tg} 2t v_1 = iv_0''(x,t), \tag{17}$$

Уравнение легко решается обычными методами интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$v_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\cos 2t}} \Big[iv_0''\Big(\frac{x}{\cos 2t}\Big) + \psi\Big(\frac{x}{\cos 2t}\Big)\Big].$$

Здесь $\psi(x)$ — произвольная функция, определяется из начального условия (15). Тогда решение запишется в виде:

$$v_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\cos 2t}} \Big[i2v_0''\Big(\frac{x}{\cos 2t}\Big) - h_1\Big(\frac{x}{\cos 2t}, 0\Big)\Big].$$

Ещё раз обратим внимание на то, что полностью определить все слагаемые на итерационном шаге $k = 1$ в ряде (7) удается только на следующем итерационном шаге $k = 2$. В результате будем иметь:

$$y_1(t) \equiv -ih_1(0,t), \quad z_1(t) \equiv -i\frac{\partial h_1}{\partial x}(0,t),$$

$$h_1(x,t) = i\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2},$$

а функция $h_1(x,t)$ уже определена.

Продолжая по аналогии описанный процесс для $k = 2, 3, \ldots$ в (9), можно найти все члены ряда (11). В конце данного раздела, опираясь на (15), (16), (17), выпишем главный член асимптотики:

$$u_{gl}(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\int\limits_0^t \frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}} e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau + x\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial h(0,\tau)}{\partial x}}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}^3} e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau\right] +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\cos 2t}}\left[f\left(\frac{x}{\cos 2t}\right) - h_0\left(\frac{x}{\cos 2t}, 0\right)\right] e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}} -$$
$$- i\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial h_0(0,\tau)}{\partial \tau}}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}} e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau - ix\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial^2 h_0}{\partial \tau \partial x}(0,\tau)}{\sqrt{\cos 2(t-\tau)}^3} e^{-\frac{ix^2 \operatorname{tg} 2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau +$$
$$+ \frac{-h(x,t) + h(0,t) + x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)}{x^2}.$$

4. Оценка остаточного члена

Пусть члены ряда (11) определены в результате решения итерационных задач (9) для $0 \leqslant k \leqslant n+1$. Запишем соотношение для остатка:

$$\begin{aligned} u(x,t,\varepsilon) = e^{-i\frac{\varphi(x,t)}{\varepsilon}} \sum_{k=0}^{n} v_k(x,t)\varepsilon^k + \sum_{k=-1}^{n} \varepsilon^k \left[\sigma_0(y_k(t)) + \sigma_1(z_k(t))\right] + \\ + \sum_{k=0}^{n} w_k(x,t)\varepsilon^k + \varepsilon^{n+1} R_n(x,t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{18}$$

Подставим (18) в задачу (1). Учитывая решения итерационных задач и сокращая на ε^{n+1}, для остаточного члена получим задачу:

$$\begin{cases} i\varepsilon \dfrac{\partial R_n}{\partial t} + \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 R_n}{\partial x^2} - x^2 R_n = -H(x,t,\varepsilon), \\ R_n(x,0,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

где $H(x,t,\varepsilon) = \varepsilon v_n''(x,t) e^{-i\frac{\varphi(x,t)}{\varepsilon}} + x^2 w_{n+1}(x,t) + \varepsilon w_n''(x,t)$. Так как итерационные задачи решены до итерационного шага ε^{n+1}, то $x^2 w_{n+1}(x,t)$ удовлетворяет условиям 1)div4) в постановке задачи (1) (см. Приложение 3). Используя фундаментальное решение, для $R_n(x,t,\varepsilon)$ получим выражение:

$$R_n(x,t,\varepsilon) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\xi,\tau,\varepsilon) K(x,\xi,t-\tau) d\xi =$$
$$= \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\sin 2(t-\tau)}} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\xi,\tau,\varepsilon) \exp\left[i\left(\operatorname{ctg} 2(t-\tau)\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon} - \frac{x\xi}{\varepsilon \sin 2(t-\tau)}\right)\right] d\xi.$$

Теперь, учитывая условия 1)div4) в постановке задачи (1) и тот факт, что итерационные задачи решены вплоть до шага $k = n+1$, легко построить оценку по модулю для остатка:

$$|R_n| = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \left|H(y,\tau,\varepsilon)\right| \leqslant \frac{TM}{\varepsilon\sqrt{\pi}} = \frac{C}{\varepsilon} \quad \text{для} \quad (x,t) \in (\mathbf{R} \times [0,T]).$$

