ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 4.

УДК 511. 344 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-264-298

Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми

З. Х. Рахмонов, И. Аллаков, Б. Х. Абраев

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, директор Института математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zrahmonov@mitas.tj, zarullo-r@rambler.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, Термезский государственный университет (Узбекистан, г. Термез).
e-mail: iallakov@mail.ru

Абраев Бахром Холтораевич — Термезский государственный университет (Узбекистан, г.Термез).
e-mail: babrayev@mail.ru

Аннотация

Получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального N в виде $b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N$ с условиями

$$\left|b_ip_i - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}, \qquad b_i \leqslant (\ln N)^{B_i},$$

где b_1, b_2 b_3, N – попарно взаимно простые натуральные числа, B_i — произвольные фиксированные положительные числа.

Ключевые слова: тернарная проблема Гольдбаха, почти равные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, малая окрестность центров больших дуг.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

З. Х. Рахмонов, И. Аллаков, Б. Х. Абраев. Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми // Чебышёвский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 264–298.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 511. 344 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-264-298

Generalization of Goldbach's ternary problem with almost equal terms

Z. Kh. Rakhmonov, I. Allakov, B. Kh. Abraev

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, director of the A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
Allakov Ismail — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Termez State University (Uzbekistan, Termez).
e-mail: iallakov@mail.ru
Abraev Bahrom Kholtoraevich — Termez State University (Uzbekistan, Termez).
e-mail: babrayev@mail.ru

Abstract

An asymptotic formula is obtained for the number of representations of a sufficiently large natural N in the form $b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N$ with the conditions

$$\left|b_ip_i - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}(\ln N)^{60}, \qquad b_i \leqslant (\ln N)^{B_i},$$

where b_1, b_2 b_3, N are pairwise coprime natural numbers, B_i — arbitrary fixed positive numbers

Keywords: ternary Goldbach problem, almost equal terms, short exponential sum with primes, small neighborhood of centers of major arcs.

Bibliography: 30 titles.

For citation:
Z. Kh. Rakhmonov, I. Allakov, B. Kh. Abraev, 2023, "Generalization of Goldbach's ternary problem with almost equal terms", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 264–298.

1. Введение

И.М. Виноградов [1, 2] в 1937 году построил метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляют решето Виноградова и метод сглаживания двойных сумм. В частности, он впервые получил оценку линейной тригонометрической суммы с простыми числами, то есть при $k = 1$ нетривиальную оценку сумму вида

$$S_k(\alpha, x) = \sum_{m \leqslant x} \Lambda(m)e(\alpha m^k),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^b)$, $\mathscr{L}_x = \ln x$ и ему удалось вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечётного N в виде суммы трёх простых чисел, что является решением тернарной проблемы Гольдбаха.

Короткую линейную тригонометрическую сумму с простыми числами вида $S_1(\alpha; x, y)$ впервые начал исследовать И.М. Виноградов [1]. Он, воспользовавшись своим методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами, получил нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при условии $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

К.В. Хазелгров [3] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$ получил нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^b)$ и асимптотическую формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ при

$$y \geqslant x^{\theta}, \qquad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon.$$

Пользуясь этими результатами, ему удалось решить тернарную задачу Гольдбаха с почти равными слагаемыми, конкретно для количества решений диофантова уравнения вида

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \qquad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\theta}, \tag{1}$$

нашёл асимптотическую формулу.

Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [4] на базе метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова и новых теорем о плотности нулей L-рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы разработали новый метод, с помощью которого доказали для суммы вида $S(\alpha; x, y)$ нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^b)$ и формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ при условии

$$y \geqslant x^{\theta}, \qquad \theta = \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

В 1991 г. Т. Жан [5], используя метод Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо и оценку М. Ютилы [6] о четвёртом моменте L-функций Дирихле, заменил показатель θ на

$$\frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Наилучший результат в этой задаче принадлежит Ж. Чаохуа [7]. Он доказал, что диофантово уравнение (1) разрешимо с показателем

$$\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon.$$

A. Baker [8] доказал: *если λ_1, λ_2, λ_3 — ненулевые действительные числа, не одного знака, причём хотя бы одно из отношений λ_i/λ_j иррационально, тогда для любого натурального n существует бесконечно много простых чисел p_1, p_2, p_3, удовлетворяющих неравенству*

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3| \leqslant (\ln p)^{-n}, \qquad p = \max(p_1, p_2, p_3).$$

В процессе доказательства этого результата он воспользовавшись круговым методом и поведением линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$\S_1(b_i\alpha, N) = \sum_{p \leqslant N} e(b_i \alpha p),$$

как в больших так и в малых дугах, при выполнении определенных условий исследовал разрешимость уравнения

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N, \tag{2}$$

в простых числах p_1, p_2, p_3, где b_1, b_2, b_3 и N — целые числа (см. также [9]).

Основным результатом этой работы является теорема 1 об асимптотической формуле для количества решений диофантова уравнения (2) при условии, что слагаемые $b_i p_i$ почти равны, а коэффициенты b_1, b_2, b_3 не превосходят произвольной фиксированной положительной степени логарифма от числа N.

Теорема 1. *Пусть b_1, b_2 b_3, N — попарно взаимно простые натуральные числа, $N > N_0$, B_1, B_2, B_3 — произвольные фиксированные положительные числа, $b_i \leqslant (\ln N)^{B_i}$, $I(N,H)$ — число решений диофантова уравнения*

$$b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N, \qquad \left|b_ip_i - \frac{N}{3}\right| \leqslant H,$$

в простых числах p_1, p_2 и p_3. Тогда при $H \geqslant (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(N,H) = \frac{3\mathfrak{S}G(b_1,b_2,b_3,N)\ H^2}{b_1b_2b_3\ (\ln N)^3} + O\left(\frac{H^2 \ln\ln N}{b_1b_2b_3(\ln N)^4}\right),$$
$$\mathfrak{S}G(b_1,b_2,b_3,N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|b_1b_2b_3N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right).$$

С помощью кругового метода Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова для аддитивных задач с почти равными слагаемыми и почти пропорциональными слагаемыми [10, 11, 12, 13, 14] доказательство теорема 1 сведено к трём следующим задачам:

- вывод асимптотической формулы для коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида
$$S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n) e(b\alpha n),$$
в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^{c_1})$;
- нахождение нетривиальных оценок сумм $S_1(b\alpha; x, y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^{c_1})$, кроме малых окрестностей их центров;
- получение нетривиальных оценок сумм $S_1(b\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^{c_1})$.

