ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-24-4-311-324

О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях II[1]

Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Тер-Гукасова Надежда Константиновна — специалист по кадровому делопроизводству отдела по кадровому администрированию управления персонала НИУ ВШЭ (г. Москва).
e-mail: nadj_nadj@mail.ru
Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В теории гиперболической дзета-функции решёток значительную роль играет теорема Бахвалова, в которой величина дзета-функции решётки решений линейного сравнения оценивается через гиперболический параметр решётки.

В монографии Н. М. Коробова 1963 года эта теорема доказывается методом, отличным от первоначальной работы Н. С. Бахвалова. В этом методе центральную роль играет лемма о количестве решений линейного сравнения в прямоугольной области.

В 2002 году В. А. Быковский получил принципиально новые оценки снизу и сверху, которые совпадали по порядку.

В работе даются новые оценки количества точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях. Это позволяет доказать усиленную теорему Бахвалова—Коробова—Быковского об оценки гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения.

Отличия теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях от соответствующей леммы Коробова состоит в том, что вместо оценки через отношение объёма прямоугольной области к гиперболическому параметру даётся модифицированная оценка Быковского через минимальные решения линейного сравнения.

Использование теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях дополняется обобщённой леммой Коробова об оценки остаточного ряда и рядом других модификаций в доказательстве теоремы Бахвалова—-Коробова, что и позволило доказать усиленную теорему Бахвалова—Коробова—Быковского об оценки гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения.

Ключевые слова: параллелепипедальная сетка, квадратурные формулы, метод оптимальных коэффициентов, количественная мера качества сетки.

Библиография: 30 названий.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

Для цитирования:
Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях II// Чебышевский сборник, 2023, Т. 24, вып. 4, С. 311–324.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-24-4-311-324

On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas[2]

N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Ter-Gukasova Nadezhda Konstantinovna — HR Clerk of the HR Administration Department of the HSE Personnel Department (Moscow).
e-mail: nadj_nadj@mail.ru
Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich — Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Senior Researcher, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

In the theory of the hyperbolic zeta function of lattices, a significant role is played by the Bakhvalov theorem, in which the magnitude of the zeta function of the lattice of linear comparison solutions is estimated through the hyperbolic lattice parameter.

In N. M. Korobov's 1963 monograph, this theorem is proved by a method different from the original work of N. S. Bakhvalov. In this method, the central role is played by the lemma about the number of linear comparison solutions in a rectangular area.

In 2002, V. A. Bykovsky obtained fundamentally new estimates from below and from above, which coincided in order.

The paper gives new estimates of the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular regions. This allows us to prove the strengthened Bakhvalov—Korobov—Bykovsky theorem on the estimate of the hyperbolic zeta function of the lattice of linear comparison solutions.

The difference between the theorem on the number of lattice points of solutions to linear comparison in rectangular areas and the corresponding Korobov lemma is that instead of an estimate through the ratio of the volume of a rectangular area to the hyperbolic parameter, a modified Bykovsky estimate is given through minimal solutions to linear comparison.

The use of the theorem on the number of lattice points of solutions to linear comparison in rectangular domains is supplemented by the generalized Korobov lemma on estimates of the residual series and a number of other modifications in the proof of the Bakhvalov—Korobov

[2]The study was carried out within the framework of state task No. 073-03-2022-117/7 on the topic "Number-theoretic methods in approximate analysis and their applications in mechanics and physics".

theorem, which made it possible to prove the strengthened Bakhvalov—Korobov—Bykovsky theorem on estimates hyperbolic zeta function of the lattice of linear comparison solutions.

Keywords: parallelepipedal grid, quadrature formulas, method of optimal coefficients, quantitative measure of grid quality

Bibliography: 30 titles.

For citation:
N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 311–324.

1. Введение

В 1959 году профессор Н. М. Коробов предложил новый класс теоретико-числовых сеток — параллелепипедальные сетки:

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

где $(a_j, N) = 1$ $(j = 1, \ldots, s)$, и соответствующие квадратурные формулы с равными весами

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\vec{x})\, d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) - R_N[f],$$

где $R_N[f]$ – погрешность квадратурной формулы.

На классе E_s^α периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье были получены наилучшие результаты

$$|R_N[f]| << \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha} \quad \text{(Н. С. Бахвалов [2], Н. М. Коробов [17]).}$$

Эти оценки получены на основе изучения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha)$ $(\alpha > 1)$ решётки и

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) = \sum_{\vec{m} \in \Lambda(\vec{a}, N)}{}' \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}}{}' \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \tag{1}$$

где $\sum'$ означает, что из области суммирования исключен набор $\vec{m} = \vec{0}$, а символ Коробова $\delta_N(a)$ задается равенством

$$\delta_N(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod N, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod N. \end{cases}$$

Прежде всего заметим, что гиперболическая дзета-функция решёток является рядом Дирихле. Действительно, дадим несколько определений и обозначений.