Осталось представить остаточный член в виде:

$$R_n = u_{n+1} + \varepsilon R_{n+1},$$

Тогда окончательно получим

$$|R_n| \leqslant |u_{n+1}| + \varepsilon \frac{C}{\varepsilon} \leqslant \mathbb{C}.$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 2 (Об оценке остатка (асимтотическая сходимость)). *Пусть дана задача Коши* (1) *и выполнены условия* 1)div4). *Тогда верна оценка*

$$\Big\| u(x,t,\varepsilon) - \Big(e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^{n} v_k(x,t)\varepsilon^k + \sum_{k=-1}^{n} \varepsilon^k [\sigma_0(y_k(t)) + \sigma_1(z_k(t))] + \\ + \sum_{k=0}^{n} \omega_k(x,t)\varepsilon^k \Big) \Big\|_{C(\mathbf{R}^{(+)}\times[0,T])} \leqslant \mathbb{C}\varepsilon^{n+1},$$

где $\mathbb{C} \geqslant 0$ *— константа, не зависящая от* ε, *а* $v_k(x,t), z_k(t), \omega_k(x,t)$ *получены из решения итерационных задач при* $0 \leqslant k \leqslant n+1$.

5. Построение фундаментального решения

Поставим задачу для поиска фундаментального решения задачи (1):

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u = 0, \quad u(x,0) = \delta(x-\xi).$$

Предварительно сделаем замену функции решения: $u(x,t) = e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon} - it} v(x,t)$. В результате получим задачу:

$$i\frac{\partial v}{\partial t} - 2xv = -\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(x,0) = e^{\frac{\xi^2}{2\varepsilon}} \delta(x-\xi).$$

Для решения этой задачи применим метод интегрального преобразования Фурье. Будем предполагать, что выполняются условия существования интеграла Фурье и что функция $v(x,t)$ со своими частными производными достаточно быстро стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. Также предположим, что интеграл для образа Фурье искомого решения $F(\lambda,t)$ можно дифференцировать по переменным t и λ под знаком интеграла. В пространстве образов получим следующую задачу Коши:

$$i\frac{\partial F}{\partial t} + 2\lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} = (\varepsilon\lambda^2 - 2)F, \quad F(\lambda,0) = e^{\frac{\xi^2}{2\varepsilon} - i\lambda\xi}. \tag{20}$$

Задача (20) — задача для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, интегрирование которой проводится обычными методами. Опуская достаточно громоздкие выкладки, выпишем здесь только её решение:

$$F(\lambda,t) = \exp\Big(-\varepsilon \frac{\lambda^2}{4}(e^{i4t} - 1) - i\lambda\xi e^{i2t} + \frac{\xi^2}{2\varepsilon} + i2t \Big).$$

Теперь, используя формулу обратного преобразования Фурье, для оригинала будем иметь:

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda,t) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \exp\Big(\frac{\xi^2}{2\varepsilon} + i2t \Big) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\varepsilon \frac{\lambda^2}{4}(e^{i4t} - 1) - i\lambda(e^{i2t}\xi - x) \Big) d\lambda.$$

Для вычисления получившегося интеграла выделим полный квадрат в показателе экспоненты и после несложных преобразований и умножения на $e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}-it}$, получим фундаментальное решение:

$$K(x,\xi,t)=\frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon\sin 2t}}\exp\left[i\left(\operatorname{ctg}2t\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon}-\frac{x\xi}{\varepsilon\sin 2t}\right)\right].$$

6. Заключение

Как уже было отмечено во введении, основной проблемой практического применения метода регуляризации С.А. Ломова является построение регуляризирующих функций. В случае спектральных особенностей у предельного оператора выделение сингулярной зависимости решения от малого параметра достаточно трудная задача. В предложенной работе для задачи Коши для неоднородного уравнения Шредингера со спектральной особенностью в виде сильной точки поворота $q(x)=x^2$ регуляризация, как выяснилось, состоит из двух частей:

1) описание пограничного слоя обусловленного точкой $t=0$;

2) выделение сингулярностей, связанных с точечной необратимостью предельного оператора.

