ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.3+511.4 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-345-353

Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками II[1]

$\boxed{\text{Н. М. Коробов}}$, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

$\boxed{\textbf{Коробов Николай Михайлович}}$ — профессор, доктор физико-математических наук (г. Москва).
Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе получена новая оценка для погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками по простому модулю N.

Ключевые слова: параллелепипедальная сетка, квадратурные формулы, метод оптимальных коэффициентов.

Библиография: 4 названий.

Для цитирования:
$\boxed{\text{Н. М. Коробов}}$, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками II// Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4, С. 345–353.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 511.3+511.4 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-345-353

On the estimation of the error of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids II[2]

$\boxed{\text{N. M. Korobov}}$, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

$\boxed{\textbf{Korobov Nikolay Mikhailovich}}$ — Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences (Moscow).

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tolstoy Tula State Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

The paper obtained a new estimate for the error of quadrature formulas with optimal parallelepipedal meshes modulo N.

Keywords: parallelepipedal grid, quadrature formulas, method of optimal coefficients.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

$\boxed{\text{N. M. Korobov}}$, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "On the estimation of the error of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 345–353.

1. Введение

Обозначим через $q = q(a_1, \ldots, a_s)$ минимальное значение произведения $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_s$, где $m_1, \ldots, m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения

$$a_1m_1 + \ldots + a_sm_s \equiv 0 \pmod p. \quad (1)$$

Рассмотрим гиперболическую дзета–функцию решетки решений этого линейного сравнения

$$\zeta_H(\Lambda(a_1, \ldots, a_s; p)|\alpha) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1 + \ldots + a_sm_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \quad (\alpha > 1). \quad (2)$$

[2]The study was carried out within the framework of state task No. 073-03-2022-117/7 on the topic "Number-theoretic methods in approximate analysis and their applications in mechanics and physics".

Введем обозначения

$$T_{r,t}^{(\alpha)}(a_1,\dots,a_s)=\sideset{}{'}\sum_{r\leqslant\overline{m_1}\dots\overline{m_s}<t}\frac{\delta_p(a_1m_1+\dots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^{\alpha}}, \tag{3}$$

тогда справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda(a_1,\dots,a_s;p)|\alpha)=T_{q,p}^{(\alpha)}(a_1,\dots,a_s)+T_{p,\infty}^{(\alpha)}(a_1,\dots,a_s). \tag{4}$$

Лемма 1. *Если для всякого нетривиального решения сравнения (1) выполняется неравенство $\overline{m}_1\dots\overline{m}_s\geqslant q$, то при любых целых λ, λ_ν, и $n_\nu\geqslant 1$ $(\nu=1,2,\dots,s)$ справедлива оценка*

$$\sum_{k_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+n_1}\dots\sum_{k_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+n_s}\delta_p(a_1k_1+\dots+a_sk_s+\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant\begin{cases}1 & \text{при}\quad n_1\dots n_s\leqslant q,\\ \dfrac{4n_1\dots n_s}{q} & \text{при}\quad n_1\dots n_s>q.\end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. См. [2] стр. 123.

Лемма 2. *При любых действительных $\alpha>1$ и $t\geqslant 1$ справедлива оценка*

$$\sum_{m_1\dots m_s\geqslant t}\frac{1}{(m_1\dots m_s)^{\alpha}}\leqslant\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln t)^{s-1}}{t^{\alpha-1}}, \tag{6}$$

где суммирование распространено на все системы целых положительных чисел $m_1,\dots,m_s$, для которых произведение $m_1\dots m_s$ больше или равно t.

Доказательство. См. [2] стр. 125.

Лемма 3. *Пусть для любого фиксированного $\varepsilon>0$ неотрицательная функция φ удовлетворяет условию*

$$\sum_{|k_1|\leqslant n_1,\dots,|k_s|\leqslant n_s}\varphi(k_1,\dots,k_s)=O((n_1\dots n_s)^{1+\varepsilon}).$$

Тогда при всяком $\alpha>1$ справедлива оценка

$$\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(m_1,\dots,m_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^{\alpha}}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha^s\sum_{m_1,\dots,m_s=1}^{\infty}\frac{1}{(m_1\dots m_s)^{\alpha+1}}\sum_{|k_1|\leqslant m_1,\dots,|k_s|\leqslant m_s}\varphi(k_1,\dots,k_s).$$

Доказательство. См. [2] стр. 87.