Усеченным норменным спектром решётки Λ называется множество значений усеченной нормы на ненулевых точках решётки:

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Lambda \backslash \{\vec{0}\}\}.$$

Усеченный норменный спектр является дискретным числовым множеством, то есть

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots\} \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} \lambda_k = \infty.$$

Очевидно, что

$$q(\Lambda) = \min_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} \lambda = \lambda_1.$$

Порядком точки спектра называется количество точек решётки с заданным значением усечённой нормы. Порядок точки λ усеченного норменного спектра обозначим через $q(\lambda)$.

Из дискретности усеченного норменного спектра вытекает, что гиперболическую дзета-функцию произвольной решётки Λ можно представить как ряд Дирихле:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2)^{-\alpha} = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' q(\vec{x})^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} q(\lambda_k)\lambda_k^{-\alpha} = \sum_{\lambda\in Q_{sp}(\Lambda)} q(\lambda)\lambda^{-\alpha}. \qquad (2)$$

В работе [30] было получено усиление леммы Н. М. Коробова о числе решений линейного сравнения в прямоугольных областях, что позволило усилить классическую теорему Н. С. Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функции целочисленной решётки решений линейного сравнения.

Дальнейший анализ проблемы оценки числа решений линейного сравнения в прямоугольных областях и сопоставления с результатами В. А. Быковского из работы [4] показали, что можно объединить подходы Н. М. Коробова доказательства теоремы Н. С. Бахвалова с подходами В. А. Быковского.

Цель работы — получить новую оценку сверху для количества точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях и усиленную теорему Бахвалова — Быковского.

2. Квазипорядок на $\mathbb{R}^s$ и множества Быковского

Рассмотрим на $\mathbb{R}^s$ квазипорядок $\vec{x} \leqslant \vec{y}$, заданный выполнением s соотношений $|x_\nu| \leqslant |y_\nu|$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Ясно, что отношение

$$\theta = \{(\vec{x}, \vec{y}) | \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^s, \vec{x} \leqslant \vec{y} \& \vec{y} \leqslant \vec{x}\}$$

является отношением эквивалентности и фактормножество $\mathbb{R}^s/\theta$ будет частично упорядоченным множеством изоморфным $\mathbb{R}^s_+$, где $\mathbb{R}_+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}$ — множество всех неотрицательных вещественных чисел (См. [22], стр. 37).

Будем через $q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s$, где для вещественных x полагаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$, обозначать усеченную норму $\vec{x}$. Ясно, что из $\vec{x} \leqslant \vec{y}$ следует $q(\vec{x}) \leqslant q(\vec{y})$.

Так как решётка $\Lambda(\vec{a}, N)$ решений линейного сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod N \qquad (3)$$

является подмножеством $\mathbb{R}^s$, то на ней задается индуцированный квазипорядок. Можно рассмотреть отношение эквивалентности $\theta_{\Lambda(\vec{a},N)}$, которое задается равенством

$$\theta_{\Lambda(\vec{a},N)} = \{(\vec{x}, \vec{y}) | \vec{x}, \vec{y} \in \Lambda(\vec{a}, N), \vec{x} \leqslant \vec{y} \& \vec{y} \leqslant \vec{x}\},$$

но фактормножество $\Lambda(\vec{a}, N)/\theta_{\Lambda(\vec{a},N)}$ в случае произвольной решётке решений линейного сравнения непросто описать. Для удобства два решения $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$, принадлежащих $\theta_{\Lambda(\vec{a},N)}$, будем называть ассоциированными и писать $\vec{m}_1 \sim \vec{m}_2$. Если из $\vec{0} < \vec{m}_1 \leqslant \vec{m}_2$ следует $\vec{m}_1 \sim \vec{m}_2$, то $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$ называются минимальными относительно квазипорядка.

Для простоты изложения мы будем предполагать, что все коэффициенты a_ν взаимно просты с модулем N: $(a_\nu, N) = 1$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Именно этот случай наиболее важен для метода оптимальных коэффициентов, так как это соглашение входит в определение параллелепипедальных сеток Коробова.

В работе [4] В. А. Быковский ввёл понятие минимального решения сравнения (3). Ненулевое решение называется *минимальным*, если не существует другого ненулевого решения $(m_1', \ldots, m_s')$, для которого

$$|m_1'| \leqslant |m_1|, \ldots, |m_s'| \leqslant |m_s|; \quad |m_1'| + \ldots + |m_s'| < |m_1| + \ldots + |m_s|.$$

Другими словами, ненулевое решение $\vec{m}$ называется *минимальным*, если не существует другого ненулевого решения $\vec{m}'$ такого, что $\vec{m}' < \vec{m}$. Таким образом, относительно квазипорядка на решётке $\Lambda(\vec{a}, N)$ минимальное решение $\vec{m}$ является просто минимальным элементом решётки.

