

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-325-334

О диофантовых неравенствах с простыми числами

Д. В. Горяшин, С. А. Гриценко

Горяшин Дмитрий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет (г. Москва).

e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет (г. Москва).

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Аннотация

В статье рассматриваются две задачи о приближении заданного положительного числа N суммой двух простых чисел, а также суммой простого числа и двух квадратов простых чисел.

В 2001 г. Р. Бейкер, Г. Харман и Дж. Пинтц доказали для числа решений неравенства $|p - N| \leq H$ в простых числах p правильную по порядку оценку снизу при $H \geq N^{21/40+\varepsilon}$, где ε — произвольно малое положительное число. С использованием этого результата и плотностной техники в настоящей работе доказана оценка снизу для числа решений неравенства $|p_1 + p_2 - N| \leq H$ в простых числах p_1, p_2 при $H \geq N^{7/80+\varepsilon}$.

Кроме того, на основе плотностной техники доказана также оценка снизу для числа решений неравенства $|p_1^2 + p_2^2 + p_3 - N| \leq H$ в простых числах p_1, p_2 и p_3 при $H \geq N^{7/72+\varepsilon}$.

Ключевые слова: диофантовы неравенства, простые числа, плотностные теоремы.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горяшин, С. А. Гриценко. О диофантовых неравенствах с простыми числами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 325–334.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-325-334

On the diophantine inequalities with prime numbers

D. V. Goryashin, S. A. Gritsenko

Goryashin Dmitry Victorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University, Department of mathematics and mechanics (Moscow).

e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

Gritsenko Sergei Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University, Department of mathematics and mechanics (Moscow).

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Abstract

The article deals with two problems of approximating a given positive number N by the sum of two primes, and by the sum of a prime and two squares of primes.

In 2001, R. Baker, G. Harman, and J. Pintz proved for the number of solutions of the inequality $|p - N| \leq H$ in primes p a lower bound for $H \geq N^{21/40+\varepsilon}$, where ε is an arbitrarily small positive number. Using this result and the density technique, in this paper we prove a lower bound for the number of solutions of the inequality $|p_1 + p_2 - N| \leq H$ in prime numbers p_1, p_2 for $H \geq N^{7/80+\varepsilon}$.

Also based on the density technique, we prove a lower bound for the number of solutions of the inequality $|p_1^2 + p_2^2 + p_3 - N| \leq H$ in prime numbers p_1, p_2 and p_3 for $H \geq N^{7/72+\varepsilon}$.

Keywords: diophantine inequalities, prime numbers, density theorems.

Bibliography: 8 titles.

For citation:

D. V. Goryashin, S. A. Gritsenko, 2023, "On the diophantine inequalities with prime numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 325–334.

1. Введение

Хорошо известно, что в предположении справедливости гипотезы Римана к заданному положительному числу N можно подойти простым числом p на расстояние $O(N^{1/2+\varepsilon})$ при любом $\varepsilon > 0$. В книге [1] доказано без использования гипотезы Римана, что к числу N можно подойти на расстояние $O(N^{7/12+\varepsilon})$. Этот результат получен на основе применения явных формул для функции Чебышёва и плотностных теорем. В 2001 г. Р. Бейкер, Г. Харман и Дж. Пинтц получили для числа решений неравенства $|p - N| \leq H$ в простых числах p правильную по порядку оценку снизу при условии $H \geq N^{21/40+\varepsilon}$ [2].

Интерес представляет и задача о приближении заданного положительного числа N суммой двух простых чисел. Доказано, что неравенство

$$|p_1 + p_2 - N| \leq H \quad (1)$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 при $H \geq N^{1/6+\varepsilon}$ (см. задачу 4а к главе VII монографии А.А. Карацубы [3]).

Отметим, что если в предположении справедливости гипотезы Римана сначала подходить к числу N одним простым числом p_1 , а затем к числу $N - p_1$ — другим простым числом p_2 , то получится разрешимость неравенства (1) лишь при $H \geq N^{1/4+\varepsilon}$.

В 1975 г. Х. Монтгомери и Р. Вон в статье [4] доказали разрешимость неравенства (1) при $H \geq N^{7/72+\varepsilon}$.