Эти задачи решены в теоремах 2 и 3.

Теорема 2. *Пусть $x \geqslant x_0$, A, B, c_1 и c_2 — абсолютные постоянные числа, $c_2 \leqslant c_1$, b — натуральное число, $b \leqslant \mathscr{L}_x^B$,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad (a,q) = 1, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \qquad 1 \leqslant q \leqslant h, \qquad h = \mathscr{L}_x^{c_1}, \qquad \tau = \frac{y^2}{x\mathscr{L}_x^{c_2}}.$$

Тогда при $y \geqslant x^{\frac{5}{8}} bh \mathscr{L}_x^{2{,}25A+81}$ справедливо равенство

$$S_1(b\alpha; x, y) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(b,q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b,q)}\right)} \frac{\mathfrak{S}n\pi b\lambda y}{\pi b\lambda} e\left(b\lambda\left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\left(y\mathscr{L}_x^{-A}\right).$$

Теорема 2 доказывается методом работы [16], где, воспользовавшись вторым моментом L-функций Дирихле на критической прямой для суммы

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n) e(\alpha n^k)$$

в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$, $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}_x^{-b_1}$, за исключением малой окрестности их центров $|\alpha - \frac{a}{q}| > \left(2\pi k^2x^{k-2}y^2\right)^{-1}$, при $y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}_x^{c_k}$,

$$\eta_k = \frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}, \qquad c_k = \frac{2A+22+\left(\frac{2\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}}-1\right)b_1}{2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}-(2k-3)},$$

получена нетривиальная оценка вида

$$S_k(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^A},$$

где A, b_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, а в малой окрестности центров больших дуг доказана асимптотическая формула (см. также [10, 13]).

Теорема 3. *Пусть $x \geqslant x_0$, A — абсолютная постоянная, $y \geqslant bx^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_x^{\frac{8}{3}A+52}$, b — натуральное число,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \qquad b\mathscr{L}_x^{4A+82} < q \leqslant \frac{y^2}{x}\mathscr{L}_x^{-4A-82}, \qquad |\theta| \leqslant 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^A}.$$

Теорема 3 доказывается методом работы [17], где нетривиальная оценка суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^{32(A+20)})$ при $y \geqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}_x^{8A+151}$ и $\tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}_x^{-32(A+20)}$ получена методом оценок сумм с простыми числами И. М. Виноградова в сочетании с методами работ [18, 19, 20, 21]. Основными утверждениями, позволившими получить оценку $S_1(b\alpha; x, y)$, являются нетривиальные оценки двойных сумм на малых дугах, соответственно имеющих “длинную” сплошную сумму и, имеющих близкие по порядку суммы, составляющие двойную сумму.

Обозначения. $N > N_0$ – натуральное число, ε — произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001, $ord_p(n)$ — наибольшая степень простого числа p, делящего целое число n, то есть $p^{ord_p(n)}\|n$; $\mathscr{L}_x = \ln x$,

$$S(a,q) = \sum_{m=1}^{q} e\left(\frac{am^n}{q}\right), \qquad \gamma_n(\lambda; x, y) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2} + yu\right)^n\right)du.$$

2. Вспомагательные леммы

Лемма 1. [22]. *Пусть χ_q — примитивный характер по модулю q. Тогда*

$$\tau(\bar\chi_q)\chi_q(n) = \sum_{m=1}^{q}\bar\chi_q(m)e\left(\frac{mn}{q}\right),$$

где

$$\tau(\chi_q) = \sum_{m=1}^{q}\chi_q(m)e\left(\frac{m}{q}\right), \qquad |\tau(\chi_q)| = \sqrt{q}.$$

Лемма 2. [23]. *Пусть $2 \leqslant T_0 \leqslant x$, $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули функции $L(s,\chi)$. Тогда*

$$\psi(x,\chi) = E_0x - \sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{x^\rho}{\rho} + R(x, T_0, \chi), \quad R(x, T_0, \chi) \ll \frac{x\mathscr{L}_x^2}{T_0},$$

где $E_0 = 1$, если $\chi = \chi_0$; $E_0 = 0$, если $\chi \neq \chi_0$.

Лемма 3. [22]. *Для любого $\varepsilon>0$ существует $c=c(\varepsilon)$ такое, что если χ_1 — действительный характер по модулю q и β_1 — действительный нуль $L(s,\chi_1)$, то*

$$\beta_1 \leqslant 1-\frac{c(\varepsilon)}{q^{\varepsilon}}.$$

Лемма 4. [24]. *Пусть действительная функция — $f(u)$, и монотонная функция — $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f'(u)|\geqslant m_1>$ и $|g(u)|\leqslant M$. Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{m_1}.$$

Лемма 5. [25]. *При подходящем $c>0$ функция $L(s,\chi)$, $s=\mathfrak{S}gma+it$ не имеет нулей в области*

$$\mathfrak{S}gma \geqslant 1-\delta(q,t), \quad \delta(q,t)=\frac{c}{\max(\ln q, \ln^{3/4}(|t|+3)\ln^{3/4}\ln(|t|+3))},$$

для всех характеров χ по $\mathrm{mod} q$, за исключением, быть может простого действительного нуля β_1 у L–функции, определенной исключительным характером χ_1.

Лемма 6. *Пусть ε сколь угодна малая положительная постоянная, A — произвольное фиксированное положительные число, $T^{\frac{7}{22}+\varepsilon}\leqslant H\leqslant T$ и $q\leqslant \ln^A T$, тогда справедливы оценки*

$$\sum_{\chi \,\mathrm{mod} q}(N(u,T+H,\chi)-N(u,T,\chi)) \ll (qH)^{c(1-u)}(\ln qH)^{33},$$

где $c=2,4$, если $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2}{3}$ или $\frac{5}{6}\leqslant\alpha\leqslant 1$; и $c=\frac{8}{3}$, если $\frac{2}{3}<\alpha<\frac{5}{6}$.

