

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.352

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-354-360

Об экстремальном множестве частных целых чисел

Ю. Н. Штейников

Штейников Юрий Николаевич — Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (г. Москва).

e-mail: yuriisht@gmail.com

Аннотация

В статье изучается следующая задача. Пусть заданы два конечных подмножества из множества натуральных чисел, которые всюду в тексте будут обозначаться как A и B . Будем считать, что они принадлежат конечному отрезку чисел $[1, Q]$. По определению задаем множество дробей A/B , элементы которого являются представимыми в виде частного этих множеств A, B , то есть такие элементы a/b , где $a \in A, b \in B$. В статье исследуются свойства этого подмножества частных. В статье [13], была получена нетривиальная нижняя оценка на размер множества A/B для таких множеств A, B без всяких дополнительных условий на эти множества. В данной статье мы рассматриваем экстремальный случай, который состоит в следующем. Пусть известно, что размер множества произведений AB является асимптотически наименьшим возможным. Мы выводим отсюда, что размер множества частных A/B является асимптотически наибольшей возможной величиной.

Ключевые слова: натуральные числа, плотность, гладкие числа, произведение.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

Ю. Н. Штейников. Об экстремальном множестве частных целых чисел // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 354–360.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 511.352

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-354-360

On the extremal set of quotient of natural numbers

Yu. N. Shteinikov

Shteinikov Yuri Nikolaevich — Federal Research Center “Research Institute of System Research of the Russian Academy of Sciences” (Moscow).

e-mail: yuriisht@gmail.com

Abstract

The article studies the following problem. Let two finite subsets from the set of natural numbers be given, which will be denoted throughout the text as A and B . We will assume that they belong to a finite interval of numbers $[1, Q]$. By definition, we define a set of fractions A/B whose elements are representable as a quotient of these sets A, B , in other words such elements a/b , where $a \in A, b \in B$. The article investigates the properties of this subset of quotients. In the article [13], a non-trivial lower bound on the size of the set A/B for such sets A, B was obtained without any additional conditions on these sets. In this article, we in details consider an extreme case, which is as follows. Let it be known that the size of the set of products AB is asymptotically the smallest possible. We deduce from this that the size of the set of quotients A/B is the asymptotically largest possible value.

Keywords: integer numbers, density, smooth numbers, product.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

Yu. N. Shteinikov. 2023, "On the extremal set of quotient of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 354–360.

1. Введение

Пусть множества A, B являются какими-то подмножествами натуральных чисел. Множество A/B называется частным множеств A и B , и определяется как

$$A/B = \{a/b : a \in A, b \in B\}.$$

Дадим определение мультипликативной энергии двух множеств A, B обозначаемой как $E(A, B)$

$$E(A, B) = |\{a_1 b_1 = a_2 b_2 : a_1, a_2 \in A; b_1, b_2 \in B\}|.$$

В случае когда $A = B$ мы вместо $E(A, B)$ пишем просто $E(A)$.

Стоит отметить, как мы ниже выведем, величина $E(A, B)$ и размер множеств $A/B, AB$ связаны простым неравенством, которое можно отнести еще к исследованию Шнирельмана Shnirel'man [12] и также может быть найдено в [11].

$$|AB|, |A/B| \geq \frac{|A|^2 |B|^2}{E(A, B)}. \quad (1)$$

Выведем аккуратно это неравенство.

Пусть $r_{AB}(z), r_{A/B}(z)$ обозначает число представлений элемента z в виде произведения, соответственно частного в виде $z = ab$, соответственно $z = a/b$. Далее легко видеть, что величина энергии $E(A, B) = \sum_z r_{AB}^2(z), E(A, B) = \sum_z r_{A/B}^2(z)$. С другой стороны, по неравенству Коши

$$|AB| = \sum_z r_{A/B}(z) \leq |A/B|^{1/2} E(A, B)^{1/2},$$

из которого и следует нужное нам неравенство.