В настоящей работе доказана правильная по порядку оценка снизу для числа решений неравенства (1) при $H \geq N^{7/80+\varepsilon}$ с использованием плотностной техники и результата Р. Бейкера, Г. Хармана и Дж. Пинтца [2]. Кроме того, на основе плотностной техники доказана также оценка снизу для числа решений неравенства $|p_1^2 + p_2^2 + p_3 - N| \leq H$ в простых числах p_1, p_2 и p_3 при $H \geq N^{7/72+\varepsilon}$.

Сформулируем наши основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ε — произвольно малое положительное число, $N_1 \geq N^{\frac{21}{40}+\varepsilon}$. Тогда при $H \geq N_1^{\frac{1}{6}+2\varepsilon} \geq N^{\frac{7}{80}+\varepsilon}$ для числа $J_1(N, H)$ решений неравенства (1) в простых числах p_1 и p_2 справедлива оценка

$$J_1(N, H) \gg \frac{N_1 H}{\ln^2 N}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть ε — произвольно малое положительное число, $N_2 \geq N^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$. Тогда при $H \geq N_2^{\frac{1}{6}+2\varepsilon} \geq N^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$ для числа $J_2(N, H)$ решений неравенства

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3 - N| \leq H$$

в простых числах p_1, p_2 и p_3 справедлива оценка

$$J_2(N, H) \gg \frac{N_2 H}{\ln^3 N}.$$

2. Обозначения

В статье используются следующие стандартные обозначения: $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ — функция Чебышёва, $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули дзета-функции Римана, лежащие в критической полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$, $N(\sigma, T)$ — число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $|\operatorname{Im} s| \leq T$, $\sigma \leq \operatorname{Re} s < 1$, $\pi(x)$ — число простых чисел $p \leq x$, $\tau(n)$ — число делителей числа n .

3. Леммы

Доказательству теорем 1 и 2 предположим несколько лемм.

ЛЕММА 1 (явная формула для функции Чебышёва). Пусть $2 \leq T \leq x$. Тогда

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right).$$

Доказательство см., например, в книге [3], стр. 80.

ЛЕММА 2 (Р. Бейкер, Г. Харман, Дж. Пинтц [2]). Пусть ε — произвольно малое положительное число. Тогда при $N_1 \geq N^{\frac{21}{40}+\varepsilon}$ для числа простых чисел на промежутке $(N; N + N_1]$ справедлива оценка

$$\pi(N + N_1) - \pi(N) = \sum_{N < p \leq N + N_1} 1 \gg \frac{N_1}{\ln N}.$$

Оценки величины $N(\sigma, T)$ вида

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^c T\right), \quad (2)$$

где λ и c — некоторые положительные постоянные, называются плотностными теоремами. Плотностная гипотеза состоит в том, что оценка (2) верна при $\lambda = 1$. Следующая плотностная теорема доказана М. Хаксли в 1972 году (см. [5]).

ЛЕММА 3. Оценка (2) справедлива при $\lambda = \frac{6}{5}$ и $c = 44$.

Отметим, что постоянную c можно взять равной 9 (см. монографию [6]), однако для приложений это несущественно.

Следующая лемма представляет собой современную границу нулей дзета-функции (см., например, [3], с. 100).

ЛЕММА 4. Пусть $T \geq 2$. Тогда существует такая абсолютная постоянная $c_0 > 0$, что $\zeta(s) \neq 0$ в области

$$\sigma > 1 - \delta(T), \quad |t| \leq T, \quad \text{где} \quad \delta(T) = \frac{c_0}{(\ln T)^{2/3} \ln \ln T}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $M \geq 2$, $T \geq 2$. Тогда справедлива оценка

$$\int_M^{3M} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right|^2 dx \ll \max_{\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1} M^{2\alpha-1} N(\alpha, T) \ln^2 M \ln^2 T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьём сумму

$$S(x, T) = \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1}$$

на $O(\ln M)$ сумм вида

$$S(x, T, \alpha) = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T \\ \alpha \leq \beta < \alpha + \frac{1}{\ln M}}} x^{\rho-1},$$