Эта лемма доказывается методом работы [26]

Лемма 7. [27]. *При $x\geqslant 2$ имеем*

$$\sum_{n\leqslant x}\tau_r^k(n) \ll x\left(\ln x\right)^{r^k-1}, \qquad k=1,2.$$

Лемма 8. [28] *При вещественном α, подчинённом условиям*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1, \quad 1\leqslant q\leqslant N, \quad |\theta|\leqslant 1,$$

а) для суммы

$$V_g=\sum_{z=g}^{g+q'}\min\left(U,\frac{1}{\|\alpha z\|}\right), \qquad q'<q, \qquad U>0$$

имеем неравенство

$$V_g \ll U+q\ln q,$$

б) а для суммы

$$V=\sum_{0<z\leqslant 0,5q}\frac{1}{\|\alpha z\|}$$

имеем неравенство

$$V\ll q\ln q.$$

Лемма 9. [18]. *Пусть $f(n)$ — произвольная комплекснозначная функция, $u_1 \leqslant x$, $r \geqslant 1$,*

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}, \quad \lambda(n) = \sum_{d \backslash n,\, d \leqslant u_1} \mu(n).$$

Тогда имеет место тождество:

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) f(n) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} C_r^k \sum_{m_1 \leqslant u_1} \mu(m_1) \cdots \sum_{\substack{m_k \leqslant u_1 \\ m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \leqslant x}} \mu(m_k) \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_k} \ln n_1 f(m_1 n_1 \cdots m_k m_k) +$$
$$+ (-1)^r \sum_{n_1 \geqslant u_1} \lambda(n_1) \cdots \sum_{\substack{n_r \geqslant u_1 \\ m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \leqslant x}} \lambda(n_r) \sum_m \Lambda(m) f(n_1 \cdots n_r m).$$

Лемма 10. [29]. *Пусть $y \geqslant x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$, тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\pi(x) - \pi(x-y) = \frac{y}{\ln x} + O\left(\frac{y}{\ln^2 x}\right).$$

3. Поведение специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах

В этом пункте докажем теорему 2 о поведении тригонометрической суммы

$$S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n) e(b\alpha n),$$

в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^{c_1})$, $\tau = y^2 x^{-1} \mathscr{L}_x^{-c_2}$, где c_1, c_2 — произвольные фиксированные положительные числа.

3.1. Доказательство теоремы 2

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$y = x^{\frac{5}{8}} bh \mathscr{L}_x^{2,25A+81}. \tag{3}$$

Для удобства с помощью обозначений $q_1 = \dfrac{q}{(b,q)}$ и $b_1 = \dfrac{b}{(b,q)}$ чисел q и b представим в виде

$$b = b_1(b,q), \qquad q = q_1(b,q), \qquad 1 \leqslant q_1 \leqslant q, \qquad (b_1, q_1) = 1.$$

Пользуясь свойством ортогональности характеров, затем леммой 1, находим

$$S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{k=1}^{q_1} e\left(\frac{ab_1k}{q_1}\right) \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n) e(b\lambda n) \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} \overline{\chi}(k)\chi(n) + O(\mathscr{L}_x^2) =$$
$$= \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} \sum_{k=1}^{q_1} \overline{\chi}(k) e\left(\frac{ab_1k}{q_1}\right) \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)\chi(n) e(b\lambda n) + O(\mathscr{L}_x^2) =$$
$$= \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} \chi(ab_1)\tau(\overline{\chi}) \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)\chi(n) e(b\lambda n) + O(\mathscr{L}_x^2) \tag{4}$$

Применяя преобразование Абеля в интегральной форме, имеем:

$$\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)=-\int_{x-y}^{x}\psi(u,\chi)de(b\lambda u)+e(b\lambda x)\psi(x,\chi)-e(b\lambda(x-y))\psi(x-y,\chi).$$

Пользуясь леммой 2 при $T_0=\left(xy^{-1}+|b\lambda|x\right)q_1^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{A+3}$, найдём

$$\begin{aligned}\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)=&-\int_{x-y}^{x}\left(E_0u-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{u^\rho}{\rho}\right)de(b\lambda u)+\\&+e(b\lambda x)\left(E_0x-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{x^\rho}{\rho}\right)-e(b\lambda(x-y))\left(E_0(x-y)-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{(x-y)^\rho}{\rho}\right)\\&-\int_{x-y}^{x}R(u,T_0)2\pi ib\lambda e(b\lambda u)du+e(b\lambda x)R(x,T_0)-e(b\lambda(x-y))R(x-y,T_0).\end{aligned}$$

Применяя к первому интегралу формулу интегрирования по частям и, пользуясь оценкой для $R(u,T_0)$ из леммы 2, находим

$$\begin{aligned}\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)=&E_0\int_{x-y}^{x}e(b\lambda u)du-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\int_{x-y}^{x}\frac{u^{\rho-1}}{\rho}e(b\lambda u)du+O\left(\frac{y}{q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{A+1}}\right)=\\=&E_0\frac{\mathfrak{S}n\pi b\lambda y}{\pi b\lambda}e\left(b\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}I(\rho,b\lambda)+O\left(\frac{y}{q_1^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{A+1}}\right),\\I(\rho,b\lambda)=&\int_{x-y}^{x}u^{\beta-1}e\left(b\lambda u+\frac{\gamma}{2\pi}\ln u\right)du.\end{aligned}$$

Отсюда и из (4) для $S_1(b\alpha;x,y)$, найдём следующее выражение:

$$S_1(b\alpha;x,y)=\frac{\mu(q_1)}{\varphi(q_1)}\frac{\mathfrak{S}n\pi b\lambda y}{\pi b\lambda}e\left(b\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)-W(b\alpha;x,y)-E_1W_1(b\alpha;x,y)+O(y\mathscr{L}_x^{-A}),\tag{5}$$

$$W(b\alpha;x,y)=\frac{1}{\varphi(q_1)}\sum_{\chi\bmod q_1}\chi(ab_1)\tau(\overline{\chi})\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0\\ \rho\neq\beta_1}}I(\rho,b\lambda),$$

$$W_1(b\alpha;x,y)=\frac{\chi_1(ab)\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)}I(\beta_1,b\lambda),$$

где $E_1=1$, если по модулю q_1 существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s,\chi_1)$ имеет действительный нуль β_1,

$$\beta_1\geqslant 1-\frac{c}{\ln q},$$

и $E_1=0$ в противном случае.