Отметим, что в работе [5] было ведено другое понятие — локальный минимум второго рода, так как это требовалось для обобщения результатов В. А. Быковского на случай гиперболической дзета-функции произвольной решётки.

Будем множество всех минимальных решений $\vec{m}$ решётки $\Lambda = \Lambda(\vec{a}, N)$ обозначать через $B(\Lambda(\vec{a}, N))$ и называть минимальным множеством Быковского. Если $\vec{m} \in B(\Lambda(\vec{a}, N))$, то и $-\vec{m} \in B(\Lambda(\vec{a}, N))$.

Из дискретности решётки и теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что для произвольной решётки её минимальное множество $B(\Lambda)$ конечно и не пусто, при этом $\overline{x_j} < \det \Lambda$ $(j = 1, \ldots, s)$. Более того, можно утверждать, что $\overline{x_1} \ldots \overline{x_s} < N$.

Пусть $\vec{x}_j = (x_{1\,j}, \ldots, x_{s\,j}) \quad (1 \leqslant j \leqslant r,\ r = r(\Lambda))$ есть все минимальные решения сравнения (3) из минимального множества $B(\Lambda)$ решётки Λ. Так как для любого минимального решения $\vec{x}$ точка $-\vec{x}$ также является минимальным решением, то $r(\Lambda)$ — чётное натуральное число. Через $B^*(\Lambda)$ обозначим множество минимальных решений, где из каждой пары $\vec{x}$ и $-\vec{x}$ взято ровно одно. Таким образом

$$B(\Lambda) = B^*(\Lambda) \bigcup -B^*(\Lambda). \tag{4}$$

Если $r^*(\Lambda) = |B^*(\Lambda)|$, то $r(\Lambda) = 2r^*(\Lambda)$. Будем предполагать, что нумерация минимальных решений согласована с разбиением (4): $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \ldots, r^*)$ и $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \ldots, r^*)$. Ясно, что для гиперболического параметра решётки справедливо равенство

$$q(\Lambda) = \min_{1 \leqslant j \leqslant r} \overline{x}_{1\,j} \ldots \overline{x}_{s\,j}.$$

Введем для произвольного вектора $\vec{x}$ понятие его индекса – количество ненулевых координат. Обозначим эту величину через $r(\vec{x})$. Таким образом наименьший индекс у нулевого вектора: $r(\vec{0}) = 0$, а максимальное значение индекса равно s.

Будем предполагать,что для выбранной нумерации выполнено дополнительное соглашение $r(\vec{x}_1) \leqslant r(\vec{x}_2) \leqslant \ldots \leqslant r(\vec{x}_{r^*})$. Ясно, что $r^* = r_1^* + \ldots + r_s^*$, где r_ν^* — количество минимальных решений из $B^*(\Lambda)$ с индексом ν. Нетрудно видеть, что с единичным индексом имеется ровно s минимальных решений: $\vec{x}_1 = (N, 0, \ldots, 0)$,…,$\vec{x}_s = (0, \ldots, 0, N)$.

Минимальные решения индекса 2 можно перечислить с помощью цепных дробей согласно результатам работы [12].

Обозначим через $B_\nu^*(\Lambda)$ множество минимальных решений с индексом ν. Ясно, что $B^*(\Lambda) = \bigcup_{\nu=1}^s B_\nu^*(\Lambda)$.

Аналогично, решётку решений $\Lambda = \Lambda(\vec{a}, N)$ представим как объединение множеств точек индекса ν: $\Lambda = \{\vec{0}\} \bigcup (\bigcup_{\nu=1}^s \Lambda_\nu)$, где $\Lambda_\nu = \{\vec{x} | \vec{x} \in \Lambda, r(\vec{x}) = \nu\}$ $(\nu = 1, \ldots, s)$.

Ясно, что справедливо представление для гиперболической дзета-функции решётки:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\nu=1}^s \sum_{\vec{x} \in \Lambda_\nu} \frac{1}{(\overline{x_1} \ldots \overline{x_s})^\alpha}.$$

Ещё Н. М. Коробов в 1959 году в работах [13, 14] установил, что остаточный ряд в гиперболической дзета-функции решётки решений $\Lambda(\vec{a}, N)$, в котором хотя бы одна компонента по модулю не меньше N, оценивается как $O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right)$.