где $0 \leq \alpha < 1$. Тогда по неравенству Коши

$$|S(x, T)|^2 \leq \left(\sum_{\alpha} |S(x, T, \alpha)| \right)^2 \leq \left(\sum_{\alpha} 1 \right) \left(\sum_{\alpha} |S(x, T, \alpha)|^2 \right) \ll \ln M \sum_{\alpha} |S(x, T, \alpha)|^2,$$

где $\sum_{\alpha}$ означает сумму по числам $\alpha_k = \frac{1}{2} + \frac{k}{\ln M}$, $k \leq \frac{1}{2} \ln M$. Интегрируя это неравенство по отрезку $[M; 3M]$, получаем

$$\int_M^{3M} |S(x, T)|^2 dx \ll \ln M \sum_{\alpha} \int_M^{3M} |S(x, T, \alpha)|^2 dx \ll \ln^2 M \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \int_M^{3M} |S(x, T, \alpha)|^2 dx.$$

Ввиду симметричности распределения нетривиальных нулей $\zeta(s)$ относительно критической прямой, без ограничения общности можно считать, что $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, поэтому

$$\int_M^{3M} |S(x, T)|^2 dx \ll \ln^2 M \max_{\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1} \int_M^{3M} |S(x, T, \alpha)|^2 dx.$$

Оценим интеграл

$$\begin{aligned} J(M, T, \alpha) &= \int_M^{3M} |S(x, T, \alpha)|^2 dx = \int_M^{3M} \sum_{\substack{|\gamma_1| \leq T \\ \alpha \leq \beta_1 < \alpha + \frac{1}{\ln M}}} \sum_{\substack{|\gamma_2| \leq T \\ \alpha \leq \beta_2 < \alpha + \frac{1}{\ln M}}} x^{\beta_1 + \beta_2 - 2 + i(\gamma_1 - \gamma_2)} dx = \\ &= \sum_{\substack{|\gamma_1| \leq T \\ \alpha \leq \beta_1 < \alpha + \frac{1}{\ln M}}} \sum_{\substack{|\gamma_2| \leq T \\ \alpha \leq \beta_2 < \alpha + \frac{1}{\ln M}}} \int_M^{3M} x^{\beta_1 + \beta_2 - 2 + i(\gamma_1 - \gamma_2)} dx. \end{aligned}$$

Разобьём сумму по γ_1, γ_2 на две: в одну из них отнесём все слагаемые, для которых выполнено неравенство $|\gamma_1 - \gamma_2| \leq 1$, а в другую — все остальные. Тогда

$$J(M, T, \alpha) \leq J_1(M, T, \alpha) + J_2(M, T, \alpha),$$

где

$$J_1(M, T, \alpha) = \sum_{\substack{|\gamma_1| \leq T \\ \alpha \leq \beta_1 < \alpha + \frac{1}{\ln N}}} \sum_{\substack{|\gamma_2| \leq T \\ \alpha \leq \beta_2 < \alpha + \frac{1}{\ln N} \\ |\gamma_1 - \gamma_2| \leq 1}} \left| \int_M^{3M} x^{\beta_1 + \beta_2 - 2 + i(\gamma_1 - \gamma_2)} dx \right|,$$

$$J_2(M, T, \alpha) = \sum_{\substack{|\gamma_1| \leq T \\ \alpha \leq \beta_1 < \alpha + \frac{1}{\ln N}}} \sum_{\substack{|\gamma_2| \leq T \\ \alpha \leq \beta_2 < \alpha + \frac{1}{\ln N} \\ |\gamma_1 - \gamma_2| > 1}} \left| \int_M^{3M} x^{\beta_1 + \beta_2 - 2 + i(\gamma_1 - \gamma_2)} dx \right|.$$

Для $J_1(M, T, \alpha)$ и $J_2(M, T, \alpha)$ имеют место оценки

$$J_1(M, T, \alpha) \ll M^{2\alpha-1} \sum_{\substack{|\gamma_1| \leq T \\ \alpha \leq \beta_1}} \sum_{\substack{|\gamma_2| \leq T \\ |\gamma_1 - \gamma_2| \leq 1}} 1, \quad J_2(M, T, \alpha) \ll M^{2\alpha-1} \sum_{\substack{|\gamma_1| \leq T \\ \alpha \leq \beta_1}} \sum_{\substack{|\gamma_2| \leq T \\ |\gamma_1 - \gamma_2| > 1}} \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|}.$$