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$\frac{s}{p^{\alpha}}<T_{p,\infty}^{(\alpha)}(a_1,\dots,a_s)\leqslant 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}.$$

Доказательство. См. [1].

При $p > 2 \cdot 3^s + 1$ определим величину p^* из условий

$$N_s(p^*) < \frac{p-1}{2} \leqslant N_s(p^* + 1),$$

где $N_s(t)$ — количество ненулевых наборов $(m_1, \ldots, m_s)$, удовлетворяющих неравенству $\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \leqslant t$. Так как $N_s(1) = 3^s$ и $N_s(t) \leqslant t(3 + 2\ln t)^{s-1}$, то $p^* = O\left(\frac{p}{(\ln p)^{s-1}}\right)$ и $p^* > \frac{p}{2(3+2\ln p)^{s-1}}$.

Лемма 5. *Пусть $p > 2 \cdot 3^s + 1$ – простое, тогда среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1, \ldots, a_s)$ с $(1 \leqslant a_1, \ldots, a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/2 + 1$ таких, что справедливо неравенство*

$$q = q(a_1, \ldots, a_s) \geqslant p^*. \tag{7}$$

Доказательство. См. [1].

Лемма 6. *Пусть $\vec{p}_s = (p, \ldots, p) \in \mathbb{Z}^s$ и $r \leqslant t$, тогда справедливо неравенство*

$$T^{(1)}_{r,t}(\vec{p}_s) \leqslant 2s(5 + 2\ln t)^{s-1}\left(2 + \ln\left(\frac{t}{r}\right)\right). \tag{8}$$

Доказательство. См. [1].

Лемма 7. *Для любого простого $p > 2 \cdot 3^s + 1$ среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1, \ldots, a_s)$ с $(1 \leqslant a_1, \ldots, a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/4 + 1$ таких, что при $\alpha > 1$ справедлива оценка*

$$\zeta_H(\Lambda(a_1, \ldots, a_s; p)|\alpha) \leqslant \frac{16s\left(2 + \ln\left(\frac{p}{p^*}\right)\right)(5 + 2\ln p)^{s-1}}{pq^{\alpha-1}} + 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha - 1}\right)^s \frac{(1 + \ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}. \tag{9}$$

Доказательство. См. [1].

Теорема 1. *Для любого простого $p > 2 \cdot 3^s + 1$ среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1, \ldots, a_s)$ с $(1 \leqslant a_1, \ldots, a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/4+1$ таких, что $q = q(a_1, \ldots, a_s) \geqslant p^*$ и при $\alpha > 1$, $N = p$ для $f \in E_s^\alpha(C)$ погрешность квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) - R_N[f]$$

удовлетворяет неравенству

$$|R_N[f]| \leqslant C\frac{C(\alpha, s)(2 + 2s\ln\ln p)(5 + 2\ln p)^{s-1}}{pq^{\alpha-1}},$$

где константа $C(\alpha, s) > 0$ зависит только от α, s.

Доказательство. См. [1].

В работе [1] было указано: "Заметим, что для всех наборов $(a_1, \ldots, a_s)$, удовлетворяющих условию теоремы, для которых $q \ll p/\ln\ln p$, оценка теоремы 1 лучше известной оценки (см. [2] стр. 126)

$$|R_N[f]| \leqslant 4C\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha - 1}\right)^s \frac{(1 + \ln q)^{s-1}}{q^\alpha}.$$

Но вопрос о существовании наборов даже с $q \gg p\ln^{1-s+\varepsilon} p$ для любого $\varepsilon > 0$ остается открытым."

2. Об последней оценке Коробова

В книге [3] Н. М. Коробов на странице 141 написал: "Наконец, с помощью соображений, использованных при доказательстве теоремы 19 (с. 96), можно получить наиболее сильную оценку:

$$|R_N[f]| \ll \frac{\ln^{s-1} p}{pq^{\alpha-1}}.$$

"

Нашей ближайшей целью будет доказательство этой оценки.

Анализируя доказательство леммы 7, мы приходим к выводу, что необходимо усилить оценку $T_{q,p}^{(\alpha)}(a_1,\ldots,a_s)$, что мы и сделаем с помощью соображений указанных в книге Н. М. Коробова.