В соответствии с этим результатом Н. М. Коробова положим $\Lambda_\nu = \Lambda^*_\nu \bigcup \Lambda^{**}_\nu$, где $\Lambda^*_\nu = \{\vec{x}|\vec{x} \in \Lambda_\nu, \max_{1\leqslant j\leqslant s}|x_j| < N\}$, $\Lambda^{**}_\nu = \{\vec{x}|\vec{x} \in \Lambda_\nu, \max_{1\leqslant j\leqslant s}|x_j| \geqslant N\}$. Кроме этого, положим $\Lambda^* = \bigcup_{\nu=1}^s \Lambda^*_\nu$, $\Lambda^{**} = \bigcup_{\nu=1}^s \Lambda^{**}_\nu$.

Сделаем ещё несколько важных замечаний и обозначений.

Во-первых, для любого $j > s$ и минимального решения $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ имеем $\max_{1\leqslant\nu\leqslant s}|x_{\nu\, j}| \leqslant \frac{N}{2}$.

Во-вторых, будем говорить что вектора $\vec{P}$ и $\vec{x}$ подобны: $\vec{P} \simeq \vec{x}$, если $r(\vec{P}) = r(\vec{x})$ и нулевые координаты у обоих векторов совпадают.

В-третьих, для любого $\vec{P}$ с $\max_{1\leqslant j\leqslant s}|P_j| < N$ и индекса ν через $b(\vec{P})$ обозначим минимальное решение $\vec{x}_j \in B^*_\nu(\Lambda)$ такое, что $\vec{P} \simeq \vec{x}_j$, $\vec{x}_j \leqslant \vec{P}$ и величина $\frac{q(\vec{P})}{q(\vec{x}_j)}$ имеет минимальное значение. Отсюда следует, что $\frac{q(\vec{P})}{q(\vec{x}_j)} \leqslant \frac{q(\vec{P})}{q(\Lambda)}$, так как для гиперболического параметра справедливо равенство $q(\Lambda) = \min_{\vec{x}_j\in B^*} q(\vec{x}_j)$.

3. Число точек решения линейного сравнения в прямоугольной области

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед

$$\Pi(\vec{\lambda};\vec{n}) = \prod_{\nu=1}^{s}[\lambda_\nu + 1; \lambda_\nu + n_\nu],$$

где $\vec{\lambda} \in \mathbb{Z}^s$, $\vec{n} \in \mathbb{N}^s$. Очевидно, что $\Pi(\vec{\lambda};\vec{n}) = \vec{\lambda} + \Pi(\vec{0};\vec{n})$.

Лемма 1. *Для любых целых b и λ справедливо равенство*

$$\sum_{m_j=b+1}^{b+N} \delta_N(a_j m_j + \lambda) = 1.$$

Доказательство. См. [30]. □

Лемма 2. *Справедливы неравенства*

$$\frac{2(\zeta(\alpha)-1)}{N^\alpha} \leqslant \sum_{|m_j|\geqslant N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \leqslant \frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}.$$

Доказательство. Действительно, пользуясь леммой 1, получим

$$\sum_{|m_j|\geqslant N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} = \sum_{b=1}^{\infty}\left(\sum_{m_j=bN}^{bN+N-1} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} + \sum_{m_j=-(bN+N-1)}^{-bN} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha}\right),$$

$$\frac{2(\zeta(\alpha)-1)}{N^\alpha} = 2\sum_{b=2}^{\infty}\frac{1}{(bN)^\alpha} \leqslant \sum_{|m_j|\geqslant N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \leqslant 2\sum_{b=1}^{\infty}\frac{1}{(bN)^\alpha} = \frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}.$$

□

Обозначим для целого вектора $\vec{n}$ с индексом $r(\vec{n}-\vec{1}) = \nu$ и целого вектора $\vec{\lambda}+\vec{1} \simeq \vec{n}-\vec{1}$ через $T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N)$ число решений системы

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s + \lambda \equiv 0 \pmod{N}, \\ \vec{m} \in \Pi(\vec{\lambda};\vec{n}) \bigcap \Lambda^*_\nu, \vec{m} \simeq \vec{n}-\vec{1}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Ясно, что

$$T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N) = T_\nu(\vec{a},\vec{0},\vec{n},\lambda + (\vec{a},\vec{\lambda});N). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть $r(\vec{n}-\vec{1})=\nu>1$, $b(\vec{n}-\vec{1})=\vec{x}_j$ и $n_\mu=1$, $\lambda_\mu=-1$ при $x_{\mu\,j}=0$. Тогда справедлива оценка*

$$T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N)\leqslant\prod_{|x_{\mu\,j}|>0}\left\lceil\frac{n_\mu}{|x_{\mu\,j}|}\right\rceil, \tag{7}$$

где $\lceil x\rceil$ — наименьшее целое число не меньшее вещественного числа x.