Так как в силу простейших теорем о распределении нулей дзета-функции (см. [3], с. 69) справедливы оценки

$$\sum_{\substack{|\gamma_2| \leq T \\ |\gamma_1 - \gamma_2| \leq 1}} 1 \ll \ln T, \quad \sum_{\substack{|\gamma_2| \leq T \\ |\gamma_1 - \gamma_2| > 1}} \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|} \ll \ln^2 T,$$

то

$$J_1(M, T, \alpha) \ll M^{2\alpha-1} N(\alpha, T) \ln T, \quad J_2(M, T, \alpha) \ll M^{2\alpha-1} N(\alpha, T) \ln^2 T.$$

Из полученных неравенств следует утверждение леммы.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются также следующие две леммы.

ЛЕММА 6. Пусть $\varepsilon > 0$, $N_2 \geq N^{\frac{7}{12} + \varepsilon}$. Тогда для числа решений неравенства $N < p_1^2 + p_2^2 \leq N + N_2$ в простых числах p_1, p_2 имеет место оценка

$$J_3(N, N_2) = \sum_{N < p_1^2 + p_2^2 \leq N + N_2} 1 \gg \frac{N_2}{\ln^2 N}.$$

Утверждение леммы следует из результатов работы [6].

ЛЕММА 7. Пусть $N^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \ll N_2 \leq N/2$, $\varepsilon > 0$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{N - 2N_2 < n \leq N - N_2} \tau^2(n) \ll N_2 \ln^3 N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе Б. Вильсона [8] доказана асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq N} \tau^2(n) = NP_3(\ln N) + O(N^{\frac{1}{2} + \varepsilon}),$$

где $P_3(x)$ — многочлен третьей степени. Положим $\Phi(N) = NP_3(\ln N)$. Тогда ввиду равенства $\ln(N - N_2) = \ln N + O(\frac{N_2}{N})$ имеем

$$\Phi(N - N_2) = (N - N_2)P_3(\ln(N - N_2)) = NP_3(\ln N) + O(N_2 \ln^3 N),$$

и аналогично $\Phi(N - 2N_2) = NP_3(\ln N) + O(N_2 \ln^3 N)$. Следовательно,

$$\sum_{N - 2N_2 < n \leq N - N_2} \tau^2(n) = \Phi(N - N_2) - \Phi(N - 2N_2) + O(N^{\frac{1}{2} + \varepsilon}) \ll N_2 \ln^3 N + N^{\frac{1}{2} + \varepsilon}.$$

Поскольку по условию $N_2 \gg N^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$, из полученной оценки следует утверждение леммы.

4. Доказательство теоремы 1

Будем решать наше неравенство с дополнительными ограничениями $N - 2N_1 < p_1 \leq N - N_1$, $N < p_1 + p_2 \leq N + H$, отчего число его решений может лишь уменьшиться. Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{N-2N_1 < p \leq N-N_1} \sum_{N-p < k \leq N-p+H} \Lambda(k) = \\ &= \sum_{N-2N_1 < p \leq N-N_1} (\psi(N-p+H) - \psi(N-p)). \end{aligned}$$

Если $k = p_1^m$, $m \geq 2$, то

$$\sum_{N-2N_1 < p \leq N-N_1} \sum_{\substack{N-p < p_1^m \leq N-p+H \\ 2 \leq m \leq \ln N_1}} \ln p_1 \ll H \sqrt{N_1} \ln N,$$

поэтому для суммы

$$S_1 = \sum_{N-2N_1 < p \leq N-N_1} \sum_{N-p < p_1 \leq N-p+H} \ln p_1 + O(H \sqrt{N_1} \ln N)$$

достаточно доказать оценку $S_1 \gg \frac{HN_1}{\ln N}$, тогда из неё следует искомая оценка $J_1(N, H) \gg \frac{HN_1}{\ln^2 N}$.