3.2. Оценка $|W_1(b\alpha;x,y)|$

Воспользовавшись тривиальными оценками суммы $\tau(\chi_1)$ и интеграла $I(\beta_1,\lambda)$, найдём

$$|W_1(b\alpha;x,y)|=\left|\frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)}\int_{x-y}^{x}\frac{u^{\beta_1-1}}{\beta_1}e(b\lambda u)du\right|\ll yx^{\beta_1-1}.$$

Согласно лемме 3, имея в виду, что $q_1 < q \leqslant \mathscr{L}_x^{c_1}$, при $\varepsilon = (2c_1)^{-1}$, имеем

$$x^{\beta_1 - 1} = \exp\left((\beta_1 - 1)\mathscr{L}_x\right) \leqslant \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathscr{L}_x}{q^{\varepsilon}}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathscr{L}_x}{\mathscr{L}_x^{b\varepsilon}}\right) = \exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathscr{L}_x}).$$

Следовательно

$$|W_1(b\alpha; x, y)| \ll y \exp\left(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathscr{L}_x}\right) \ll y\mathscr{L}_x^{-A}. \tag{6}$$

3.3. Преобразование $|W(b\alpha; x, y)|$

Переходя к оценкам, имеем

$$|W(b\alpha; x, y)| \leqslant \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} |\tau(\bar{\chi})||\mathrm{W}(b\lambda, \chi)|, \qquad \mathrm{W}(b\lambda, \chi) = \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\rho, b\lambda)|, \tag{7}$$

где β_1 — действительный нуль, если по модулю q_1 существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s, \chi_1)$ имеет действительный нуль $\beta_1 \geqslant 1 - \frac{c}{\ln q}$. Сумму $|W(\alpha; x, y)|$ оценим в случае $\lambda \geqslant 0$. Случай $\lambda \leqslant 0$, сводится к случаю $\lambda \geqslant 0$ с помощью соотношения

$$\mathrm{W}(b\lambda, \chi) = \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} \left|\overline{I(\rho, b\lambda)}\right| = \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} \left|\int_{x-y}^{x} u^{\beta - 1} e\left(-b\lambda u - \frac{1}{2\pi}\gamma \ln u\right) du\right| =$$

$$= \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\bar{\rho}, -b\lambda)| = \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\rho, -b\lambda)| = \mathrm{W}(-b\lambda, \chi),$$

Воспользовавшись леммой 4, при $M = x^{\beta - 1}$, $f(u) = b\lambda u + \frac{\gamma}{2\pi} \ln u$ и $m_1 = \min f'(u)$, оценим тригонометрический интеграл $I(\rho, b\lambda)$. Найдём

$$|I(\rho, \lambda)| \leqslant \frac{x^{\beta - 1}}{\min |f'(u)|} = \frac{x^{\beta}}{\min |xf'(u)|}, \qquad f'(u) = b\lambda + \frac{\gamma}{2\pi u} = \frac{\gamma + 2\pi k b\lambda u}{2\pi u}.$$

Отсюда и из тривиальной оценки

$$|I(\rho, b\lambda)| \leqslant \int_{x-y}^{x} u^{\beta - 1} du \leqslant yx^{\beta - 1},$$

получим

$$|I(\rho, b\lambda)| \leqslant x^{\beta} \min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min |xf'(u)|}\right).$$

Эту оценку, пользуясь соотношением

$$|xf'(u)| = |\gamma + 2\pi k b\lambda u| \frac{x}{2\pi u} \geqslant \frac{1}{2\pi} |\gamma + 2\pi k b\lambda u|,$$

представим в виде

$$|I(\rho, b\lambda)| \ll x^{\beta} \min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min |\gamma + 2\pi k b\lambda u|}\right). \tag{8}$$

Подставляя эту оценку и оценку суммы $\tau(\chi)$ в (7), а затем пользуясь соотношением $q_1/\varphi(q_1) \ll \ln\ln q_1$, получим

$$|W(b\alpha; x, y)| \ll \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} \mathrm{W}(b\lambda, \chi) \ll \frac{\ln \mathscr{L}_x}{\sqrt{q_1}} \sum_{\chi \bmod q_1} \mathrm{W}(b\lambda, \chi). \tag{9}$$

Все нетривиальные нули $\rho=\beta+i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ с условием $|\gamma|\leqslant T_0$ разобьём на множества

$$\begin{aligned}
D_1&=\left\{\rho:\ -T_0\leqslant\gamma<-2\pi b\lambda x-\frac{x}{y}\right\},\\
D_2&=\left\{\rho:\ -2\pi b\lambda x-\frac{x}{y}\leqslant\gamma\leqslant-2\pi b\lambda(x-y)+\frac{x}{y}\right\},\\
D_3&=\left\{\rho:\ -2\pi b\lambda(x-y)+\frac{x}{y}<\gamma\leqslant T_0\right\}.
\end{aligned}$$

Обозначая сумму модулей сумма модулей интеграла $I(\rho,b\lambda)$ по нулям ρ, принадлежащим множеству D_j, через $\mathrm{W}_j(b\lambda,\chi)$, $j=1,\ 2,\ 3$, представим сумму $\mathrm{W}(b\lambda,\chi)$ в (7) в виде:

$$\mathrm{W}(b\lambda,\chi)=\mathrm{W}_1(b\lambda,\chi)+\mathrm{W}_2(b\lambda,\chi)+\mathrm{W}_3(\chi,b\lambda). \tag{10}$$

3.3.1. Преобразование $\mathrm{W}_1(b\lambda,\chi)$

Ко всем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_1, прибавляя слагаемое $2\pi b\lambda u$, $x-y\leq u\leqslant x$, получим

$$D_1=\left\{\rho:\ -T_0+2\pi b\lambda u\leqslant\gamma+2\pi b\lambda u<-2\pi b\lambda x+2\pi b\lambda u-\frac{x}{y}\right\}.$$

Функция $2\pi b\lambda u$ в интервале $x-y\leq u\leqslant x$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы множества D_1, имеем

$$-2\pi b\lambda x+2\pi b\lambda u-\frac{x}{y}\leqslant-\frac{x}{y}.$$

Следовательно, если $\rho\in D_1$, то выполняется неравенство $\gamma+2\pi b\lambda u<-\frac{x}{y}$, поэтому в интервале $x-y\leqslant u\leqslant x$ для монотонно возрастающей функции $\gamma+2\pi b\lambda u$ справедливо соотношение

$$\min|\gamma+2\pi b\lambda u|=-\max(\gamma+2\pi b\lambda u)=-\gamma-2\pi b\lambda x\geqslant\frac{x}{y},\quad \text{если}\quad \rho\in D_1.$$

Отсюда и из второй оценки (8), найдём

$$\mathrm{W}_1(b\lambda,\chi)\ll\sum_{\rho\in D_1}\frac{x^\beta}{-\gamma-2\pi b\lambda x}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_1=\left\{\rho:\ -T_0\leqslant\gamma<-2\pi b\lambda x-\frac{x}{y}\right\}=\left\{\rho:\ \frac{x}{y}\leqslant-\gamma-2\pi b\lambda x<T_0-2\pi b\lambda x\right\},$$

