

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-299-310

Гладкое многообразие решёток¹

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва,
Н. М. Добровольский

Смирнова Елена Николаевна — Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: helenash@mail.ru

Пихтилькова Ольга Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, Российский технологический университет «МИРЭА» (г. Москва).

e-mail: opikhnikova@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: chev@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

В предыдущей работе авторов заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток. Рассмотрен простейший случай одномерных решёток.

В данной статье рассмотрен общий случай многомерных решёток.

Отметим, что геометрия метрического пространств многомерных решёток гораздо сложнее чем геометрия обычного евклидова пространства. Это видно из парадокса неаддитивности длины отрезка в пространстве сдвинутых одномерных решёток. Из наличия этого парадокса следует, что стоит открытой проблема описания геодезических линий в пространствах многомерных решёток, а так же в нахождении формулы для длины дуг линий в этих пространствах. Естественно, что было бы интересно не только описание этих объектов, но и получения теоретико-числовой интерпретации этих понятий.

Дальнейшим направлением исследованием может быть изучение аналитического продолжения гиперболической дзета-функции на пространствах многомерных решёток. Как известно, аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток построено для произвольной декартовой решётки. Не изучен даже вопрос о непрерывности этих аналитических продолжений в левой полуплоскости на пространстве решёток. Всё это, на наш взгляд, актуальные направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: алгебраические решётки, метрическое пространство решёток.

Библиография: 23 название.

Для цитирования:

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва,
Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие решёток // Чебышевский сборник, 2023. т. 24,
вып. 4, С. 299–310.

¹Работа выполнена по гранту РНФ № 23-21-00317 «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-299-310

Smooth variety of lattices²

E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, A. V. Rodionov, N. M. Dobrovol'skii

Smirnova Elena Nikolaevna — Orenburg State University (Orenburg).*e-mail: helenash@mail.ru***Pikhtilkova Olga Alexandrovna** — candidate of physics and mathematics sciences, docent, Russian technological University "MIREA" (Moscow).*e-mail: opikhtilkova@mail.ru***Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com***Rebrova Irina Yuryevna** — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: i_rebrova@mail.ru***Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: dobrovol@tspu.ru*

Abstract

In the previous work of the authors, the foundations of the theory of smooth manifolds of number-theoretic lattices were laid. The simplest case of one-dimensional lattices was considered.

This article considers the general case of multidimensional lattices.

Note that the geometry of the metric spaces of multidimensional lattices is much more complex than the geometry of ordinary Euclidean space. This is evident from the paradox of the non-additivity of the length of a segment in the space of shifted one-dimensional lattices. From the presence of this paradox it follows that there is an open problem of describing geodesic lines in spaces of multidimensional lattices, as well as in finding a formula for the length of arcs of lines in these spaces. Naturally, it would be interesting not only to describe these objects, but also to obtain a number-theoretic interpretation of these concepts.

A further direction of research could be the study of the analytical continuation of the hyperbolic zeta function on spaces of multidimensional lattices. As is known, the analytical continuation of the hyperbolic zeta function of lattices was constructed for an arbitrary Cartesian lattice. Even the question of the continuity of these analytic continuations in the left half-plane in lattice space has not been studied. All of these, in our opinion, are relevant areas for further research.

Keywords: algebraic lattices, a metric space lattices.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "Smooth variety of lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 299–310.

²The work has been prepared by the RSF grant № 23-21-00317 "Geometry of numbers and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis"

1. Введение

В предыдущей работе авторов [20] заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток. Рассмотрен простейший случай одномерных решёток.

Приведём основные факты из этой работы.

Рассмотрим пространство PR_1 всех одномерных решёток. Нетрудно видеть, что

$$PR_1 = \{\lambda\mathbb{Z} \mid \lambda > 0\},$$

где $\mathbb{Z}$ — фундаментальная одномерная решётка, являющаяся, кроме этого, кольцом целых рациональных чисел. Очевидно, что справедливо равенство $\lambda\mathbb{Z} = -\lambda\mathbb{Z}$ для любого $\lambda \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ множество всех вещественных квадратных матриц порядка 1, а $\mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$ — подмножество невырожденных матриц. Таким образом,

$$\mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) = \{A = (a_{11}) \mid a_{11} \in \mathbb{R}\}, \quad \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R}) = \{A = (a_{11}) \mid a_{11} \in \mathbb{R}, a_{11} \neq 0\}.$$

Если нам дана решётка $M = M(\lambda)$ с базисом (λ) , $\lambda > 0$, то действие линейного преобразования с матрицей $A = (a_{11}) \in \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$ задаётся равенством $A \cdot M = M(|a_{11}|\lambda)$. Для любой одномерной решётки M её группа автоморфизмов конечна $\text{Aut}(M) = \{(1), (-1)\}$.