Применим к внутренней сумме явную формулу (лемма 1), получим

$$\sum_{N-p < k \leq N-p+H} \Lambda(k) = H - \sum_{|\gamma| \leq T} \int_{N-p}^{N-p+H} x^{\rho-1} dx + O\left(\frac{N_1 \ln^2 N}{T}\right).$$

Положим $T = \frac{N_1}{H} \ln^3 N$. Тогда

$$S_1 = \sum_{N-2N_1 < p \leq N-N_1} (\psi(N-p+H) - \psi(N-p)) = \sum_{N-2N_1 < p \leq N-N_1} \left(H + O(H \ln^{-1} N) - V \right),$$

где

$$V = \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{(N-p+H)^\rho - (N-p)^\rho}{\rho} = \sum_{|\gamma| \leq T} \int_{N-p}^{N-p+H} x^{\rho-1} dx.$$

По лемме 2 при $N \geq N_1$ справедливо неравенство

$$\sum_{N-2N_1 < p \leq N-N_1} 1 \gg \frac{N_1}{\ln N},$$

поэтому

$$S \gg \frac{HN_1}{\ln N} - W,$$

где

$$W = \sum_{N-2N_1 < p \leq N-N_1} \int_{N-p}^{N-p+H} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right| dx.$$

Оценим сумму W сверху. Заменим сумму по простым числам p на сумму по всем подряд идущим натуральным n (отчего она может лишь увеличиться) и воспользуемся неравенством Коши:

$$W^2 \ll N_1 H \sum_{N-2N_1 < n \leq N-N_1} \int_{N-n}^{N-n+H} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right|^2 dx =$$

$$\begin{aligned}
&= N_1 H \sum_{l=0}^{H-1} \sum_{N-2N_1 < l+mH \leq N-N_1} \int_{N-l-mH}^{N-l-(m-1)H} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right|^2 dx \ll \\
&\ll N_1 H^2 \int_{N_1}^{2N_1+H} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right|^2 dx \ll N_1 H^2 \int_{N_1}^{3N_1} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right|^2 dx.
\end{aligned}$$

Применяя лемму 5, получаем оценку

$$W^2 \ll N_1 H^2 \cdot \max_{\frac{1}{2} \leq \alpha < 1} N_1^{2\alpha-1} N(\alpha, T) \ln^4 N = N_1^2 H^2 \ln^4 N \max_{\frac{1}{2} \leq \alpha < 1} N_1^{2\alpha-2} N(\alpha, T).$$

Воспользуемся плотностной теоремой Хаксли (лемма 3). Получим

$$\begin{aligned}
W^2 &\ll N_1^2 H^2 \ln^{13} N \max_{\frac{1}{2} \leq \alpha < 1} N_1^{2\alpha-2} T^{\frac{12}{5}(1-\alpha)} \ll \\
&\ll (N_1 H)^2 \ln^{13} N \max_{\frac{1}{2} \leq \alpha < 1} N_1^{2(\alpha-1)} \left(\frac{N_1}{H} \ln^3 N \right)^{\frac{12}{5}(1-\alpha)} \ll (N_1 H)^2 \ln^{17} N \max_{\frac{1}{2} \leq \alpha < 1} \left(\frac{N_1^{\frac{1}{6}}}{H} \right)^{\frac{12}{5}(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Поскольку по условию $H \geq N_1^{\frac{1}{6}+2\varepsilon} \geq N^{\frac{7}{80}+\varepsilon}$, имеем $\frac{N_1^{\frac{1}{6}}}{H} \leq N_1^{-2\varepsilon}$, тогда с учётом границы нулей $\zeta(s)$ (лемма 4) получаем

$$\max_{\frac{1}{2} \leq \alpha < 1-\delta(T)} \left(\frac{N_1^{\frac{1}{6}}}{H} \right)^{\frac{12}{5}(1-\alpha)} \leq (N_1^{-2\varepsilon})^{\frac{12\varepsilon_0/5}{(\ln T)^{2/3} \ln \ln T}} \ll e^{-\frac{3c_0\varepsilon \ln N}{(\ln N)^{0,6}}} = e^{-c'_0(\ln N)^{0,4}},$$

$$W \ll N_1 H e^{-c_1(\ln N)^{0,3}}, \quad S_1 \gg \frac{HN_1}{\ln N}.$$

Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Как и при доказательстве теоремы 1, будем решать данное неравенство с дополнительными ограничениями $N - 2N_2 < p_1^2 + p_2^2 \leq N - N_2$, $N < p_1^2 + p_2^2 + p_3 \leq N + H$, отчего число его решений может лишь уменьшиться. Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{N-2N_2 < p_1^2 + p_2^2 \leq N-N_2} \sum_{N-p_1^2 - p_2^2 < k \leq N-p_1^2 - p_2^2 + H} \Lambda(k) = \\
&= \sum_{N-2N_1 < p_1^2 + p_2^2 \leq N-N_1} (\psi(N - p_1^2 - p_2^2 + H) - \psi(N - p_1^2 - p_2^2)).
\end{aligned}$$