В основном тексте статьи описанные проблемы успешно разрешены путем введения регуляризирующей функции и двух дополнительных сингулярных операторов. Тем самым, основные трудности метода регуляризации для поставленной задачи успешно преодолены, что подтверждается результатами наших исследований.

7. Приложения

Приложение 1. Покажем, что функция

$$\begin{gathered}u(x,t)=\frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon\sin 2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(\operatorname{ctg}2t\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon}-\frac{x\xi}{\varepsilon\sin 2t}\right)\right]f(\xi)d\xi+\\
+\frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\sin 2(t-\tau)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\left(\operatorname{ctg}2(t-\tau)\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon}-\frac{x\xi}{\varepsilon\sin 2(t-\tau)}\right)\right]h(\xi,\tau)d\xi=\\
=\frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon\sin 2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(\frac{(\xi-x\cos 2t)^2}{\varepsilon\sin 4t}-\frac{\xi^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}\right)\right]f(\xi)d\xi+\\
+\frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\sin 2(t-\tau)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(\frac{(\xi-x\cos 2(t-\tau))^2}{\varepsilon\sin 4(t-\tau)}-\frac{\xi^2\operatorname{tg}2(t-\tau)}{2\varepsilon}\right)\right]h(\xi,\tau)d\xi\end{gathered}\tag{21}$$

где $f(x)$, $h(x,t)$ — непрерывные ограниченные функции, удовлетворяющие условиям $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2|f(x)|dx<\infty$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2|h(x,t)|dx<\infty$, удовлетворяет задаче

$$i\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2u=h(x,t),\quad u(x,0)=f(x).\tag{22}$$

Заметим, что интеграл (21) сходится равномерно на $(-\infty,+\infty)\times[0,T]$. Действительно оценка дает:

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\sin 2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\exp\left[i\left(\frac{(\xi - x\cos 2t)^2}{\varepsilon\sin 4t} - \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}\right)\right]|f(\xi)|d\xi +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\sin 2(t-\tau)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\exp\left[i\left(\frac{(\xi - x\cos 2(t-\tau))^2}{\varepsilon\sin 4(t-\tau)} - \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2(t-\tau)}{2\varepsilon}\right)\right]|h(\xi,\tau)|d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\sin 2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\exp\left[i\left(\frac{(\xi - x\cos 2t)^2}{\varepsilon\sin 4t}\right)\right]|f(\xi)|d\xi +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\sin 2\tau}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\exp\left[i\left(\frac{(\xi - x\cos 2\tau)^2}{\varepsilon\sin 4\tau}\right)\right]|h(\xi, t-\tau)|d\xi =$$

$$= \left\langle \tfrac{\xi - x\cos 2t}{\sqrt{2\varepsilon\sin 2t}} = z, \quad d\xi = \sqrt{2\varepsilon\sin 2t}dz \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x\cos 2t + z\sqrt{2\varepsilon\sin 2t})|dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(x\cos 2t + z\sqrt{2\varepsilon\sin 2t}, t-\tau)|dz \leqslant M.$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем рассматривать только часть решения (21), которая удовлетворяет однородному уравнению (22).

Шаг 1. Формальное дифференцирование и подстановка формальных производных в уравнение.

Найдём формально (т.е. не задумываясь над правомочностью этих действий) производные от функции $u(x,t)$, входящие в уравнение. Затем проверим, что полученный интеграл удовлетворяет однородному уравнению в задаче (22).

Вычислим входящие в уравнение частные производные:

$$i\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon\sin 2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(\dots\Big)\left(-i\varepsilon\operatorname{ctg} 2t + \frac{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos 2t}{\sin^2 2t}\right) f(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon\sin 2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(\dots\Big)\left(-i\varepsilon\operatorname{ctg} 2t - x^2 + \frac{(x\cos 2t - \xi)^2}{\sin^2 2t}\right) f(\xi)d\xi =$$

$$= \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon\sin 2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(\dots\Big)\left(i\varepsilon\operatorname{ctg} 2t + \frac{x^2\cos^2 2t - 2x\xi\cos 2t + \xi^2}{\sin^2 2t}\right) f(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon\sin 2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(\dots\Big)\left(i\varepsilon\operatorname{ctg} 2t + \frac{(x\cos 2t - \xi)^2}{\sin^2 2t}\right) f(\xi)d\xi.$$

Здесь многоточием обозначен показатель экспоненты фундаментального решения.