Говорят, что для произвольного $\mu > 0$ множество $\mathbb{L}_\mu(M)$ решёток Λ является *открытой μ -окрестностью* решётки M , если оно состоит из всех решёток

$$\Lambda = A \cdot M, \tag{1}$$

для которых невырожденная матрица A удовлетворяет соотношению

$$\|A - I\| < \mu. \tag{2}$$

Заметим, что в одномерном случае $I = (1)$ — единичная матрица и матричная норма задана равенством $\|A\| = |a_{11}|$.³

Мы будем рассматривать только окрестности при $0 < \mu < 1$, так как для таких μ все матрицы $A = (a_{11})$ с $\|A - I\| < \mu$ удовлетворяют соотношению $0 < 1 - \mu < a_{11} < 1 + \mu$ и являются невырожденными.

Для произвольной решётки $M = M(\lambda) = \lambda\mathbb{Z}$ с базисом (λ) имеем

$$\mathbb{L}_\mu(M) = \{\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} \mid (1 - \mu)\lambda < \lambda_1 < (1 + \mu)\lambda\}.$$

ЛЕММА 1. *Пересечение двух открытых окрестностей $\mathbb{L}_\mu(M)$ и $\mathbb{L}_\nu(N)$ либо пусто, либо является открытой окрестностью $\mathbb{L}_\kappa(K)$, где $K = M$ и $\kappa = \min(\mu, \nu)$, если $M = N$, и $\kappa = \frac{\lambda(1+\mu) - \lambda_1(1-\nu)}{\lambda(1+\mu) + \lambda_1(1-\nu)}$, $\lambda_2 = \frac{\lambda(1+\mu) + \lambda_1(1-\nu)}{2}$, $K = K(\lambda_2)$, если $\lambda(1 + \mu) > \lambda_1(1 - \nu)$, $M = M(\lambda)$, $N = N(\lambda_1)$ и $\lambda < \lambda_1$.*

ЛЕММА 2. *Любой интервал решёток $(\Lambda(\lambda_1); \Lambda(\lambda_2)) = \{\Lambda(\lambda) \mid \lambda_1 < \lambda < \lambda_2\}$ является открытой μ -окрестностью решётки M при $M = M\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)$, $\mu = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.*

Имеется следующее гомеоморфное отображение $\varphi : \mathbb{L}_\mu(M) \leftrightarrow (\ln((1 - \mu)\lambda); \ln((1 + \mu)\lambda))$ при котором решётке $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1) \in (\ln((1 - \mu)\lambda); \ln((1 + \mu)\lambda))$, а числу $\theta \in (\ln((1 - \mu)\lambda); \ln((1 + \mu)\lambda))$ ставится в соответствие решётка $\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in \mathbb{L}_\mu(M)$.

³Для так определенной матричной нормы справедливы соотношения $\| - A \| = \| A \|$, $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$, $\| A \cdot B \| = \| A \| \cdot \| B \|$.

Произвольным *открытым множеством* $\mathbb{L}$ называется множество, представимое в виде объединения произвольного множества X открытых μ окрестностей

$$\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x). \quad (3)$$

Таким образом, на PR_1 задана структура топологического пространства $T_1 = (PR_1, \tau_1)$, где τ_1 — множество всех открытых множеств $\mathbb{L}$. Топологическое пространство $T_1 = (PR_1, \tau_1)$ имеет счетную базу $\mathbb{B}$, состоящую из всех μ -окрестностей рациональных решёток M с рациональными μ , и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество PQ_1 всех рациональных решёток, т.е. решёток $M = M(\lambda)$ с $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda > 0$.