Достаточно доказать оценку $S_2 \gg \frac{HN_2}{\ln^2 N}$. Применяя явную формулу (лемма 1), получаем

$$\sum_{N-p_1^2 - p_2^2 < k \leq N-p_1^2 - p_2^2 + H} \Lambda(k) = H - \sum_{|\gamma| \leq T} \int_{N-p_1^2 - p_2^2}^{N-p_1^2 - p_2^2 + H} x^{\rho-1} dx + O\left(\frac{N_2 \ln^2 N}{T}\right).$$

Положим $T = \frac{N_2}{H} \ln^3 N$. Тогда

$$S_2 = \sum_{N-2N_2 < p_1^2 + p_2^2 \leq N-N_2} \left(H + O(H \ln^{-1} N) - V \right),$$

где

$$V = \sum_{|\gamma| \leq T} \int_{N-p_1^2-p_2^2}^{N-p_1^2-p_2^2+H} x^{\rho-1} dx.$$

По лемме 6 при $N_2 \geq N^{\frac{7}{12}+2\varepsilon}$ справедлива оценка

$$\sum_{N-2N_2 < p_1^2+p_2^2 \leq N-N_2} 1 \gg \frac{N_2}{\ln^2 N},$$

поэтому

$$S_2 \gg \frac{HN_2}{\ln^2 N} - W,$$

где

$$W = \sum_{N-2N_2 < p_1^2+p_2^2 \leq N-N_2} \int_{N-p_1^2-p_2^2}^{N-p_1^2-p_2^2+H} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right| dx.$$

Оценим сумму W сверху. Пусть $r(n)$ — количество представлений числа n суммой двух квадратов целых чисел, $r(n) \leq 4\tau(n)$. Тогда

$$W \ll \sum_{N-2N_2 < n \leq N-N_2} r(n) \int_{N-n}^{N-n+H} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right| dx \ll \sum_{N-2N_2 < n \leq N-N_2} \tau(n) \int_{N-n}^{N-n+H} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right| dx.$$

Возведём сумму W в квадрат и воспользуемся неравенством Коши и леммой 7:

$$\begin{aligned} W^2 &\ll \sum_{N-2N_2 < n \leq N-N_2} \tau^2(n) \sum_{N-2N_2 < n \leq N-N_2} \left(\int_{N-n}^{N-n+H} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right| dx \right)^2 \ll \\ &\ll N_2 H \ln^3 N \sum_{N-2N_2 < n \leq N-N_2} \int_{N-n}^{N-n+H} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right|^2 dx = \\ &= N_2 H \ln^3 N \sum_{l=0}^{H-1} \sum_{N-2N_2 < l+mH \leq N-N_2} \int_{N-l-mH}^{N-l-(m-1)H} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right|^2 dx \ll \\ &\ll N_2 H^2 \ln^3 N \int_{N_2}^{2N_2+H} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right|^2 dx \ll N_2 H^2 \ln^3 N \int_{N_2}^{3N_2} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho-1} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Применяя лемму 5, получаем оценку

$$W^2 \ll N_2 H^2 \cdot \max_{\frac{1}{2} \leq \alpha < 1} N_2^{2\alpha-1} N(\alpha, T) \ln^7 N = N_2^2 H^2 \ln^7 N \max_{\frac{1}{2} \leq \alpha < 1} N_2^{2\alpha-2} N(\alpha, T).$$