Подставляя вычисленные u_t, u_{xx} в уравнение, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\sin 2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(\dots\Big)\left[-i\varepsilon\operatorname{ctg} 2t - x^2 + \frac{(x\cos 2t - \xi)^2}{\sin^2 2t} + i\varepsilon\cos 2t - \frac{(x\cos 2t - \xi)^2}{\sin^2 2t} + x^2\right] f(\xi)d\xi = 0.$$

Шаг 2. Обоснование правомочности формальных действий.

Для того, чтобы показать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению, нужно обосновать возможность дифференцирования по x и t под знаком интеграла при $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$. Докажем этот факт при $t > t_0$, $t_0 > 0$, откуда в силу произвольности t_0 этот факт будет иметь место при $t > 0$.

Теорема 3 (Существование классического решения). *Пусть выполнены условия:*

1) $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, *удовлетворяющая условию* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|dx < \infty$;

2) $h(x,t) \in C(-\infty, +\infty) \times [0,T]$, *удовлетворяющая условиям* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2|h(x,t)|dx < \infty$ *равномерно по* t.

Тогда классическое решение задачи (1) *существует.*

Доказательство. Оценим производные, полученные на шаге 1 на прямоугольнике $[-L, L] \times [t_0, T]$:

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon|\dfrac{\partial u}{\partial t}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\sin 2t_0}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\dfrac{\varepsilon}{|\sin 2t_0|} + x^2 + \dfrac{(|\xi| + |x|)^2}{\sin^2 2t_0} \Big) |f(\xi)| d\xi \leqslant \\ \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}\sqrt{\sin 2t_0}^5} \big((1+2L^2)M_0 + 2LM_1 + M_2 \big), \\ \varepsilon^2|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}\sqrt{\sin 2t_0}^5} \big((1+L^2)M_0 + 2LM_1 + M_2 \big). \end{array}\right.$$

Учитывая, что $f(x)$ удовлетворяет условию 1) теоремы, интегралы $M_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi|^j |f(\xi)| d\xi$, $j = 0, 1, 2$, существуют. Поэтому интегралы равномерно сходятся на прямоугольнике $[-L, L] \times (0, T]$. Отсюда следует, что функция $u(x,t) \in C^{(2,1)}(-\infty, +\infty) \times (0, T]$ и удовлетворяет однородному уравнению (22). Докажем, что (21)удовлетворяет начальному условию.

Функция $u(x,t)$ не определена при $t = 0$. Однако её можно доопределить в начальный момент времени по непрерывности, т.е. считать равной в момент $t = 0$ её пределу при $t \to 0 + 0$. Так как интеграл (21) сходится равномерно на $(-\infty, +\infty) \times [0, T]$, то возможен переход к пределу под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \lim_{t\to 0+0} \frac{1-i}{2\sqrt{\pi\varepsilon\sin 2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\Big(\frac{(\xi - x\cos 2t)^2}{\varepsilon\sin 4t} + \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon} \Big) \right] f(\xi) d\xi = \\ &= \left\langle \frac{\xi - x\cos 2t}{\sqrt{2\varepsilon\sin 2t}} = z,\, d\xi = \sqrt{2\varepsilon\sin 2t} dz \right\rangle = \\ &= \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lim_{t\to 0+0} e^{i\left(\frac{z^2}{\cos 2t} + \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}\right)} f(x\cos 2t + z\sqrt{2\varepsilon\sin 2t}) dz = \\ &= f(x) \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iz^2} dz = \frac{(1-i)(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Таким образом, $u(x,t)$ действительно задаёт решение задачи. □

Замечание 1. *Если* $f(x)$, $h(x,t)$ *удовлетворяют условиям* $\forall m \in N\ \exists \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^m f(x)|dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^m |h(x,t)|dx$, *сходящимися равномерно по* t, *то* $u(x,t)$ *имеет непрерывные производные любого порядка по* x *и* t *при* $t > 0$.