ЛЕММА 3. *Топология τ_1 инвариантна относительно любого линейного невырожденно-го преобразования A пространства $\mathbb{R}$. Счетная база $\mathbb{B}$ инвариантна только относительно диагональных рациональных преобразований $D(d) = (d)$, $d \in \mathbb{Q}$, $d \neq 0$.*

Как известно (см. [14], стр. 165), множество всех s -мерных решёток PR_s является полным метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)) = \ln(1 + \max(\mu, \nu)), \quad (4)$$

где

$$\mu = \inf_{\Gamma = A \cdot \Lambda} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{\Lambda = B \cdot \Gamma} \|B - I\|.$$

Применительно к PR_1 имеем, если $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$, $\Gamma = \gamma\mathbb{Z}$, то $\Gamma = A \cdot \Lambda$, $A = (\gamma\lambda^{-1})$, $\Lambda = B \cdot \Gamma$, $B = (\gamma^{-1}\lambda)$. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda > \gamma$, тогда $\mu = 1 - \gamma\lambda^{-1}$, $\nu = \gamma^{-1}\lambda - 1$ и $\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(2 - \gamma\lambda^{-1}), \ln(\gamma^{-1}\lambda))$. Положим $\theta = \gamma\lambda^{-1}$, тогда $0 < \theta < 1$ и $2 - \theta < \theta^{-1}$, поэтому $\rho(\Lambda, \Gamma) = \ln(\gamma^{-1}\lambda)$.

Теперь можно записать, как выглядит "симметричный отрезок" решёток длиной 2ρ с центром в $\Lambda(\lambda)$: $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda); \Lambda(e^{\rho}\lambda)]$. Ясно, что когда h пробегает числовой отрезок $[-\rho; \rho]$, то $\Lambda(e^h\lambda)$ пробегает отрезок решёток $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda); \Lambda(e^{\rho}\lambda)]$.

Как известно, для любой решётки Λ её взаимная решётка Λ^* определяется из условия

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \quad (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}.$$

Отсюда следует, что для любой решётки $\Lambda(\lambda) \in PR_1$ справедливо равенство $\Lambda^* = \Lambda(\lambda^{-1})$.

ЛЕММА 4. *Для любой решётки $\Lambda(\lambda) \in PR_1$ справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda, \mathbb{Z}) = \rho(\Lambda^*, \mathbb{Z}). \quad (5)$$

Топологическое пространство PR_1 является хаусдорфовым, так как для любых двух решёток $\Lambda(\lambda_1)$, $\Lambda(\lambda_2)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$ и $\mu = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ открытые μ -окрестности $\mathbb{L}_{\mu}(\Lambda(\lambda_1))$ и $\mathbb{L}_{\mu}(\Lambda(\lambda_2))$ не пересекаются.

Всё пространство одномерных решёток PR_1 гомеоморфно $\mathbb{R}$. Действительно, таким гомеоморфизмом является $\varphi : PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$ при котором решётке $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in \mathbb{R}$, а числу $\theta \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие решётка $\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^{\theta}\mathbb{Z} \in PR_1$. Отсюда следует, что пространство одномерных решёток PR_1 локально евклидово пространство размерности 1.

Согласно Уорнеру (см. [21], стр. 13) пара (U, φ) , где $U = \mathbb{L}_{\mu}(M)$ — открытая μ -окрестность, решётка $M = M(\lambda)$, а φ — гомеоморфное отображение U на интервал $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$

называется системой координат, φ — координатным отображением. Так как $\varphi(M) = 0$, то решётка M является началом данной системы координат.

Согласно Арнольду (см. [1], стр. 205) интервал $(\ln((1 - \mu)\lambda); \ln((1 + \mu)\lambda))$ является картой открытой μ -окрестности $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ и $\varphi(\Lambda)$ изображением решётки $\Lambda \in \mathbb{L}_\mu(M)$ на карте $(\ln((1 - \mu)\lambda); \ln((1 + \mu)\lambda))$.

ЛЕММА 5. Для любых двух открытых пересекающихся μ -окрестностей $U_\nu = \mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu)$ решёток $M_\nu = M_\nu(\lambda_\nu)$ ($\nu = 1, 2$) гомеоморфные отображения φ_ν окрестностей U_ν на интервалы $(\ln((1 - \mu_\nu)\lambda_\nu); \ln((1 + \mu_\nu)\lambda_\nu))$ связаны соотношениями $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\theta) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta) = \theta$ для любого θ из пересечения интервалов $(\lambda_1(1 - \mu_1); \lambda_1(1 + \mu_1)) \cap (\lambda_2(1 - \mu_2); \lambda_2(1 + \mu_2))$.