Лемма 8. *Пусть $\vec{p}_s=(p,\ldots,p)\in\mathbb{Z}^s$ и $1\leqslant r\leqslant t$, тогда при $\alpha>1$ справедливо неравенство*

$$T_{r,t}^{(\alpha)}(\vec{p}_s)\leqslant\frac{s}{r^{\alpha-1}}\left(\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^s+2(3+2\ln r)^{s-1}\right). \tag{10}$$

Доказательство. Из определения следует, что $T_{r,t}^{(\alpha)}(\vec{p}_s)$ можно записать в виде

$$T_{r,t}^{(\alpha)}(\vec{p}_s)=\sideset{}{'}\sum_{r\leqslant\overline{m_1}\ldots\overline{m_s}<t}\frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}=\sum_{k=1}^{s}C_s^k2^k\sum_{r\leqslant m_1\ldots m_k<t}\frac{1}{(m_1\ldots m_k)^\alpha}=\sum_{k=1}^{s}C_s^k2^k\sigma_k^{(\alpha)}(r,t), \tag{11}$$

где

$$\sigma_k^{(\alpha)}(r,t)=\sum_{r\leqslant m_1\ldots m_k<t}\frac{1}{(m_1\ldots m_k)^\alpha}$$

и суммирование проводится только по натуральным $m_1,\ldots,m_k$.

При $k=1$ получим

$$\sigma_1^{(\alpha)}(r,t)=\sum_{r\leqslant m<t}\frac{1}{m^\alpha}=\frac{1}{r^\alpha}+\sum_{r+1\leqslant m<t}\frac{1}{m^\alpha}.$$

Далее заметим, что:

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(r+1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)=\int_{r+1}^{t}\frac{1}{x^\alpha}dx\leqslant\sum_{m=r+1}^{[t]}\frac{1}{m^\alpha}\leqslant\int_r^{[t]}\frac{1}{x^\alpha}dx=$$
$$=\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{r^{\alpha-1}}-\frac{1}{[t]^{\alpha-1}}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{r^{\alpha-1}}-\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_1^{(\alpha)}(r,t)\leqslant\frac{1}{r^\alpha}+\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{r^{\alpha-1}}\leqslant\frac{1}{r^{\alpha-1}}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right).$$

Для $k=2$ имеем:

$$\sigma_2^{(\alpha)}(r,t)=\sum_{1\leqslant m_1<r}\frac{1}{(m_1)^\alpha}\sum_{\frac{r}{m_1}\leqslant m_2<\frac{t}{m_1}}\frac{1}{m_2^\alpha}+\sum_{r\leqslant m_1<t}\frac{1}{(m_1)^\alpha}\sum_{1\leqslant m_2<\frac{t}{m_1}}\frac{1}{m_2^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{1\leqslant m_1<r}\frac{1}{(m_1)^\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{(m_1)^{\alpha-1}}{r^{\alpha-1}}\right)+\sum_{r\leqslant m_1<t}\frac{1}{(m_1)^\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\frac{1}{r^{\alpha-1}}\sum_{1\leqslant m_1<r}\frac{1}{m_1}+\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\sigma_1^{(\alpha)}(r,t)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r^{\alpha-1}}\left(\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)(\ln r+1)+\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^2\right)$$

При $k>2$ имеем:

$$\sigma_k^{(\alpha)}(r,t)=\sum_{1\leqslant m_1\ldots m_{k-1}<r}\frac{1}{(m_1\ldots m_{k-1})^\alpha}\sum_{\frac{r}{m_1\ldots m_{k-1}}\leqslant m_k<\frac{t}{m_1\ldots m_{k-1}}}\frac{1}{m_k^\alpha}+$$

$$+\sum_{r\leqslant m_1\ldots m_{k-1}<t}\frac{1}{(m_1\ldots m_{k-1})^\alpha}\sum_{1\leqslant m_k<\frac{t}{m_1\ldots m_{k-1}}}\frac{1}{m_k^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{1\leqslant m_1\ldots m_{k-1}<r}\frac{1}{(m_1\ldots m_{k-1})^\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{(m_1\ldots m_{k-1})^{\alpha-1}}{r^{\alpha-1}}\right)+$$