разобьём на классы $D_{11},\ \ldots,\ D_{1r}$, $r\ll T_0x^{-1}y$, в класс D_{1n} отнесём те нули ρ, для которых выполняется условие:

$$nH<-\gamma-2\pi b\lambda x\leqslant(n+1)H,\qquad H=\frac{bhx}{q_1y},\qquad 1\leqslant n\leqslant r.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_1(b\lambda,\chi)&\ll\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{1n}}\frac{x^\beta}{-\gamma-2\pi b\lambda x}\leqslant\frac{1}{H}\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{1n}}\frac{x^\beta}{n}\leqslant\\
&\leqslant\frac{\mathscr{L}_x}{H}\max_{1\leqslant n\leqslant r}\sum_{\rho\in D_{1n}}x^\beta\leqslant\frac{\mathscr{L}_x}{H}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-H<\gamma\leqslant T}x^\beta.
\end{aligned}$$

3.3.2. Преобразование $\mathrm{W}_3(\chi, b\lambda)$

Ко всем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_3, прибавляя слагаемое $2\pi b\lambda u$, $x-y \le u \leqslant x$, получим

$$D_3 = \left\{\rho:\ 2\pi b\lambda u - 2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y} < \gamma + 2\pi b\lambda u \leqslant T_0 + 2\pi b\lambda u\right\}.$$

Функция $2\pi b\lambda u$ в отрезке $x-y \le u \leqslant x$ монотонно возрастает, поэтому на левой границе множества D_3, имеет место неравенство

$$2\pi b\lambda u - 2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y} \geqslant \frac{x}{y}.$$

Отсюда следует, что если $\rho \in D_3$, то имеет место неравенство $\gamma + 2\pi b\lambda u > \frac{x}{y}$. Следовательно в отрезке $x-y \leqslant u \leqslant x$ для монотонно возрастающей функции $\gamma + 2\pi b\lambda u$ справедливо неравенство

$$\min|\gamma + 2\pi b\lambda u| = \min(\gamma + 2\pi b\lambda u) = \gamma + 2\pi b\lambda(x-y) \geqslant \frac{x}{y}, \qquad \text{при} \qquad \rho \in D_3.$$

Отсюда и из второй оценки (8), находим

$$\mathrm{W}_3(\chi, b\lambda) \ll \sum_{\rho \in D_3} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi b\lambda(x-y)}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_3 = \left\{\rho:\ \frac{x}{y} \leqslant \gamma + 2\pi b\lambda(x-y) < T_0 + 2\pi b\lambda(x-y)\right\},$$

разобьём на классы $D_{31},\ \ldots,\ D_{3r}$, $r \ll T_0H^{-1}$, в класс D_{3n} отнесём те нули ρ, для которых выполняется условие:

$$nH < \gamma + 2\pi b\lambda(x-y) \leqslant (n+1)H, \qquad H = \frac{bhx}{q_1 y}, \qquad 1 \leqslant n \leqslant r.$$

Следовательно

$$\mathrm{W}_3(\chi, b\lambda) \ll \sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho \in D_{3n}} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi b\lambda(x-y)} \leqslant \frac{1}{H}\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho \in D_{3n}} \frac{x^\beta}{n} \leqslant \frac{\mathscr{L}_x}{H}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-H<\gamma\leqslant T} x^\beta.$$

3.3.3. Преобразование $\mathrm{W}_2(b\lambda, \chi)$

Представляя множество D_2 в виде

$$\begin{aligned} D_2 &= \left\{\rho:\ -2\pi b\lambda x - \frac{x}{y} \leqslant \gamma \leqslant -2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y}\right\} = \\ &= \left\{\rho:\ T_1 - 2\pi b\lambda y - \frac{2x}{y} \leqslant -\gamma \leqslant T_1\right\}, \qquad T_1 = 2\pi b\lambda x + \frac{x}{y} \leqslant T_0, \end{aligned}$$

и имея в виду, что для длины множества D_2 при $|\lambda| \leqslant \dfrac{1}{q_1\tau}$, $\tau = \dfrac{y^2}{x\mathscr{L}_x^{c_2}}$ и $c_2 \leqslant c_1$, выполняется неравенство

$$2\pi b\lambda y + \frac{2x}{y} \leqslant \frac{2\pi by}{q_1\tau} + \frac{2x}{y} = \frac{2\pi bhx}{q_1 y}\cdot\frac{\mathscr{L}_x^{c_2}}{h} + \frac{2x}{y} \ll \frac{bxh}{q_1 y} = H,$$

и пользуясь тривиальной оценкой тригонометрического интеграла $I(\rho, b\lambda)$, то есть первой оценкой (8), получим

$$\mathrm{W}_2(b\lambda, \chi) \leqslant \sum_{\rho \in D_2} |I(\rho, b\lambda)| \ll \frac{y}{x}\sum_{\rho \in D_2} x^\beta \leqslant \frac{y}{x}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-H\leqslant -\gamma\leqslant T} x^\beta \ll \frac{y}{x}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-H\leqslant \gamma\leqslant T} x^\beta.$$

3.4. Сведение оценки $W(b\alpha; x, y)$ к минимизации $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$

Подставляя полученные оценки для $\mathrm{W}_1(b\lambda,\chi)$, $\mathrm{W}_3(\chi, b\lambda)$ и $\mathrm{W}_3(\chi, b\lambda)$ в (10), а потом в (9), а затем, воспользовавшись соотношением

$$\frac{\ln \mathscr{L}_x}{\sqrt{q_1}}\left(\frac{\mathscr{L}_x}{H}+\frac{y}{x}\right)=\frac{\ln \mathscr{L}_x}{\sqrt{q_1}}\left(\frac{q_1\mathscr{L}_x}{bh}+1\right)\frac{y}{x}\ll\frac{y\mathscr{L}_x^2}{x},$$

находим

$$|W(b\alpha; x, y)|\ll\frac{\ln \mathscr{L}_x}{\sqrt{q_1}}\left(\frac{\mathscr{L}_x}{H}+\frac{y}{x}\right)\mathrm{W}(b\lambda,\chi)\ll\frac{y\mathscr{L}_x^2}{x}\max_{|T|\leqslant T_0}V_{q_1}(T,H), \tag{11}$$
$$V_{q_1}(T,H)=\sum_{\chi \bmod q_1}\sum_{T-H<\gamma\leqslant T}x^{\beta}.$$