Используя известную оценку для $r_{AB}(z)$ через тау функцию в нашем случае легко вывести из последнего неравенства следующие соотношения :

Для любого $A \subset \mathbb{N}$ такого что $a \in A \Rightarrow a \leq Q$, имеет место

$$|AA| \geq |A|^2 \exp\left\{(-2 \log 2 + o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}, \quad Q \rightarrow \infty; \quad (2)$$

$$E(A) \leq |A|^2 \exp\left\{(2 \log 2 + o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}, \quad Q \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Эти неравенства содержат неулучшаемые оценки. Далее имея оценку на энергию $E(A)$ мы легко выводим следующее неравенство:

$$|A/A| \geq |A|^2 \exp\left\{(-2 \log 2 + o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}, \quad Q \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Однако последнее неравенство не является наилучшим возможным. В статье [13] было произведено улучшение.

ТЕОРЕМА 1. *Имеется абсолютная константа $\gamma > 0$ такая что если $A, B \subseteq [1, Q]$, то тогда*

$$|A/B| \geq |A||B| \exp\left\{(-2 \log 2 + \gamma + o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}, \quad Q \rightarrow \infty.$$

Можно взять $\gamma = 0.098$.

Эта оценка тоже скорее всего не является окончательной. В настоящей статье мы рассмотрим экстремальную ситуацию, когда размер $|AB|$ является асимптотически наименьшей величиной, то есть $|AB| = |A||B| \exp\left\{(-2 \log 2 + o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}$. В этом случае покажем, что размер множества частных будет наоборот асимптотически наибольшей величиной. Выведем соответствующее утверждение следуя аргументам, предложенным в статье [13].

ТЕОРЕМА 2. *Если $|AB| = |A||B| \exp\left\{(-2 \log 2 + o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}$, $Q \rightarrow \infty$, то*

$$|A/B| = |A||B| \exp\left\{(o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}, \quad Q \rightarrow \infty.$$

2. Доказательство основного результата.

Перейдем непосредственно к доказательству Теоремы 2.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть вещественно c определяется из равенства :

$$E(A, B) = |A||B| \exp\left\{(2 \log 2 - c) \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}.$$

Из неравенства 1 и условий теоремы легко заключить, что $c = o(1)$, $Q \rightarrow \infty$.

Для удобства в дальнейшем определим L из формулы $E(A, B) = |A||B|L$, и пусть как и раньше было введено

$$r_{A,B}(z) = |\{(a_1, b_1) \in A \times B : a_1 b_1 = z\}|.$$

Определим множество M_1 , (которое мы вынесем из дальнейшего рассмотрения)

$$M_1 = \{z \in AB : r_{A,B}(z) \leq L/2\}$$

и множество M_2 (с которым будем в дальнейшем работать)

$$M_2 = AB \setminus M_1.$$

Из предыдущих обозначений и формул легко видеть, что

$$\sum_{z \in M_1} r_{A,B}^2(z) \leq |A||B|L/2;$$

и соответственно

$$\sum_{z \in M_2} r_{A,B}^2(z) \geq |A||B|L/2.$$

Для целого натурального $i \geq 0$ обозначим

$$M_{2,i} = \{z \in AB : r_{A,B}(z) \in (2^{i-1}L, 2^iL]\}.$$

Мы видим, что множество M_2 состоит из объединения $M_{2,i}$.

$$M_2 = \bigcup_{0 \leq i \leq \frac{\log Q}{\log \log Q}} M_{2,i}.$$

Поэтому из принципа среднего заключаем существование такого $0 \leq i \leq \frac{\log Q}{\log \log Q}$ что

$$\sum_{z \in M_{2,i}} r_{A,B}^2(z) \geq |A||B| \exp\left\{(2 \log 2 + o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}.$$

Возьмем и фиксируем такое i пусть вещественное число c' определяется из следующего соотношения:

$$2^i L = \exp\left\{(2 \log 2 - c') \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}.$$

Легко видеть, что $c' = o(1)$. Выведем, что

$$\sum_{z \in M_{2,i}} r_{A,B}(z) \geq |A||B| \exp\left\{(o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}, \quad Q \rightarrow \infty.$$