Действительно, если $u(x,t)$ дифференцировать по x и t произвольное число раз, то будет выделяться множитель $(\xi - x\cos 2t)$ в положительной степени, а множитель $\sin 2t$ — в отрицательной степени. Таким образом, дело сводится к равномерной сходимости интеграла вида

$$J = (\sin 2t)^{-k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\frac{(\xi - x\cos 2t)^2}{\varepsilon \sin 4t} + \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}\right)\right] (\xi - x\cos 2t)^m f(\xi) d\xi.$$

Оценим интеграл по модулю. Тогда

$$|J| \leqslant |\sin 2t_0|^{-k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\exp\left[i\left(\frac{(\xi - x\cos 2t)^2}{\varepsilon \sin 4t} + \frac{\xi^2 \operatorname{tg} 2t}{2\varepsilon}\right)\right] ||\xi - x\cos 2t|^m |f(\xi)| d\xi =$$
$$= |\sin 2t_0|^{-k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi - x\cos 2t|^m |f(\xi)| d\xi \leqslant |\sin 2t_0| \sum_{j=0}^{m} C_m^j |x|^{m-j} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi|^j |f(\xi)| d\xi =$$
$$= |\sin 2t_0| \sum_{j=0}^{m} C_m^j |x|^{m-j} M_j \leqslant |\sin 2t_0| (L+1)^m M_m.$$

Учитывая, что $f(x)$ удовлетворяет условию 1) задачи (22) интегралы $M_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi|^j |f(\xi)| d\xi$ существуют. Поэтому интеграл J равномерно сходится при $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда следует, что функция $u(x,t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка по x и t при $t > 0$. Кроме того, поскольку все интегралы, участвующие в наших формальных операциях, являются равномерно сходящимися по параметрам x, t в любом замкнутом прямоугольнике $(x,t) \in [-L, L] \times [t_0, T]$, $t_0 > 0$, то их можно в этом прямоугольнике дифференцировать по x и t сколь угодно раз.

Теорема 4 (теорема единственности решения). *Задача для однородного уравнения с однородным начальным условием*

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u = 0, \quad u(x,0) = 0, \tag{23}$$

обладает только тривиальным решением.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ является решением задачи (23), тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= i\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{i}{\varepsilon} x^2 u, \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} &= -i\varepsilon \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{i}{\varepsilon} x^2 \overline{u}, \end{aligned} \tag{24}$$

здесь чертой обозначено комплексное сопряжение.

Теперь рассмотрим следующий интеграл:

$$I(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \cdot |u(x,t)|^2. \tag{25}$$

Продифференцировав интеграл $I(t)$ по t и учитывая стремление к нулю при $x \to \pm\infty$ функции $u(x,t)$ вместе со своими частными производными, будем иметь:

$$\dot I(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial u}{\partial t}\overline{u} + u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right) = \Big[\text{подставим соотношения (24)}\Big] =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \left(i\varepsilon u_{xx}\overline{u} - \frac{i}{\varepsilon}x^2\,|u|^2\right) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \left(-i\varepsilon u\overline{u}_{xx} + \frac{i}{\varepsilon}x^2\,|u|^2\right) =$$
$$= i\varepsilon\left(u_x\overline{u}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,|u_x|^2\right) - i\varepsilon\left(u\overline{u}_x\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,|u_x|^2\right) = 0.$$

Следовательно, $I(0) = I(t)$, где $I(0) = 0$ в силу начальных условий в задаче (23).

Таким образом, интеграл (25) равен нулю для всех $t \in [0, T]$. А это возможно только, если $u(x, t) = 0$. $\square$

Приложение 2. Доказательство, что оператор $T_\varepsilon = i\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2$ аннулирует $\dfrac{e^{-i\frac{x^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}$, подтверждается непосредственной проверкой:

$$i\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-i\frac{x^2\operatorname{th}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}\right) = \frac{e^{-i\frac{x^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}\left(\frac{x^2}{\cos^2 2t} + i\varepsilon\operatorname{tg}2t\right);$$
$$\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{e^{-i\frac{x^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}\right) = \frac{e^{-i\frac{x^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}\left(-x^2\operatorname{tg}^2 2t - i\varepsilon\operatorname{tg}2t\right).$$

Отсюда следует, что

$$T_\varepsilon\left(\frac{e^{-i\frac{x^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}\right) = \frac{e^{-i\frac{x^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}}\left(\frac{x^2}{\cos^2 2t} + i\varepsilon\operatorname{tg}2t - x^2\operatorname{tg}^2 2t - i\varepsilon\operatorname{tg}(2t) - x^2\right) = 0.$$

Аналогично доказывается, что $T_\varepsilon\left(x\dfrac{e^{-i\frac{x^2\operatorname{tg}2t}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\cos 2t}^3}\right) = 0.$

Приложение 3. Уравнение для определения частного решения w_0 имеет вид:

$$x^2 w_0(x, t) = h(x, t) - h(0, t) - x\frac{\partial h}{\partial x}(0, t).$$

Отсюда

$$w_0(x, t) = \frac{h(x, t) - h(0, t) - x\frac{\partial h}{\partial x}(0, t)}{x^2} = h_0(x, t),$$

где $h_0(x, t)$ — гладкая функция. Проведем цепочку оценок.