Сумму $V_{q_1}=V_{q_1}(T,H)$ оценим, воспользовавшись теоремой о плотности нулей L-рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы. Имеем

$$V_{q_1}=\sum_{\chi \bmod q_1}\sum_{T-H<\gamma\leqslant T}\left(\mathscr{L}_x\int_0^{\beta}x^u du+1\right)=\mathscr{L}_x\int_0^1 x^u\sum_{\chi \bmod q_1}\sum_{\substack{T-H<\gamma\leqslant T\\ \beta\geqslant u}}du+\sum_{\chi \bmod q_1}\sum_{T-H<\gamma\leqslant T}1$$
$$=\mathscr{L}_x\int_0^1 x^u\sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-H,\chi)\right)du+\sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(T,\chi)-N(T-H,\chi)\right).$$

Нетривиальные нули $\rho=\beta+i\gamma$ расположены симметрично относительно критической прямой $\mathfrak{S}gma=0.5$. Воспользовавшись этим свойством нулей, правую часть последнего равенства представим в виде

$$\begin{aligned}V_{q_1}(T,H)&\leqslant\mathscr{L}_x\int_{0,5}^1 x^u\sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-H,\chi)\right)du+\\&+\left(\frac{\sqrt{x}\mathscr{L}_x}{2}+1\right)\sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(T,\chi)-N(T-H,\chi)\right)\leqslant\\&\leqslant\mathscr{L}_x\max_{u\geqslant 0,5}x^u\sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-H,\chi)\right)+\\&+\left(\frac{\sqrt{x}\mathscr{L}_x}{2}+1\right)\sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(T,\chi)-N(T-H,\chi)\right)\leqslant\\&\leqslant 2\mathscr{L}_x\max_{u\geqslant 0,5}x^u\sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-H,\chi)\right).\end{aligned}$$

Согласно лемме 5 функция $L(u+it,\chi)$ не имеет нулей в области

$$u\geqslant 1-\delta(q_1,t),\qquad \delta(q_1,t)=\frac{c_3}{\max\left(\ln q_1,\ (\ln(t+3)\ln\ln(t+3))^{\frac{3}{4}}\right)},$$

для всех характеров $\chi \mathrm{mod} q_1$, за исключением, быть может простого действительного нуля β_1 у L-функции, определенной исключительным характером χ_1. Поэтому, имея в виду, что $\delta(q_1,T)\geqslant\delta(q_1,T_0)$, найдём

$$V_{q_1}(T,H)\leqslant 2\mathscr{L}_x\max_{0,5\leqslant u\leqslant 1-\delta}x^u\sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-H,\chi)\right).$$

Подставляя правую часть этого неравенства в (11), имеем

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\frac{y\mathscr{L}_x^3}{x}\max_{|T|\leqslant T_0}\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 1-\delta}x^u\sum_{\chi\bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N\left(u,T-H,\chi\right)\right).$$

Из определения параметра T_0, условия $|\lambda|\leqslant\dfrac{1}{q_1\tau}$, $\tau=\dfrac{y^2}{x\mathscr{L}_x^{c_2}}$ и (3), находим

$$\frac{T}{H^3}\leqslant\frac{T_0(q_1y)^3}{(bxh)^3}=\frac{(q_1y)^3}{(bxh)^3}\left(\frac{x}{y}q_1^{\frac12}+bq_1^{\frac12}|\lambda|x\right)\mathscr{L}_x^{A+3}\leqslant\frac{(q_1y)^3}{(bxh)^3}\left(\frac{x}{y}q_1^{\frac12}+\frac{bx}{q_1^{\frac12}\tau}\right)\mathscr{L}_x^{A+3}=$$

$$=\left(\frac{q_1^{3,5}y^2}{b^3x^2h^3}+\frac{q_1^{2,5}y\mathscr{L}_x^{c_2}}{b^2xh^3}\right)\mathscr{L}_x^{A+3}\leqslant\left(\frac{h^{0,5}y^2}{b^3x^2}+\frac{y\mathscr{L}_x^{c_2}}{b^2xh^{0,5}}\right)\mathscr{L}_x^{A+3}\leqslant 1.$$

Таким образом, в последней сумме по $\chi\bmod q_1$ выполняется условие $\frac{x}{y}\geqslant T^{\frac13}$, и к этой сумме можно применить теорему о плотности нулей в узких прямоугольных критической полосы (лемму 6). Согласно этой лемме, имеем

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\frac{y\mathscr{L}_x^3}{x}\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 1-\delta}x^u(q_1H)^{c(1-u)}(\ln qH)^{33}\ll\frac{y\mathscr{L}_x^{36}}{x}\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 1-\delta}x^u\left(\frac{bhx}{y}\right)^{c(1-u)}=$$

$$=bh\mathscr{L}_x^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{c-1}\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 1-\delta}x^u\left(\frac{y}{bhx}\right)^{cu}\ll\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2+\mathscr{A}_3,\tag{12}$$

$$\mathscr{A}_1=bh\mathscr{L}_x^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{1{,}4}\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant\frac23}f_1(u),\qquad f_1(u)=x^u\left(\frac{y}{bhx}\right)^{2{,}4u}>0,$$

$$\mathscr{A}_2=bh\mathscr{L}_x^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{\frac53}\max_{\frac23\leqslant u\leqslant\frac56}f_2(u),\qquad f_2(u)=x^u\left(\frac{y}{bhx}\right)^{\frac83u}>0,$$

$$\mathscr{A}_3=bh\mathscr{L}_x^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{1{,}4}\max_{\frac56\leqslant u\leqslant 1-\delta}f_1(u).$$

3.5. Оценка $\mathscr{A}_1$

Воспользовавшись условиями $q_1\leqslant h$, $h=\mathscr{L}_c^{c_2}$, $1\leqslant b\leqslant\mathscr{L}_x^B$ и (3), имеем

$$f_1'(u)=f_1(u)\left(\ln x+2,4\ln\left(\frac{y}{bhx}\right)\right)=2,4f_1(u)\ln\left(\frac{y}{bhx^{\frac{7}{12}}}\right)>0,$$

то есть $f_1(u)$ монотонно возрастающая функция, поэтому пользуясь опять условием (3), имеем

$$\mathscr{A}_1=bh\mathscr{L}_x^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{1{,}4}f_1\left(\frac23\right)=y\left(\frac{x^{\frac58}bh\mathscr{L}_x^{2{,}25A+81}}{y}\right)^{\frac45}x^{-\frac{1}{30}}\mathscr{L}_x^{-1{,}8A-28{,}8}\ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