ЛЕММА 6. Гомеоморфное отображение $\varphi : PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$ при котором решётке $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in \mathbb{R}$, а числу $\theta \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие решётка $\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in PR_1$ переводит произвольное открытое множество $\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)$ в открытое множество

$$\varphi(\mathbb{L}) = \bigcup_{x \in X} (\ln((1 - \mu_x)\lambda_x); \ln((1 + \mu_x)\lambda_x)). \quad (6)$$

Пользуясь указанным соответствием, можно определить понятие производной функции $f(\Lambda)$ на гладком многообразии $\mathcal{M} = PR_1$ следующим образом.

Пусть $M = M(\lambda) \in PR_1$, $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ — открытая μ -окрестность, координатная функция φ для произвольной решетки $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} \in U$ задается равенством $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1\lambda^{-1})$. Так как $\varphi(M) = 0$, то решётка M является началом данной системы координат. Для любого $\theta \in (\ln(1 - \mu); \ln(1 + \mu))$ имеем: $\varphi^{-1}(\theta) = e^\theta \cdot M$. Касательное пространство многообразия $\mathcal{M}$ в точке M будем обозначать через $\mathcal{M}_M$, оно имеет размерность один.

Касательный вектор $\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \right|_M \in \mathcal{M}_M$ зададим равенством

$$\left(\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \right|_M \right) (f) = \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \varphi} \right|_{\varphi(M)} \quad (7)$$

для каждой функции f класса C^∞ в окрестности решётки $M \in \mathcal{M}$. Также будет использоваться обозначение

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|_M = \left(\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \right|_M \right) (f). \quad (8)$$

Целью данной работы является рассмотрение общего случая гладкого многообразия решёток.

На протяжении всей работы через $I = I_s$ будем обозначать единичную квадратную матрицу порядка $s \geq 1$. Значение порядка s каждый раз будет видно из контекста.

2. Топология на пространстве решёток

Пусть $s \geq 2$. Рассмотрим пространство PR_s всевозможных полных вещественных решёток Λ в вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$. Таким образом, произвольная решётка $\Lambda \in PR_s$ имеет базис $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s1}, \dots, \lambda_{ss})$, где вектора $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ образуют линейно независимую систему векторов. Обозначим через $A(\Lambda)$ базисную матрицу решётки Λ :

$$A(\Lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix},$$

тогда любая решётка Λ с базисной матрицей $A(\Lambda)$ получается из фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ с помощью линейного преобразования с матрицей $A(\Lambda)$:

$$\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s) = (m_1, \dots, m_s) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix} \in \Lambda, \quad \vec{m} = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s.$$

Хорошо известно, что фундаментальная решётка $\mathbb{Z}^s$ имеет при $s \geq 2$ бесконечно много различных базисов, задаваемых базисными матрицами M из расширенной специальной линейной группы целочисленных матриц порядка s : $SL_s^*(\mathbb{Z})$. Расширенная специальная линейная группа целочисленных матриц порядка s состоит из всех целочисленных матриц M порядка s с $\det M = \pm 1$. Отсюда следует, что все базисные матрицы решётки Λ выражаются через любую базисную матрицу $A(\Lambda)$ и матрицу перехода $M \in SL_s^*(\mathbb{Z})$ по формулам $A_1(\Lambda) = M \cdot A(\Lambda)$.

Будем говорить, что для произвольного $\mu > 0$, $\mu < 1$ множество $\mathbb{L}_\mu(M)$ решёток $\Lambda \in PR_s$ является *открытой μ -окрестностью* решётки $M \in PR_s$, если оно состоит из всех решёток

$$\Lambda = M \cdot B, \quad (9)$$

для которых невырожденная матрица B удовлетворяет соотношению⁴

$$\|B - I_s\| < \mu. \quad (10)$$

Условие $\mu < 1$ гарантирует, что все матрицы B с условием (10) будут невырожденные (см. [14], стр. 158).