Доказательство. Для любого вектора $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_s)$ положим $|\vec{x}|=(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_s})$. Определим величины $k_\mu=\left\lceil\frac{n_\mu}{|x_{\mu\,j}|}\right\rceil$ для $|x_{\mu\,j}|>0$, $k_\mu=1$ для $x_{\mu\,j}=0$. Положим для $\vec{l}=(l_1,\ldots,l_s)$, что $\vec{l}\cdot\vec{x}=(l_1x_1,\ldots,l_sx_s)$.

Покроем прямоугольный параллелепипед $\Pi(\vec{\lambda};\vec{n})$ объединением прямоугольных параллелепипедов вида $\Pi(\vec{\lambda}+\vec{l}\cdot|\vec{x}|;|\vec{x}_j|)$, где целые $0\leqslant l_1\leqslant k_1-1,\ldots,0\leqslant l_s\leqslant k_s-1$:

$$\Pi(\vec{\lambda};\vec{n})\subseteq\bigcup_{\vec{0}\leqslant\vec{l}\leqslant\vec{k}-\vec{1}}\Pi(\vec{\lambda}+\vec{l}\cdot|\vec{x}|;|\vec{x}_j|).$$

Отсюда следует, что

$$T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N)\leqslant\sum_{\vec{0}\leqslant\vec{l}\leqslant\vec{k}-\vec{1}}T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda}+\vec{l}\cdot|\vec{x}|;|\vec{x}_j|,\lambda;N). \tag{8}$$

Покажем, что $T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda}+\vec{l}\cdot|\vec{x}|;|\vec{x}_j|,\lambda;N)\leqslant 1$. Допустим, что число решений системы

$$\begin{cases} a_1m_1+\ldots+a_sm_s+\lambda\equiv 0 \pmod N,\\ \vec{m}\in\Pi(\vec{\lambda}+\vec{l}\cdot|\vec{x}|;|\vec{x}_j|)\bigcap\Lambda_\nu^*,\vec{m}\simeq|\vec{x}_j|-\vec{1}\end{cases} \tag{9}$$

больше 1. Тогда, согласно определению величины $\delta_N(m)$, числа $a_1m_1+\ldots+a_sm_s+\lambda$ и $a_1m_1'+\ldots+a_sm_s'+\lambda$ будут кратны N. Но тогда и их разность также будет кратна N:

$$a_1(m_1-m_1')+\ldots+a_s(m_s-m_s')\equiv 0 \pmod N.$$

Так как системы $m_1,\ldots,m_s$ и $m_1',\ldots,m_s'$ различны, то система $m_1-m_1',\ldots,m_s-m_s'$ будет нетривиальным решением сравнения (3) и, следовательно,

$$|m_1-m_1'|<\overline{x_{1\,j}},\ldots,|m_s-m_s'|<\overline{x_{s\,j}},$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает что $T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda}+\vec{l}\cdot|\vec{x}|;|\vec{x}_j|,\lambda;N)\leqslant 1$.

Пользуясь доказанным неравенством, получим

$$T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N)\leqslant k_1\ldots k_s=\prod_{|x_{\mu\,j}|>0}\left\lceil\frac{n_\mu}{|x_{\mu\,j}|}\right\rceil.$$

□

Следствие 1. *Пусть $r(\vec{n}-\vec{1})=\nu>1$, минимальное решение $\vec{x}_j\simeq\vec{n}-\vec{1}$, $\vec{x}_j\leqslant\vec{n}$ и $n_\mu=1$, $\lambda_\mu=-1$ при $x_{\mu\,j}=0$. Тогда справедлива оценка*

$$T_\nu(\vec{a},\vec{\lambda},\vec{n},\lambda;N)\leqslant\prod_{|x_{\mu\,j}|>0}\left\lceil\frac{n_\mu}{|x_{\mu\,j}|}\right\rceil. \tag{10}$$

Доказательство. Доказательство следствия дословно повторяет доказательство теоремы. □

4. Усиленная теорема Бахвалова — Коробова — Быковского

Теперь мы можем доказать усиленный вариант теоремы Бахвалова — Коробова — Быковского для произвольного модуля N. В соответствии с разбиением $\Lambda \setminus \{\vec{0}\} = \Lambda^* \bigcup \Lambda^{**}$ получим:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha)=\zeta_H(\Lambda^*|\alpha)+\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha), \quad \zeta_H(\Lambda^*|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda^*} \frac{1}{(\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^\alpha}, \quad \zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda^{**}} \frac{1}{(\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^\alpha}.$$

Лемма 3. **Обобщённая лемма Коробова.** *Справедливы неравенства*

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \geqslant \frac{2(\zeta(\alpha)-1)(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha}\sum_{\nu=0}^{s-1}\left(1-\frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}+\frac{2}{N^\alpha}}{1+2\zeta(\alpha)}\right)^\nu, \tag{11}$$