1. $|h_0(x, t)| = \left|0,5\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\xi, t)\right|$, где $0 < \xi(x) < x$. Следовательно, $h_0(x, t)$ удовлетворяет условию 4) в постановке задачи (1), так как $h(x, t)$ удовлетворяет этому условию.

2. $\left|\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right| = \left|\dfrac{\partial h_0}{\partial x}(x, t)\right| = \left|\dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^3 h}{\partial x^3}(\xi_1, t)\right|$, где $0 < \xi(x) < x$. Следовательно, $\dfrac{\partial w_0}{\partial x}$ удовлетворяет условию 4) в постановке задачи (1), так как $h(x, t)$ удовлетворяет этому условию.

Так как $w_k = \dfrac{i\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x^2} + y_{k-1}(t) + xz_{k-1}(t),}{x^2}$, $k \geqslant 1$, то и все $w_k(x, t)$, получаемые путем решения итерационных задач , также удовлетворяют условию 4). Оценка $x^2 w_0$ дает $|x^2 w_0| = \left|h(x, t) - h(0, t) - x\dfrac{\partial h}{\partial x}(0, t)\right| = \left|\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\xi, t)\right|$, что приводит к утверждению, что и $x^2 w_0$ удовлетворяют условию 4). Аналогично для всех $x^2 w_k$.

Схожим образом можно показать, что все решения итерационных задач для $v_k(x,t)$ удовлетворяют условию 4) в постановке задачи (1).

Приведенные здесь соображения позволяют сделать вывод: интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(x,t,\varepsilon)|dx$ сходится. Здесь $H(x,t,\varepsilon)$ — правая часть в уравнении (19) для остаточного члена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений // М.: Наука, 1981. 398 с.

2. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя // М.: Изд-во Московского университета, 2011. 453 с.

3. Ломов С. А. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих малый параметр // Труды МЭИ. 1962. Вып. 42. С. 99-144.

4. Ломов С. А. Степенной пограничный слой в задачах с малым параметром // Доклады АН СССР. 1963. Том 148, № 3. С. 516-519.

5. Ломов С. А. О модельном уравнении Лайтхилла // Сборник научных трудов МО СССР. 1964. № 54. С. 74-83.

6. Ломов С. А. Регуляризация сингулярных возмущений // Доклады научно-технической конференции МЭИ, секция математическая. 1965. С. 129-133.

7. Ломов С. А., Сафонов В. Ф. Регуляризации и асимптотические решения для сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора // Украинский математический журнал. 1984. Т. 36, № 2. С. 172-180.

8. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Регуляризованная асимптотика решений интегродифференциальных уравнений с частными производными с быстро изменяющимися ядрами // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10, № 2. С. 3-12.

9. Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Математический сборник. 1986. Т. 131, № 173. С. 544-557.

10. Елисеев А. Г., Ратникова Т. А. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2019. № 3. С. 63-73.

11. Елисеев А. Г. Регуляризованное решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии иррациональной «простой» точки поворота // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 2. С. 15-32.

12. Yeliseev A. On the Regularized Asymptotics of a Solution to the Cauchy Problem in the Presence of a Weak Turning Point of the Limit Operator // Axioms. 2020. № 9, 86. http://doi.org/10.3390/axioms9030086.

13. Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши для параболического уравнения при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора // Математические заметки СВФУ. 2020. № 3. С. 3-15.

14. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задача Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 1. С. 55-67.

15. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии «слабой» точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 6. С. 733-746.

16. Елисеев А. Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной» точки поворота // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2022. № 3. С. 46-58.

17. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для уравнения типа Шредингера при наличии «сильной» точки поворота у предельного оператора // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 1. С. 50–68. DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-50-68.

18. Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров // УМН. 1971. Т. 26, № 2(158). С. 101-114.