$$+\sum_{r\leqslant m_1\ldots m_{k-1}<t}\frac{1}{(m_1\ldots m_{k-1})^\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)=\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{r^{\alpha-1}}\sum_{1\leqslant m_1\ldots m_{k-1}<r}\frac{1}{m_1\ldots m_{k-1}}+\sigma_{k-1}^{(\alpha)}(r,t)\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{(1+\ln r)^{k-1}}{r^{\alpha-1}}+\sigma_{k-1}^{(\alpha)}(r,t)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{(1+\ln r)^{k-1}}{r^{\alpha-1}}+\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{(1+\ln r)^{k-2}}{r^{\alpha-1}}+\sigma_{k-2}^{(\alpha)}(r,t)\right)\right)\leqslant\ldots\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r^{\alpha-1}}\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^\nu(1+\ln r)^{k-\nu}+\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^{k-1}\sigma_1^{(\alpha)}(r,t)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r^{\alpha-1}}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^\nu(1+\ln r)^{k-\nu}.$$

Подставляя эти оценки в выражение для $T_{r,t}^{(\alpha)}(\vec{p}_s)$, получим:

$$T_{r,t}^{(\alpha)}(\vec{p}_s)\leqslant\sum_{k=1}^{s}C_s^k2^k\frac{1}{r^{\alpha-1}}\sum_{\nu=1}^{k}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^\nu(1+\ln r)^{k-\nu}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r^{\alpha-1}}\sum_{k=1}^{s}kC_s^k2^k\left(\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^k+(1+\ln r)^{k-1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{s}{r^{\alpha-1}}\left(\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^s+2(3+2\ln r)^{s-1}\right).$$

□

Лемма 9. *Для любого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \alpha - 1$ и любого простого $p > 2\cdot 3^s + 1$ среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1, \ldots, a_s)$ с $(1 \leqslant a_1, \ldots, a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/4+1$ таких, что при $\alpha > 1$ справедлива оценка*

$$T^{(\alpha)}_{q,p}(a_1, \ldots, a_s) \leqslant \frac{8s\left(\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^s + 2(3+2\ln p^*)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}}\left(\frac{q}{p^*}\right)^{\varepsilon}.$$

Доказательство. Пусть существует $P_1 \geqslant P/2+1$ наборов $(a_1, \ldots, a_s)$ таких, что $q = q(a_1, \ldots, a_s) \geqslant p^*$. Перенумеруем их в порядке возрастания величины $T^{(1+\varepsilon)}_{p^*,p}(\vec{a})$:

$$T^{(1+\varepsilon)}_{p^*,p}(\vec{a}_1) \leqslant T^{(1+\varepsilon)}_{p^*,p}(\vec{a}_2) \leqslant \ldots \leqslant T^{(1+\varepsilon)}_{p^*,p}(\vec{a}_{P_1}),$$

нумерацию оставшихся $P - P_1$ наборов продолжим произвольным способом.

Тогда, очевидно,

$$T^{(1+\varepsilon)}_{p^*,p}(\vec{a}_{P/4+1}) \leqslant \frac{4}{4P_1 - P}\sum_{\nu=(P+4)/4}^{P_1} T^{(1+\varepsilon)}_{p^*,p}(\vec{a}_\nu) \leqslant \frac{4}{P}\sum_{\nu=1}^{P} T^{(1+\varepsilon)}_{p^*,p}(\vec{a}_\nu) =$$

$$= \frac{4}{P}\sideset{}{'}\sum_{p^* \leqslant \overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < p}\sum_{\nu=1}^{P}\frac{\delta_p(m_1 a_{\nu\,1} + \ldots + m_s a_{\nu\,s})}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{1+\varepsilon}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4}{P}\sum_{p^* \leqslant \overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < p}\frac{(p-1)^{s-1}}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{1+\varepsilon}} = \frac{4}{p-1}T^{(1+\varepsilon)}_{p^*,p}(\vec{p}_s) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{8s}{p(p^*)^{\varepsilon}}\left(\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^s + 2(3+2\ln p^*)^{s-1}\right).$$

Следовательно,

$$T^{(1+\varepsilon)}_{p^*,p}(\vec{a}_1) \leqslant \ldots \leqslant T^{(1+\varepsilon)}_{p^*,p}(\vec{a}_{P/4+1}) \leqslant \frac{8s}{p(p^*)^{\varepsilon}}\left(\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^s + 2(3+2\ln p^*)^{s-1}\right).$$