Нам потребуется величина $M(\Lambda)$, которая задается равенством

$$M(\Lambda) = \min_{\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A} \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

и по аналогии с мерой обусловленности систем линейных уравнений называется мерой обусловленности решётки. В силу дискретности расширенной специальной линейной группы $SL_s^*(\mathbb{Z})$ целочисленных матриц порядка s существует матрица $A(\Lambda)$ такая, что $\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda)$ и $M(\Lambda) = \|A(\Lambda)\| \cdot \|A^{-1}(\Lambda)\|$ (см. [7]). Из равенства $I_s = A \cdot A^{-1}$ и неравенства $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ следует, что всегда $M(\Lambda) \geq s$.

Пусть $M_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$ — множество всех вещественных квадратных матриц B порядка s с нормой $\|B\| < \varepsilon$ и при $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ через $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ обозначим множество всех вещественных матриц $B, B^* \in M_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$, где $B^* = (I_s + B)^{-1} - I_s$. Согласно лемме 1 из монографии [14] (см. стр. 158) имеем $\|B^*\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Отсюда следует, что $M_{s,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}(\mathbb{R}) \subseteq M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda)}$ и отображение ψ_Λ задано на $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ по правилу

$$\psi_\Lambda(B) = \Lambda \cdot (I_s + B), \quad B \in M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R}),$$

тогда $\psi_\Lambda(B)$ — взаимнооднозначное отображение $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ на $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon))$, где

$$U(\Lambda, \delta) = \{\Gamma \in PR_s \mid \rho(\Lambda, \Gamma) \leq \delta\},$$

где метрика $\rho(\cdot, \cdot)$ задана равенством (4), и для любого $B \in M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\rho(\Lambda, \psi_\Lambda(B)) = \max(\ln(1 + \|B\|), \ln(1 + \|B^*\|)).$$

⁴Матричная норма для s -мерной матрицы $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq s}$ задается равенством $\|B\| = s \cdot \max_{1 \leq i,j \leq s} |b_{ij}|$.

Доказательство. См. [7], теорема 19, стр.68. $\square$

Очевидно, что $M_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$ и $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ являются открытыми множествами в s^2 -мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^{s^2}$, которое имеет естественную структуру евклидова пространства.

Рассмотрим множество $\mathfrak{P}_s$ всевозможных открытых μ -окрестностей всевозможных полных решёток $M \in PR_s$ с условием $\mu \leq \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda)}$. Так как, очевидно, что $\mathfrak{P}_s$ покрывает всё пространство s -мерных полных решёток PR_s , то множество $\mathfrak{P}_s$ можно рассматривать как предбазу топологии $\mathfrak{T}_s$ на всём пространстве PR_s . А именно, если множество $\mathfrak{B}_s$ получено из $\mathfrak{P}_s$ добавлением произвольных конечных пересечений его элементов, то $\mathfrak{B}_s$ будет базой топологии $\mathfrak{T}_s$, в которой всякое открытое множество $U \in \mathfrak{T}_s$ представимо как объединение открытых μ -окрестностей: существует некоторое множество A элементов из $\mathfrak{B}_s$ такое, что

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathfrak{B}_s : U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Таким образом, на PR_s задана структура топологического пространства $T_s = (PR_s, \mathfrak{T}_s)$, где $\mathfrak{T}_s$ — множество всех открытых множеств $\mathbb{L}$. Топологическое пространство $T_s = (PR_s, \mathfrak{T}_s)$ имеет счетную базу $\mathbb{B}$, состоящую из всех μ -окрестностей рациональных решёток M с рациональными μ , и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество PQ_s всех рациональных решёток, т.е. решёток M с рациональной базисной матрицей $A(M)$.

Из предыдущего следует, что хаусдорфово топологическое пространство $T_s = (PR_s, \mathfrak{T}_s)$ является локально евклидовым пространством размерности s^2 .

3. Дифференцируемая структура на локально евклидовом пространстве PR_s

Рассмотрим произвольную полную решётку $\Lambda \in PR_s$ и открытое множество решёток $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda))$, где $\varepsilon_\Lambda = \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda)}$. Взаимнооднозначное отображение $\psi_\Lambda(B) = \Lambda \cdot (I_s + B)$ переводит $M_{s,\varepsilon_\Lambda}^*(\mathbb{R})$ в $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda))$, а обратное отображение $\psi_\Lambda^{-1}(\Gamma) = A^{-1}(\Lambda)A(\Gamma) - I_s$ переводит $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda))$ в $M_{s,\varepsilon_\Lambda}^*(\mathbb{R})$. Согласно терминологии из монографии [21] (см. стр. 13) $\psi_\Lambda^{-1}(\Gamma)$ — координатное отображение, функции $x_i = r_i \circ \psi_\Lambda^{-1}$ — координатные функции, пара $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)), \psi_\Lambda^{-1}$ (обозначаемую через $(U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)), x_1, \dots, x_{s^2})$) — система координат. Нетрудно видеть, что началом данной системы координат является решётка Λ .