3.6. Оценка $\mathscr{A}_3$

Пользуясь, как в случае оценки $\mathscr{A}_1$, монотонностью функции $f_1(u)$, а затем условиями $b\leqslant\mathscr{L}_x^B$, $h=\mathscr{L}_x^{c_2}$ и (3), находим

$$\mathscr{A}_3=bh\mathscr{L}_x^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{1{,}4}f_1(1-\delta)=y\left(\frac{x^{\frac58}bh\mathscr{L}_x^{2{,}25A+81}}{y}\right)^{\frac{12}{5}\delta}x^{-0{,}1\delta}\mathscr{L}_x^{36-54A\delta-194{,}4\delta}\ll yx^{-0{,}1\delta}\mathscr{L}_x^{36}.$$

Воспользовавшись условиями $|\lambda| \leqslant \dfrac{1}{q_1\tau}$, $\tau = \dfrac{y^2}{xh}$, $b \leqslant \mathscr{L}_x^B$, $h = \mathscr{L}_x^{c_1}$ и (3), имеем

$$T_0 = \left(\frac{x}{y} + b\lambda x\right) q^{\frac12}\mathscr{L}_x^{A+3} \leqslant \left(\frac{q^{\frac12}x}{y} + \frac{hx^2}{q^{\frac12}y^2}\right)\mathscr{L}_x^{A+3} \leqslant \left(\frac{x\mathscr{L}_x^{c_1}}{y} + \frac{hx^2}{y^2}\right)\mathscr{L}_x^{A+3} \leqslant x,$$

Пользуясь этим неравенством оценим снизу параметр $\delta = \delta(q, T_0)$. Имеем

$$\delta(q,T_0) = \frac{c_3}{\max\left(\ln q,\ (\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3))^{\frac34}\right)} \geqslant \frac{c_3}{\max\left(b\ln\mathscr{L}_x,\ (\mathscr{L}_x\ln\mathscr{L}_x)^{\frac34}\right)} \geqslant c_4\mathscr{L}_x^{-0,76}.$$

Поэтому

$$\mathscr{A}_3 \ll y\exp(-0,1\delta\mathscr{L}_x)\cdot\mathscr{L}_x^{36} \ll y\exp(-0,1c_4\mathscr{L}_x^{0,24})\cdot\mathscr{L}_x^{36} \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

3.7. Оценка $\mathscr{A}_2$

Воспользовавшись условиями $q_1 \leqslant h$, $h = \mathscr{L}_c^{c_1}$, $1 \leqslant b \leqslant \mathscr{L}_x^B$ и (3), имеем

$$f_2'(u) = f_2(u)\left(\ln x + \frac83\ln\left(\frac{y}{bhx}\right)\right) = \frac83 f_2(u)\ln\left(\frac{y}{bhx^{\frac58}}\right) \geqslant \frac83 f_2(u)\ln\left(\frac{y}{x^{\frac58}\mathscr{L}_x^{B+c_1}}\right) > 0,$$

то есть $f_2(u)$ монотонно возрастающая функция, поэтому пользуясь условием (3), имеем

$$\mathscr{A}_2 = bh\left(\frac{bhx}{y}\right)^{\frac53}\mathscr{L}_x^{36}f_2\left(\frac56\right) = y\left(\frac{x^{\frac58}bh\mathscr{L}_x^{2,25A+81}}{y}\right)^{\frac49}\mathscr{L}_x^{-A} \leqslant y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Подставляя найденные оценки для сумм $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ и $\mathscr{A}_3$ в (12), находим

$$|W(b\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Из полученной оценки и оценки (6), имея в виду (5), получим утверждение теоремы.

4. Оценка специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в малых дугах

Оценим сначала специальные короткие линейные двойные тригонометрические суммы с “близкими” по порядку суммами, которые возникают при оценке специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида $S_1(b\alpha; x, y)$ в малых дугах.

4.1. Оценка специальных коротких линейных двойных тригонометрических сумм с “близкими” по порядку суммами

Лемма 11. *Пусть $f(m)$ и $g(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, b — натуральное число, c — абсолютная постоянная, $|f(m)| \leqslant \tau_r(m)$, $|g(n)| \leqslant \tau_k(n)$, $y < x\mathscr{L}_x^{-1}$,*

$$W = \sum_{M<m\le 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\le 2N \\ x-y<mn\le x}} g(n)e(b\alpha mn), \qquad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q)=1, \qquad |\theta| \leqslant 1.$$

Тогда при

$$\begin{aligned} &b\mathscr{L}_x^{4c+2r^2+2k^2+4k-2} \leqslant q \leqslant \frac{y^2}{x}\mathscr{L}_x^{-4c-2r^2-2k^2-4k+2}, \\ &\frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2c+r^2+k^2+2k-1} \leqslant N \leqslant \frac{y}{b}\mathscr{L}_x^{-4c-2r^2-2k^2-4k+2}, \end{aligned} \tag{13}$$

справедлива оценка

$$|W| \ll y\mathscr{L}_x^{-c}.$$

Доказательство. Далее, для удобства, не ограничивая общности, будем считать, что $MN \asymp x$. Возводя сумму W в квадрат, применяя неравенство Коши и лемму 7, получим

$$\begin{aligned} |W|^2 &\ll \sum_{M<m\leq 2M} |f(m)|^2 \sum_{M<m\leq 2M} \left| \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ x-y<mn\leq x}} g(n)e(b\alpha mn) \right|^2 \ll \\ &\ll \sum_{M<m\leq 2M} \tau_r^2(m) \sum_{M<m\leqslant 2M} \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ x-y<mn_1,mn_2\leqslant x}} \overline{g(n_1)}g(n_2)e(b\alpha m(n_2-n_1)) \ll \\ &\ll M\mathscr{L}_x^{r^2-1} \sum_{N<n_1,n_2\leqslant 2N} \overline{g(n_1)}g(n_2) \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M \\ x-y<mn_1,mn_2\leqslant x}} (b\alpha m(n_2-n_1)). \end{aligned}$$

Разбивая двойную сумму по n_1 и n_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $n_1 < n_2$,$n_1 = n_2$, $n_1 > n_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{M<m\leq 2M} \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ x-y<mn\leq x}} |g(n)|^2 \ll \sum_{x-y<t\leq x} \sum_{\substack{mn=t \\ M<m\leq 2M \\ N<n\leqslant 2N}} \tau_k^2(n) \leqslant \sum_{x-y<t\leq x} \tau_{k+1}^2(t) \ll y\mathscr{L}_x^{k(k+2)},$$

а также, имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $n_1 < n_2$ и $n_1 > n_2$ равны, получим

$$|W|^2 \ll M\mathscr{L}_x^{r^2-1} \left| \sum_{N<n_1\leqslant 2N} \overline{g(n_1)} \sum_{0<n_2-n_1\leqslant 2N-n_1} g(n_2) \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M \\ x-y<mn_1,mn_2\leqslant x}} e(b\alpha m(n_2-n_1)) \right| + yM\mathscr{L}_x^{r^2+k^2+2k-1}.$$