19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория) // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 800 с.

20. Liouville J. Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis á satisfaire á une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramétre variable // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1837. Pp. 16-35.

21. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление // М.: Наука, 1965. 424 с.

REFERENCES

1. Lomov S. A. 1981, "Introduction to the general theory of singular perturbations", *Moscow, Nauka*, 398 p.

2. Lomov S. A., Lomov I. S. 2011, "Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer", *Moscow, Moscow University Press*, 453 p.

3. Lomov S. A. 1962, "Asymptotic behavior of solutions of second-order ordinary differential equations containing a small parameter", *Proceedings of MPEI*, iss. 42, pp. 99-144.

4. Lomov S. A. 1963, "Power boundary layer in problems with a small parameter", *Doklady AN SSSR*, vol. 148, no. 3, pp. 516-519.

5. Lomov S. A. 1964, "On the Lighthill Model Equation", *Collection of Scientific Works of the USSR Ministry of Defense*, no. 54, pp. 74-83.

6. Lomov S. A. 1965, "Regularization of singular perturbations", *Reports of the scientific and technical conference of MPEI, mathematical section*, pp. 129-133.

7. Lomov S. A., Safonov V. F. 1984, "Regularizations and asymptotic solutions for singularly perturbed problems with point singularities of the spectrum of the limit operator", *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 36, no. 2, pp. 172-180.

8. Bobojanov A. A., Safonov V. F. 2018, “Regularized asymptotics of solutions of integrodifferent equations with private derivatives with rapidly changing nuclei”, *Ufa Mathematical Journal*, vol. 10, no. 2, pp. 3-12.

9. Eliseev A. G., Lomov S. A. 1986, “Theory of singular perturbations in the case of spectral singularities of the limit operator”, *Mathematical collection*, vol. 131, no. 173, pp. 544-557.

10. Eliseev A. G., Ratnikova T. A. 2019, “Singularly perturbed Cauchy problem in the presence of a rational «simple» turning point”, *Differential equations and control processes*, no. 3, pp. 63-73.

11. Eliseev A. G. 2020, “Regularized solution of a singularly perturbed Cauchy problem in the presence of an irrational «simple» turning point”, *Differential Equations and Control Processes*, no. 2, pp. 15-32.

12. Yeliseev A. 2020. “On the Regularized Asymptotics of a Solution to the Cauchy Problem in the Presence of a Weak Turning Point of the Limit Operator”, *Axioms*, no. 9, 86. http://doi.org/10.3390/axioms9030086.

13. Kirichenko P. V. 2020, “Singularly perturbed Cauchy problem for a parabolic equation in the presence of a «weak» turning point of the limit operator”, *Mathematical notes of NEFU*, no. 3, pp. 3-15.

14. Eliseev A. G., Kirichenko P. V. 2020, “Regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem in the presence of a «weak» turning point of the limit operator”, *Differential Equations and Control Processes*, no. 1, pp. 55-67.

15. Eliseev A. G., Kirichenko P. V. 2022, “Singularly perturbed Cauchy problem in the presence of a «weak» first-order turning point of a limit operator with multiple spectrum”, *Differential Equations*, vol. 58, no. 6, pp. 733-746.

16. Eliseev A. G. 2022, “An example of solving a singularly perturbed Cauchy problem for a parabolic equation in the presence of a «strong» turning point”, *Differential Equations and Control Processes*, no. 3, pp. 46-58.

17. Eliseev A. G., Kirichenko P. V. 2023. “Regularized asymptotic solutions of a sylucularly indignant mixed problem on a semi -shaft for an equation of the Schrodinger type in the presence of a «strong» turning point at the maximum operator” // *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, iss. 1, pp. 50–68. DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-50-68.

18. Arnold V. I. 1971, “On matrices depending on parameters”, *UMN*, vol. 26, no. 2(158), pp. 101-114.

19. Landau L. D., Lifshitz E. M. 2004, “Course of theoretical physics. Vol. 3. Quantum mechanics (nonrelativistic theory)”, *Moscow, FIZMATLIT*, 800 p.

20. Liouville J. 1837, “Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis á satisfaire á une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramétre variable”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, pp. 16-35.

21. Elsgolts L. E. 1965, “Differential equations and calculus of variations”, *Moscow, Nauka*, 424 p.

Получено: 28.06.2023
Принято в печать: 21.12.2023