Мы имеем очевидное равенство

$$\bigcup_{\Lambda \in PR_s} U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) = PR_s.$$

Рассмотрим $\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma$.

Так как $\psi_\Lambda^{-1} : U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \mapsto M_{s,\varepsilon_\Lambda}^*(\mathbb{R})$, а $\psi_\Gamma : M_{s,\varepsilon_\Gamma}^*(\mathbb{R}) \mapsto U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma))$, то

$$\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma : \psi_\Gamma^{-1} \left(U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)) \right) \mapsto M_{s,\varepsilon_\Lambda}^*(\mathbb{R}).$$

Из определения множеств $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda))$ и $U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma))$ следует, что

$$U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)) = \{\Delta \in PR_s \mid \rho(\Lambda, \Delta) \leq \ln(1 + \varepsilon_\Lambda), \rho(\Gamma, \Delta) \leq \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)\}.$$

Таким образом, если

$$\Delta \in U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)),$$

то $\Delta = \Gamma \cdot B = \Lambda \cdot D$, $\Gamma = \Delta \cdot B_1$, $\Lambda = \Delta \cdot D_1$ и $\max(\|B - I_s\|, \|B_1 - I_s\|) \leq \varepsilon_\Gamma$, $\max(\|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\|) \leq \varepsilon_\Delta$. Отсюда следует, что $B = I_s + C$, $B_1 = I_s + C_1$, $B \cdot B_1 \in SL_s^*(\mathbb{Z})$, $\|B \cdot B_1\| = \|I_s + C + C_1 + C \cdot C_1\|$, $\|C + C_1 + C \cdot C_1\| \leq 2\varepsilon_\Gamma + \varepsilon_\Gamma^2 \leq \frac{5}{4}$. Матрица $C + C_1 + C \cdot C_1$ — целочисленная, поэтому, если она ненулевая, то $\|C + C_1 + C \cdot C_1\| \geq s \geq 2$, что приводит к противоречию. Следовательно $B_1 = B^{-1}$. Аналогично получим, что $D_1 = D^{-1}$. Отсюда вытекает, что $\Gamma = \Lambda \cdot D \cdot B_1$, $\Lambda = \Gamma \cdot B \cdot D_1$ и

$$\begin{aligned} & U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)) = \\ & = \{\Delta = \Gamma \cdot B = \Lambda \cdot D \mid \|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\| \leq \varepsilon_\Lambda, \|B - I_s\|, \|B_1 - I_s\| \leq \varepsilon_\Gamma\}. \end{aligned}$$

Применяя ψ_Γ^{-1} к $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma))$ получим

$$\begin{aligned} & \psi_\Gamma^{-1} \left(U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)) \right) = \\ & = \{A^{-1}(\Gamma)A(\Gamma \cdot B) - I_s \mid \Gamma \cdot B = \Lambda \cdot D, \|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\| \leq \varepsilon_\Lambda, \|B - I_s\|, \|B_1 - I_s\| \leq \varepsilon_\Gamma\}. \end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned} \psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma(A^{-1}(\Gamma)A(\Gamma \cdot B) - I_s) &= \psi_\Lambda^{-1}(\Gamma \cdot A^{-1}(\Gamma)A(\Gamma \cdot B)) = \psi_\Lambda^{-1}(\mathbb{Z}^s \cdot A(\Gamma \cdot B)) = \\ &= \psi_\Lambda^{-1}(\mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda \cdot D)) = \psi_\Lambda^{-1}(\Lambda \cdot D) = A^{-1}(\Lambda)A(\Lambda \cdot D) - I_s. \end{aligned}$$

Для матриц D из малой окрестности единичной матрицей I_s введём обозначение $\varepsilon(D)$, где $\varepsilon(D) = \max(\|D - I_s\|, \|D^{-1} - I_s\|) = \max(\|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\|)$.