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \leqslant \frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha}\sum_{\nu=0}^{s-1}\left(1-\frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}}{1+2\zeta(\alpha)}\right)^\nu. \tag{12}$$

Доказательство. Из определения величины $\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha)$ следует, что

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) = \sum_{|m_1|\geqslant N}\ \sum_{m_2,\ldots,m_s\in\mathbb{Z}} \frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{s-2}\ \sum_{|m_1|,\ldots,|m_\nu|<N}\ \sum_{|m_{\nu+1}|\geqslant N}\ \sum_{m_{\nu+2},\ldots,m_s\in\mathbb{Z}} \frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}+$$
$$+\sum_{|m_1|,\ldots,|m_{s-1}|<N}\ \sum_{|m_s|\geqslant N} \frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}.$$

Воспользуемся леммой 2, получим

$$\frac{2(\zeta(\alpha)-1)}{N^\alpha}\left((1+2\zeta(\alpha))^{s-1}+\sum_{\nu=1}^{s-2}\left(1+2\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha}\right)^\nu(1+2\zeta(\alpha))^{s-1-\nu}+\left(1+2\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha}\right)^{s-1}\right)\leqslant$$
$$\leqslant \zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}\left((1+2\zeta(\alpha))^{s-1}+\sum_{\nu=1}^{s-2}\left(1+2\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha}\right)^\nu(1+2\zeta(\alpha))^{s-1-\nu}+\left(1+2\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha}\right)^{s-1}\right).$$

Далее заметим, что

$$\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha}=\zeta(\alpha)-\alpha\int_N^\infty\frac{[x]-N+1}{x^{\alpha+1}}dx,$$
$$\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}=\frac{\alpha}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}-\frac{1}{N^{\alpha-1}}=\alpha\int_N^\infty\frac{x-N}{x^{\alpha+1}}dx\leqslant\alpha\int_N^\infty\frac{[x]-N+1}{x^{\alpha+1}}dx\leqslant$$
$$\leqslant\alpha\int_N^\infty\frac{x-N+1}{x^{\alpha+1}}dx=\frac{\alpha}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}-\frac{1}{N^{\alpha-1}}+\frac{1}{N^\alpha}=\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}+\frac{1}{N^\alpha},$$
$$\zeta(\alpha)-\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}-\frac{1}{N^\alpha}\leqslant\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha}\leqslant\zeta(\alpha)-\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}.$$

Отсюда следует, что

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \geqslant \frac{2(\zeta(\alpha)-1)(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{2}{N^\alpha}}{1+2\zeta(\alpha)}\right)^\nu,$$

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \leqslant \frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}}{1+2\zeta(\alpha)}\right)^\nu.$$

□

Перейдём к изучению величины $\zeta_H(\Lambda^*|\alpha)$, для которой справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda^*|\alpha) = \sum_{\nu=2}^{s} \zeta_H(\Lambda^*_\nu|\alpha),$$

так как $\Lambda^*_1 = \emptyset$.

Пусть $\vec{x}_j \in B^*_\nu(\Lambda)$ — произвольное минимальное решение индекса ν. Обозначим через $\vec{P}(\vec{x}_j)$, заданный равенствами $P_\mu = 0$, если $x_{\mu\,j} = 0$, и $P_\mu = N-1$, если $|x_{\mu\,j}| > 0$. Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\zeta_H(\Lambda^*_\nu|\alpha) = \sum_{\vec{m}\in\Lambda^*_\nu} \frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} \leqslant \sum_{\vec{x}_j\in B^*_\nu(\Lambda)} \sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{m}\leqslant\vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}. \tag{13}$$

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$\zeta_H(\Lambda^*_\nu|\alpha) \leqslant \left(2 + \frac{1}{\alpha-1}\right)^\nu \sum_{\vec{x}_j\in B^*_\nu(\Lambda)} \frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha}.$$

Доказательство. Определим функцию $\varphi(m_1,\ldots,m_s)$ равенствами

$$\varphi(m_1,\ldots,m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vec{x}_j > \vec{m} \text{ или } \vec{m} > \vec{P}(\vec{x}_j), \\ \delta_N(a_1m_1+\ldots+a_sm_s), & \text{если } \vec{x}_j \leqslant \vec{m} \leqslant \vec{P}(\vec{x}_j). \end{cases}$$

Применяя по каждой переменной преобразование Абеля, получим

$$\sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{m}\leqslant\vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1,\ldots,m_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} =$$

$$= \sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{m}\leqslant\vec{P}(\vec{x}_j)} \prod_{|x_{\mu\,j}|>0} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha}\right) \sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{k}\leqslant\vec{m}} \delta_N(a_1k_1+\ldots+a_sk_s).$$