Воспользуемся плотностной теоремой Хаксли (лемма 3). Получим

$$W^2 \ll N_2^2 H^2 \ln^{16} N \max_{\frac{1}{2} \leq \alpha < 1} N_2^{2\alpha-2} T^{\frac{12}{5}(1-\alpha)} \ll$$

$$\ll (N_2 H)^2 \ln^{16} N \max_{\frac{1}{2} \leq \alpha < 1} N_2^{2(\alpha-1)} \left(\frac{N_2}{H} \ln^3 N \right)^{\frac{12}{5}(1-\alpha)} \ll (N_2 H)^2 \ln^{20} N \max_{\frac{1}{2} \leq \alpha < 1} \left(\frac{N_2^{\frac{1}{6}}}{H} \right)^{\frac{12}{5}(1-\alpha)}.$$

По условию $H \geq N_2^{\frac{1}{6}+2\varepsilon} \geq N^{\frac{7}{72}+\varepsilon}$, поэтому $\frac{N_2^{\frac{1}{6}}}{H} \leq N_2^{-2\varepsilon}$, и с учётом границы нулей $\zeta(s)$ (лемма 4) получаем

$$\max_{\frac{1}{2} \leq \alpha < 1-\delta(T)} \left(\frac{N_2^{\frac{1}{6}}}{H} \right)^{\frac{12}{5}(1-\alpha)} \leq (N_2^{-2\varepsilon})^{\frac{12c_0/5}{(\ln T)^{2/3} \ln \ln T}} \ll e^{-\frac{3c_0\varepsilon \ln N}{(\ln N)^{0,6}}} = e^{-c'_0(\ln N)^{0,4}},$$

$$W \ll N_2 H e^{-c_1(\ln N)^{0,3}}, \quad S_2 \gg \frac{H N_2}{\ln^2 N}.$$

Теорема 2 доказана.

6. Заключение

Теорему 1 можно рассматривать как уточнение результата Х.Монтгомери и Р.Вона [4] о разрешимости в простых числах p_1, p_2 неравенства $|p_1 + p_2 - N| \leq H$ при $H \geq N^{\frac{7}{72}+\varepsilon}$. Насколько нам известно, задача, решённая в теореме 2, рассматривается в данной статье впервые. Интересно отметить, что параметр H в теореме 2 и в теореме Х.Монтгомери и Р.Вона один и тот же.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
2. Baker R. C., Harman G., Pintz J. The difference between consecutive primes, II // Proc. London Math. Soc. 2001. Vol. 83, №3. P. 532-562.
3. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983. 240 с.
4. Montgomery H.L., Vaughan R.C. The exceptional set in Goldbach's problem // Acta Arith. 1975. Vol. 27. P. 353-370.
5. Huxley M.N. On the difference between consecutive primes // Invent. Math. 1972. Vol. 15, № 1. P. 164-170.
6. Ivić A. The Riemann zeta-function: The theory of the Riemann zeta-function with applications. New York etc.: John Wiley & Sons, 1985.
7. Гирько В.В., Гриценко С.А. Об одном диофантовом неравенстве с простыми числами // Чебышевский сборник. 2006. Том 7, № 4. С. 26-30.
8. Wilson B.M. Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan // Proc. Lond. Math. Soc. 1922. Vol. 2(21). P. 235-255.

REFERENCES

1. Voronin, S. M. & Karatsuba, A. A. 1994, "The Riemann zeta function" (Russian), FML, Moscow.
2. Baker, R. C., Harman, G. & Pintz J. 2001, "The difference between consecutive primes, II", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 83, no. 3, pp. 532-562.

3. Karatsuba, A. A. 1983, *Osnovy analiticheskoi teorii chisel* (Russian), [Fundamentals of the analytic number theory]. Second edition. Nauka, Moscow, 240 p.
4. Montgomery H.L., Vaughan R.C. 1975, “The exceptional set in Goldbach’s problem“, *Acta Arith.*, vol. 27, pp. 353–370.
5. Huxley M.N. 1972, “On the difference between consecutive primes“, *Invent. Math.*, vol. 15, no. 1, pp. 164–170.
6. Ivić A. 1985, *The Riemann zeta-function: The theory of the Riemann zeta-function with applications*, New York etc., John Wiley & Sons.
7. Gir’ko, V. V. & Gritsenko, S. A. 2006, “On a diophantine inequality with primes“ (In Russian), *Chebyshevskii sbornik*, vol. 7, no. 4, pp. 26-30.
8. Wilson, B.M. 1922, “Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan“, *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 21, no. 2. pp. 235-255.

Получено: 18.08.2023

Принято в печать: 11.12.2023