ЛЕММА 7. Пусть $\varepsilon(D) \leq \varepsilon_\Lambda$, тогда справедливо неравенство

$$|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)| \leq (2\varepsilon(D) + \varepsilon(D)^2) \min(M(\Lambda \cdot D), M(\Lambda)) \leq \frac{13}{18}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению матрицы $A(\Lambda)$ она удовлетворяет соотношениям $\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda)$ и $M(\Lambda) = \min_{\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A} \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \|A(\Lambda)\| \cdot \|A^{-1}(\Lambda)\|$. Аналогично, имеем $\Lambda \cdot D = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda \cdot D)$, $M(\Lambda \cdot D) = \min_{\Lambda \cdot D = \mathbb{Z}^s \cdot A \cdot D} \|A \cdot D\| \cdot \|(A \cdot D)^{-1}\| = \|A(\Lambda \cdot D)\| \cdot \|A^{-1}(\Lambda \cdot D)\|$.

Для любой невырожденной матрицы A имеем:

$$\begin{aligned} \|A \cdot D\| &= \|A + A \cdot (D - I_s)\| \leq \|A\| \cdot (1 + \varepsilon(D)), \\ \|(A \cdot D)^{-1}\| &= \|D_1 \cdot A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot (1 + \varepsilon(D)), \\ \|A\| &= \|A \cdot D - A \cdot D \cdot (I_s - D_1)\| \leq \|A \cdot D\| \cdot (1 + \varepsilon(D)), \\ \|A^{-1}\| &= \|D_1 \cdot A^{-1} + (D - I_s) \cdot (A \cdot D)^{-1}\| \leq \|(A \cdot D)^{-1}\| \cdot (1 + \varepsilon(D)). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$M(\Lambda \cdot D) \leq \|A(\Lambda) \cdot D\| \cdot \|D_1 \cdot A^{-1}(\Lambda)\| \leq M(\Lambda) \cdot (1 + \varepsilon(D))^2.$$

Аналогично, имеем

$$M(\Lambda) \leq \|A(\Lambda \cdot D) \cdot D_1\| \cdot \|D \cdot A^{-1}(\Lambda \cdot D)\| \leq M(\Lambda \cdot D) \cdot (1 + \varepsilon(D))^2.$$

Отсюда следует, что

$$|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)| \leq (2\varepsilon(D) + \varepsilon(D)^2) \min(M(\Lambda \cdot D), M(\Lambda)).$$

Так как $\varepsilon(D) \leq \varepsilon_\Lambda = \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda)}$, то

$$|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)| \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{9 \cdot M(\Lambda)} \leq \frac{13}{18}.$$

Таким образом, неравенство для $|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)|$ доказано. $\square$

Из доказанной леммы мы получаем равенство $\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma(B - I_s) = D - I_s$ и матрицы B и D связаны равенством $B = A^{-1}(\Gamma)A(\Lambda)D$. Так как матрицы B и D связаны линейным соотношением, то отображение $\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma$ — бесконечно дифференцируемое и тем самым задано гладкое многообразие s -мерных решёток (см. [21], стр. 14).

4. Об основных функциях на решётках

К числу основных функций на решётках мы относим детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, меру обусловленности решётки, гиперболическую дзета-функцию решётки.

Непрерывность детерминанта решётки очевидна и следует из равенства $\det \Lambda = |\det A(\Lambda)|$. Непрерывность гиперболического параметра решётки на метрическом пространстве решёток доказана в работе [22].

Непрерывность меры обусловленности решётки следует из леммы 7.

Непрерывность гиперболической дзета-функции решётки в правой полуплоскости $\sigma > 1$ доказана в работе [10].

Вопрос об их дифференцируемости мы рассмотрим в последующих статьях.