Воспользуемся следствием для оценки внутренней суммы, получим:

$$\sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{m}\leqslant\vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{m}\leqslant\vec{P}(\vec{x}_j),m_1,\ldots,m_s\geqslant0} \prod_{|x_{\mu\,j}|>0} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha}\right) 2\left\lceil\frac{m_\mu}{|x_{\mu\,j}|}\right\rceil =$$

$$= 2^\nu \prod_{|x_{\mu\,j}|>0} \sum_{m_\mu=|x_{\mu\,j}|}^{N-1} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha}\right) \left\lceil\frac{m_\mu}{|x_{\mu\,j}|}\right\rceil.$$

Для внутренней суммы имеем:

$$\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|}^{N-1}\left(\frac{1}{m_\mu^\alpha}-\frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha}\right)\left\lceil\frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|}\right\rceil \leqslant \sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|}^{N-1}\left(\frac{1}{m_\mu^\alpha}-\frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha}\right)\left(\frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha}-\frac{1}{N^\alpha}+\frac{1}{|x_{\mu j}|}\left(\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|}^{N-1}\frac{m_\mu}{m_\mu^\alpha}-\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|+1}^{N}\frac{m_\mu-1}{m_\mu^\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha}-\frac{1}{N^\alpha}+\frac{1}{|x_{\mu j}|}\left(\frac{|x_{\mu j}|}{|x_{\mu j}|^\alpha}+\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|+1}^{N-1}\frac{1}{m_\mu^\alpha}-\frac{N-1}{N^\alpha}\right).$$

Далее заметим, что:

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(x+1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)=\int_{x+1}^{N}\frac{1}{u^\alpha}du\leqslant\sum_{m=x+1}^{N-1}\frac{1}{m^\alpha}\leqslant\int_{x}^{N-1}\frac{1}{u^\alpha}du=$$

$$=\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-\frac{1}{(N-1)^{\alpha-1}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|}^{N-1}\left(\frac{1}{m_\mu^\alpha}-\frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha}\right)\left\lceil\frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|}\right\rceil\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{|x_{\mu j}|^\alpha}-\frac{1}{N^\alpha}+\frac{1}{|x_{\mu j}|}\left(\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{|x_{\mu j}|^{\alpha-1}}-\frac{1}{(N-1)^{\alpha-1}}\right)-\frac{N-1}{N^\alpha}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right)\frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha}.$$

Окончательно для $\zeta_H(\Lambda^*_\nu|\alpha)$ имеем:

$$\sum_{\vec{x}_j\leqslant\vec{m}\leqslant\vec{P}(\vec{x}_j)}\frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{|x_{\mu j}|>0}\left(2+\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{|x_{\mu j}|}\right)\frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha}=\frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha}\prod_{|x_{\mu j}|>0}\left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right),$$

$$\zeta_H(\Lambda^*_\nu|\alpha)\leqslant\sum_{\vec{x}_j\in B^*_\nu(\Lambda)}\frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha}\left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right)^\nu.$$

□

Теорема 2. *Гиперболическая дзета-функция решетки $\zeta_H(\Lambda(\vec{a},N)|\alpha)$ удовлетворяет неравенству*

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a},N)|\alpha)<\sum_{\nu=2}^{s}\left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right)^\nu\sum_{\vec{x}_j\in B^*_\nu(\Lambda)}\frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha}+$$

$$+\frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha}\sum_{\nu=0}^{s-1}\left(1-\frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}}{1+2\zeta(\alpha)}\right)^\nu. \qquad (14)$$

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из лемм 3 и 4. □

5. Заключение

Оценка, полученная в теореме 2, точнее чем общая оценка работы [5], обобщающей результаты В. А. Быковского [4].

В работе [30] дается достаточно подробный обзор работ [1] — [29], связанных с данной тематикой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

2. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 3–18.

3. Бочарова (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 4 — 109.

4. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.

5. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.

6. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, вып. 1(25). С. 185 – 223.

7. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82 – 90.

8. М. Н. Добровольский Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 1(4) С. 95 – 121.

9. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 2(4) С. 43 – 59.

10. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

11. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3. Вып. 1 (3) С. 41—48.

12. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.

13. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 — 25.

14. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 — 1210.

15. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. N 5. С. 1009—1012.

16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

17. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83 — 90.

18. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

19. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики“. Тула, 2002. С. 39—40.

20. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. Тула. 2007. Т. 8, вып. 4(24) С. 105 – 128.

21. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.

22. Мельников О. В., Ремеслеников В. Н., Романьков В. А. и др. Общая алгебра. Т. 1. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 592 с. — (Справ. мат. б-ка).

23. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник. 2009 Т. 10, вып. 1(29). С. 65–77.

24. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом остановки // Материалы 7 международной конференции <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>. 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.

25. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом остановки // Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.

26. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" , Odessa, August 20—26, 2012. p. 22 — 24.

27. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 — 98.

28. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 1293 — 201.

29. Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 22–29.

30. Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 130–144.

REFERENCES

1. Babenko, K.I. 1986, Osnovy chislennogo analiza [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.

2. Bakhvalov, N.S. 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 3–18.

3. Bocharova, L.P. 2007, “Algorithms for finding the optimal coefficients”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 8, no. 1(21), pp. 4–109.

4. Bykovskij, V.A 2002, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.

5. O. A. Gorkusha, N. M. Dobrovolsky, 2005, "On estimates of hyperbolic zeta function of lattices" *Chebyshevsky sbornik*, vol. 6, issue 2(14), pp. 130-138.

6. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, “On the error of approximate integration over modified grids”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

7. Dobrovol’skii, M. N. 2003, “Estimates of sums over a hyperbolic cross”, *Izvestie Tul’skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol.9, no. 1, pp. 82-90.

8. Dobrovol’skii, M. N. 2004, “The optimum coefficients of the combined meshes”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 5, no. 1(9), pp. 95–121.

9. Dobrovol’skii, M. N., Dobrovol’skii, N. M. & Kiseleva, O.V. 2002, “On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.

10. Dobrovol’skii, N. M. 1984, “The hyperbolic Zeta function of lattices”, Dep. v VINITI, no. 6090–84.

11. Dobrovol’skii, N. M. & Korobov, N. M. 2002, “On the error estimation of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 1(3), pp. 41–48.

12. A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii, 2021, “On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 168–182.

13. Korobov, N.M. 1959, “The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients”, *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 19–25.

14. Korobov, N.M. 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.

15. Korobov, N.M. 1960, “Properties and calculation of optimal coefficients”, *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012..

16. Korobov, N.M. 1963, O teoretiko-chislovykh metodakh v priblizhennom analize [On number-theoretic methods in approximate analysis], Mashgiz, Moscow, Russia.

17. Korobov, N.M. 1994, "Quadrature formulas with combined grids", *Matematicheskie zametki*, vol. 55, no. 2, pp. 83–90.

18. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

19. Korobov, N.M. 2002, "About one estimation in the method of optimal coefficients", Tezisy IV Vserossijskoj konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki", pp. 39–40.

20. N. M. Korobov, N. M. Dobrovolsky 2007, "Optimality criteria and algorithms for searching for optimal coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 8, issue. 4(24) pp. 105 – 128.

21. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, Nachala chislennogo analiza [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.

22. Melnikov O.V., Remeslenikov V.N., Romankov V.A. et al. General algebra. T. 1. — M.: Science. Ch. ed. Phys.-Math. lit., 1990. — 592 p. — (Reference mat. b-ka).

23. Rebrov, E.D. 2009, "Dobrovolskaya's algorithm and numerical integration with the stopping rule", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 10, issue. 1(29). pp. 65–77.

24. Ogorodnichuk N. K., Rebrov E. D. 2010, "On the numerical integration algorithm with the stopping rule", Proceedings of the 7th international conference "Algebra and number theory: modern problems and applications". Tula, Iz-vo TSPU im. L. N. Tolstoy. P. 153 — 158.

25. Ogorodnichuk N. K., Rebrov E. D. 2011, "POIVS TMK: Integration algorithms with a stopping rule", International scientific and practical conference "Multiscale modeling of structures and nanotechnology, dedicated to the 190th anniversary of the birth of academician Pafnutiy Lvovich Chebyshev, the centenary of the birth of academician Sergei Vasilyevich Vonsovsky and 80 - anniversary of the birth of corresponding member Viktor Anatolyevich Buravikhin" Tula, Iz-vo TSPU im. L. N. Tolstoy. P. 153 — 158.

26. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov 2012. "Algorithms fot computing optimal coefficients", Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology", Odessa, August 20—26, p. 22 — 24.

27. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Ogorodnichuk N. K., Rebrov E. D., Rebrova I. Yu. 2012, "Some issues of the number-theoretic method in approximate analysis", Proceedings X international conference "Algebra and number theory: modern problems and applications" *Scientific notes of Oryol State University*. No. 6. Part 2. P. 90 — 98.

28. Seregina N. K. 2013. "Algorithms for numerical integration with the stopping rule", *News of TulGU. Natural Sciences*. Issue. 3. P. 1293 — 201.

29. Seregina N.K. 2015. "On a quantitative measure of the quality of optimal coefficients", *News of TulSU. Natural Sciences*. Issue. 1. pp. 22–29.

30. N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 130–144.

Получено: 20.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023