Имеет место :

$$|A||B| \exp\left\{(2 \log 2 + o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\} \leq \sum_{z \in M_{2,i}} r_{A,B}^2(z) \leq \max_{z \in M_{2,i}} r_{A,B}(z) \sum_{z \in M_{2,i}} r_{A,B}(z).$$

Величина $\max_{z \in M_{2,i}} r_{A,B}(z)$ не превосходит

$$\exp\left\{(2 \log 2 - c') \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}.$$

Из этого и вышенаписанного следует нужное нам неравенство. Обозначим в дальнейшем через G множество G :

$$G = \{(a_1, b_1) \in A \times B : a_1 b_1 \in M_{2,i}\}.$$

Предыдущее неравенство можно переписать так :

$$|G| > |A||B| \exp\left\{(o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q}\right\}, \quad Q \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим множество , (которое даст утверждение теоремы)

$$W = \left\{ \frac{a_1}{b_1} : (a_1, b_1) \in G \right\},$$

и докажем, что $|W|$ имеет асимптотически максимальный размер. Для каждого элемента $z \in M_{2,i}$ мы используем соответствующую лемму из [13], видим, что максимальный квадрат делящий z есть

$$l(z) = Q^{o(1)}, \quad Q \rightarrow \infty.$$

Это означает, что для каждой пары $(a_1, b_1) \in G$ справедливо $\gcd(a_1, b_1) \leq Q^{o(1)}$. По определению пусть

$$r_{A/B,G}(z) = \left\{ (a_1, b_1) \in G : \frac{a_1}{b_1} = z \right\}.$$

Таким образом мы можем написать :

$$\begin{aligned} |A||B| \exp \left\{ (o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q} \right\} &\leq |G| = \sum_z r_{A/B,G}(z) \leq \\ &\leq |W|^{1/2} \left\{ \sum_z r_{A/B,G}^2(z) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Теперь наша ближайшая цель получить хорошую верхнюю оценку для

$$\sigma = \sum_z r_{A/B,G}^2(z).$$

Выражение σ не превосходит числа решений равенства

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \quad a_i \in A; b_i \in B, \gcd(a_1, b_1), \gcd(a_2, b_2) \leq Q^{o(1)}.$$

Можно написать параметрически

$$a_1 = tu, b_1 = tv, a_2 = su, b_2 = sv;$$

где

$$\gcd(u, v) = 1 \quad \text{and} \quad t, s \leq Q^{o(1)}.$$

Зафиксируем a_1 и b_2 . Для этого случая a_1, b_2 мы выбираем значение t и s и тем самым мы однозначно определяем a_2 и b_1 . Эти значения t, s являются делителями a_1, b_2 соответственно и кроме того мы знаем, что

$$t, s \leq Q^{o(1)}.$$

Используя лемму о числе делителей из работы [13] мы видим, что число пар (t, s) не превосходит

$$\exp \left\{ (o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q} \right\}, \quad Q \rightarrow \infty.$$

Мы заключаем, что

$$\sigma < |A||B| \exp \left\{ (o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q} \right\}, \quad Q \rightarrow \infty.$$

И тем самым получается нижняя оценка для $|W|$

$$|W| \geq |A||B| \exp \left\{ (o(1)) \frac{\log Q}{\log \log Q} \right\}, \quad Q \rightarrow \infty.$$

Множество значений W лежит в A/B , а мы получили нижнюю оценку для $|W|$ и тем самым доказали теорему.