5. Заключение

В данной работе построено гладкое многообразие решёток. Для построения гладкого многообразия сдвинутых решёток потребуются дополнительные технические приемы. Этому вопросу будет посвящена отдельная работа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука. 1975. — 240 с.
2. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.
3. Н. М. Добровольский Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6089–84.
4. Н. М. Добровольский О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6091–84.
5. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
6. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения к приближенному анализу // Сб. IV Международная конференция „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова. Тула, 10—15 сентября, 2001 Актуальные проблемы Ч. I. М. МГУ, 2002. С. 54—80.
7. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

8. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова. О гиперболической дзета-функции Гурвица, Чебышевский сб., 2016, том 17, вып. 3, С. 72–105.
9. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.
10. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 4. 1998. С. 522–526.
11. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб.тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.
12. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 1996. С. 77 — 87.
13. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.
14. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. — 420 с.
15. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 3, с. 215–222.
16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
17. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
18. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.
19. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 326–338.
20. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных решёток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 165–185.
21. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и группы Ли. — М.: Мир, 1987. — 304 с.
22. Т. С. Шмелева. Непрерывность гиперболического параметра решеток // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 92–99.
23. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Arnold V. I., 1975, “Ordinary differential equations”, *M.: Science*, 240 p.
2. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, “The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.
3. Dobrovol'skii, N. M. 1984, “Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids”, *Dep. v VINITI*, no. 6089–84.
4. Dobrovol'skii, N. M. 1984, “On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$ ”, *Dep. v VINITI*, no. 6091–84.
5. Dobrovolskiy N. M. Hyperbolic zeta function of lattices. Dep. in VINITI 08.24.84, no. 6090–84.
6. Dobrovolsky N. M. 2001, “Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications to approximate analysis”, *Sb. IV International conference „Modern problems of number theory and its applications “dedicated to the 180-th anniversary of P. L. Chebyshev and 110-th anniversary of I. M. Vinogradov.* Tula, 10 — 15 September, *Actual problems Ch. I. M. MGU*. pp. 54–80.
7. Dobrovol'skii, N. M. 2005, “Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i ikh prilozheniya [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications]”, *Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni L. N. Tolstogo*, Tula, Russia.
8. N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, V. N. Soboleva, D. K. Sobolev, L. P. Dobrovol'skaya, O. E. Bocharova, 2016, “On hyperbolic Hurwitz zeta function”, *Chebyshevskii sbornik*, vol 17, no. 3, pp. 72–105.
9. Dobrovol'skii N.M., Manokhin E.V., Rebrova I. Yu., Roshchenya A.L., 2001, “On the continuity of the zeta function of a grid with weights”, *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 7, no. 1, pp. 82–86.
10. Dobrovol'skij, N.M., Rebrova, I.YU. & Roshhenya, A.L. 1998, “Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices”, *Matematicheskie zametki* (Mathematical Notes), vol. 63, no. 4, pp. 522–526.
11. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, “Number of lattice points in the hyperbolic cross”, *Math. Notes*, 63:3 (1998), 319–324.
12. Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., 1995, “On the number of points of a lattice in a hyperbolic cross”, *Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Collected tez. report II Int. conf. Voronezh*, p. 53.
13. Dobrovol'skii N. M., Roshchenya A. L., 1996, “On the continuity of the hyperbolic zeta-function of lattices”, *Izv. Toole. state un-that. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science*. Vol. 2. Iss. 1. Tula: Publishing house of Tula State University, p. 77–87.
14. Kassels, D. 1965, “Vvedenie v geometriyu chisel [Introduction to the geometry of numbers]”, *Mir, Moscow*, Russia.
15. A. N. Kormacheva, 2020, “Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices – II”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 215–222.

16. Korobov, N.M. 1963, “Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]”, *Fizmat-giz, Moscow*, Russia.
17. Korobov, N.M. 2004, “Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]”, 2nd ed, *MTSNMO, Moscow*, Russia.
18. Rebrova, I. YU. 1998, “The continuity of the generalized hyperbolic zeta lattice function and its analytic continuation”, *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 99–108.
19. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky., 2017, “Algebraic lattices in the metric space of lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, no. 4, p. 326–338.
20. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2020, “Smooth manifold of one-dimensional lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 165–185.
21. Warner F. 1987, “Foundations of the theory of smooth manifolds and Lie groups”, *M. : Mir*, 304 p.
22. Shmeleva, T. S., 2009, “Continuity of the hyperbolic parameter of lattices”, *Izvestiya Tula State University. Natural sciences*, Iss. 3. pp. 92–99.
23. L. P. Dobrovol'skaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky, 2014, “On Hyperbolic Zeta Function of Lattices”. In: *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*. Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено: 20.09.2023

Принято в печать: 11.12.2023