Отсюда для $\nu = 1, \ldots, P/4+1$ получаем:

$$T^{(\alpha)}_{q,p}(a_1, \ldots, a_s) \leqslant \frac{1}{q^{\alpha-1-\varepsilon}}T^{(1+\varepsilon)}_{p^*,p}(a_1, \ldots, a_s) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{8s\left(\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^s + 2(3+2\ln p^*)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1-\varepsilon}(p^*)^{\varepsilon}} = \frac{8s\left(\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^s + 2(3+2\ln p^*)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}}\left(\frac{q}{p^*}\right)^{\varepsilon} \qquad (12)$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 10. *Для любого простого $p > 2\cdot 3^s + 2$ среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1, \ldots, a_s)$ с $(1 \leqslant a_1, \ldots, a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/4+1$ таких, что при $\alpha > 1 + \frac{1}{\ln\ln p}$ справедлива оценка*

$$\zeta_H(\Lambda(a_1, \ldots, a_s; p)|\alpha) \leqslant \frac{8s\cdot e^s\left((3+2\ln\ln p)^s + 2(3+2\ln p)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}} + 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}. \qquad (13)$$

Доказательство. Выберем в лемме 9 $\varepsilon = \frac{1}{\ln\ln p}$. Получим

$$T_{q,p}^{(\alpha)}(a_1,\ldots,a_s) \leqslant \frac{8s\left((3+2\ln\ln p)^s + 2(3+2\ln p^*)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}}\left(\frac{q}{p^*}\right)^{\frac{1}{\ln\ln p}}.$$

Так как $\frac{p}{2(3+2\ln p)^{s-1}} < p^* < p$, $p^* < q < p$, то $1 < \frac{q}{p^*} < 2(3+2\ln p)^{s-1}$,

$$\left(\frac{q}{p^*}\right)^{\frac{1}{\ln\ln p}} < e^{\frac{\ln 2+(s-1)\ln(3+2\ln p)}{\ln\ln p}} < e^{\frac{\ln 2+(s-1)(\ln 3+\ln\ln p)}{\ln\ln p}} < e^s.$$

Отсюда следует, что

$$T_{q,p}^{(\alpha)}(a_1,\ldots,a_s) \leqslant \frac{8s\cdot e^s\left((3+2\ln\ln p)^s + 2(3+2\ln p)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}}.$$

Применяя равенство (4) и лемму 4, получим утверждение леммы:

$$\zeta_H(\Lambda(a_1,\ldots,a_s;p)|\alpha) \leqslant \frac{8s\cdot e^s\left((3+2\ln\ln p)^s + 2(3+2\ln p)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}} + 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}.$$

□

Теорема 2. *Для любого простого $p > 2\cdot 3^s + 2$ среди $P = (p-1)^s$ различных наборов $(a_1,\ldots,a_s)$ с $(1 \leqslant a_1,\ldots,a_s \leqslant p-1)$ имеется не менее $P/4+1$ таких, что $q = q(a_1,\ldots,a_s) \geqslant p^*$ и при $\alpha > 1+\frac{1}{\ln\ln p}$, $N = p$ для $f \in E_s^\alpha(C)$ погрешность квадратурной формулы*

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)dx_1\ldots dx_s = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) - R_N[f]$$

удовлетворяет неравенству

$$|R_N[f]| \leqslant C\left(\frac{8s\cdot e^s\left((3+2\ln\ln p)^s + 2(3+2\ln p)^{s-1}\right)}{pq^{\alpha-1}} + 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln p)^{s-1}}{qp^{\alpha-1}}\right).$$

Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1 из работы [1] с заменой леммы 7 на лемму 10. □

3. Заключение

Доказанная оценка по порядку точнее оценки Бахвалова—Коробова. Сравнение её с оценками типа оценки В. А. Быковского будет темой наших дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002 Т. 3, вып. 1(3). С. 41–48.

2. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

3. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

4. Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решётки решений линейного сравнения в прямоугольных областях // Чебышевский сборник, 2023, Т. 23, вып. 5, С. 130–144.

REFERENCES

1. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2002, "On the error estimation of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 1(3), pp. 41–48.

2. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

3. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

4. N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas Chebyshevskii sbornik, vol. 23, no. 5, pp. 130–144.

Получено: 20.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023