□

3. Заключение

Отметим, что некоторые результаты о произведениях и частных подмножеств натуральных чисел содержатся в работах [10], [8], [9], [7], [1], [6] и в приведенной ниже литературе. Работа выполнена в рамках государственного задания FNEF-2022-0011.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shteinikov Yu., On the product sets of rational numbers // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2017, Vol. 296, Issue 1, P 243-250.
2. Cilleruelo J., Ramana D.S., Ramare O. Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2017, Vol. 296, Issue 1, P. 52-64.
3. Prachar K. Primzahlverteilung // Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.
4. Shteinikov Yu. N. Addendum to the paper "Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers" by J. Cilleruelo, D.S. Ramana and O. Ramare. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2017, Vol. 296, Issue 1, P. 251-255.
5. Hildebrand A., Tenenbaum G. Integers without large prime factors // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux 5, 1993, P. 411-484.
6. Bourgain J., Konyagin S.V., Shparlinski I.E. Product sets of rationals, multiplicative translates of subgroups in residue rings and fixed points of the discrete logarithm // Int. Math Research Notices. 2008. rnn 090, P. 1-29.
7. Cilleruelo J. A note on product sets of rationals // International Journal of Number Theory 2016, Vol. 12, No. 05, P. 1415-1420.
8. Cilleruelo J., Garaev M. Congruences involving product of intervals and sets with small multiplicative doubling modulo a prime and applications // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 2016. Vol. 160, Issue 03, P. 477-494,
9. Konyagin S., Shkredov I. New results on sums and products in $\mathbb{R}$, Proc. // Steklov Inst. Math., 2016. № 294 , P. 78-88.
10. Konyagin S., Shkredov I. On Sum Sets of Sets Having Small Product Set // Proc. Steklov Inst. Math. 2015, Vol. 290, P. 288-299.
11. Tao T., Vu V. Additive combinatorics // Cambridge University Press 2006, P. 1-530.
12. Shnirel'man L.G. Uber additive Eigenschaften von Zahlen // Mathematische Annalen, V. 107 1933, P. 649-690.
13. Ю. Н. Штейников, О размере частного двух подмножеств натуральных чисел // Гармонический анализ, теория приближений и теория чисел, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Сергея Владимировича Конягина, Тр. МИАН, 2018. Т. 303, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., С. 279-287.

REFERENCES

1. Shteinikov Yu., “On the product sets of rational numbers”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* vol. 296, Issue 1, pp. 243-250.
2. Cilleruelo J., Ramana D.S., Ramare O. “Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, Iss. 1, pp. 52-64.
3. Prachar K. 1957, “Primzahlverteilung”, *Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg*.
4. Shteinikov Yu. N. “Addendum to the paper “Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers” by J. Cilleruelo, D.S. Ramana and O. Ramare”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* vol. 296, Iss. 1, pp. 251-255.
5. Hildebrand A., Tenenbaum G. 1993, “Integers without large prime factors”, *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux* vol. 5, pp. 411–484.
6. Bourgain J., Konyagin S.V., Shparlinski I.E. 2008, “Product sets of rationals, multiplicative translates of subgroups in residue rings and fixed points of the discrete logarithm”, *Int. Math Research Notices*.. rnn 090, pp. 1–29.
7. Cilleruelo J. 2016, “A note on product sets of rationals”, *International Journal of Number Theory*, vol. 12, no. 05, pp. 1415–1420.
8. Cilleruelo J., Garaev M. 2016, “Congruences involving product of intervals and sets with small multiplicative doubling modulo a prime and applications”, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 160, Iss. 03, pp. 477–494.
9. Konyagin S., Shkredov I. 2016, “New results on sums and products in $\mathbb{R}$ ”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 294 , pp. 78–88.
10. Konyagin S., Shkredov I. “On Sum Sets of Sets Having Small Product Set”, *Proc. Steklov Inst. Math.* vol. 290, pp. 288–299.
11. Tao T., Vu V. 2006, “Additive combinatorics”, *Cambridge University Press*, pp. 1-530.
12. Shnirel'man L.G. 1933, “Über additive Eigenschaften von Zahlen”, *Mathematische Annalen*, vol. 107, , pp. 649-690.
13. Shteinikov Yu.N. “On the Size of the Quotient of Two Subsets of Positive Integers”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics volume* vol. 303, pp. 259–267.

Получено: 19.08.2023

Принято в печать: 11.12.2023