Положим $t = n_2 - n_1$ и $n_1 = n$, тогда правая часть последнего неравенства принимает вид

$$|W|^2 \ll M\mathscr{L}_x^{r^2-1}W_1 + yM\mathscr{L}_x^{r^2+k^2+2k-1}, \tag{14}$$

$$W_1 = \sum_{N<n\leqslant 2N} \tau_k(n) \sum_{0<t\leq 2N-n} \tau_k(n+t) \left| \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ \frac{x-y}{n}<m\leq \frac{x}{n+t}}} e(b\alpha tm) \right|.$$

Из условия $\frac{x-y}{n} < m \leq \frac{x}{n+t}$ находим

$$t \leq \frac{x}{m} - n < \frac{x}{m} - \frac{x-y}{m} = \frac{y}{m} < \frac{y}{M}.$$

С учётом последнего неравенства, суммируя по n, найдём

$$W_1 \ll \sum_{N<n\leqslant 2N} \tau_k(n) \sum_{0<t\leqslant \frac{y}{M}} \tau_k(n+t) \min\left(\frac{y}{N}, \frac{1}{\|\alpha bt\|}\right).$$

Применяя дважды неравенство Коши и лемму 7, найдём

$$W_1^2 \ll N\mathscr{L}_x^{k^2-1} \sum_{N<n\leqslant 2N} \left(\sum_{0<t\leqslant \frac{y}{M}} \tau_k(n+t) \min\left(\frac{y}{N}, \frac{1}{\|\alpha bt\|}\right)\right)^2 \ll$$
$$\ll \frac{yN}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-2} \sum_{N<n\leqslant 2N} \sum_{0<t\leqslant \frac{y}{M}} \min\left(\frac{y}{N}, \frac{1}{\|\alpha bt\|}\right)^2 \ll$$
$$\ll \frac{y^2N}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-2} \sum_{0<t\leqslant \frac{y}{M}} \min\left(\frac{y}{N}, \frac{1}{\|\alpha bt\|}\right) \ll \frac{y^2N}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-2} \sum_{0<t\leqslant \frac{by}{M}} \min\left(\frac{y}{N}, \frac{1}{\|\alpha t\|}\right).$$

4.1.1. Оценка W_1^2 при $\dfrac{by}{M} > 0.5q$

Разбивая интервал изменения t на $\ll \dfrac{by}{qM}$ интервалов вида $g \leqslant h \leqslant g+q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 8, найдём

$$W_1^2 \ll \frac{y^2N}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-2} \cdot \frac{by}{qM}\left(\frac{y}{N} + q\ln q\right) \ll \left(\frac{by^4}{qM^2} + \frac{by^3N}{M^2}\right)\mathscr{L}_x^{2k^2-1}.$$

Подставляя эту оценку в (14) и воспользовавшись соотношением $MN \asymp x$, а также неравенством $4k^2 - 24k + 69 > 2k^2 + 2k$, а затем условиями (13), получим

$$|W|^4 \ll M^2\mathscr{L}_x^{2r^2-2}W_1^2 + y^2M^2\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll$$
$$\ll M^2\mathscr{L}_x^{2r^2-2}\left(\frac{by^4}{qM^2} + \frac{by^3N}{M^2}\right)\mathscr{L}_x^{2k^2-1} + y^2M^2\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll$$
$$\ll \left(\frac{by^4}{q} + by^3N\right)\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2-3} + \frac{y^2x^2}{N^2}M\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll$$
$$\ll y^4\left(\frac{b}{q} + \frac{bN}{y} + \frac{x^2}{y^2N^2}\right)\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll y^4\mathscr{L}_x^{-4c}.$$

4.1.2. Оценка W_1^2 при $\dfrac{by}{M} \leqslant 0.5q$

Применяя утверждение б) 8, найдём

$$W_1^2 \ll \frac{y^2N}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-2} \cdot q\ln q \ll \frac{y^2Nq}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-1}.$$

Подставляя эту оценку в (14) и, воспользовавшись соотношением $MN \asymp x$, а затем условиями (13), получим

$$|W|^4 \ll M^2\mathscr{L}_x^{2r^2-2}W_1^2 + y^2M^2\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll$$
$$\ll M^2\mathscr{L}_x^{2r^2-2} \cdot \frac{y^2Nq}{M}\mathscr{L}_x^{2k^2-1} + y^2M^2\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll$$
$$\ll y^2xq\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2-3} + \frac{y^2x^2}{N^2}\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll$$
$$\ll y^4\left(\frac{xq}{y^2} + \frac{x^2}{y^2N^2}\right)\mathscr{L}_x^{2r^2+2k^2+4k-2} \ll y^4\mathscr{L}_x^{-4c}.$$

Лемма доказана.

Теперь, пользуясь этой леммой, найдём нетривиальную оценку тригонометрической суммы

$$S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)e(b\alpha n),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}\left(b\mathscr{L}_x^{4A+82}\right)$, $\tau = y^2x^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-82}$, где A — произвольное фиксированное положительное число.

4.2. Доказательство теоремы 3

Имеем

$$S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)e(b\alpha n), \qquad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \qquad |\theta| \leqslant 1.$$

В лемме 9 возьмём $r = 3$, $u_1 = x^{\frac{1}{3}}$ и $f(n) = e(b\alpha n)$. Имеем

$$S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{k=1}^{3}(-1)^k C_3^k S_1(b\alpha; x, y, k), \tag{15}$$

$$S_1(b\alpha; x, y, k) = \sum_{m_1\leqslant u_1} \mu(m_1)\cdots \sum_{\substack{m_k\leqslant u_1\\ x-y<m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\leqslant x}} \mu(m_k)\sum_{n_1}\cdots\sum_{n_k} \ln n_1 e(b\alpha m_1 n_1\cdots m_k n_k).$$

Разобьём в $S_1(b\alpha; x, y, k)$ области изменения каждого $m_1, \cdots, m_k, n_1, \cdots, n_k$ на не более $\mathscr{L}_x$ интервалов вида $M_j < m_j \leqslant 2M_j$, $N_j < n_j \leqslant 2N_j$, $j = 1, \cdots, k$. Получим

$$S_1(b\alpha; x, y, k) = \sum^{\mathscr{L}_x^{2k}} \hat{\S}_k(M, N), \tag{16}$$

$$\hat{\S}_k(M,N) = \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1} \mu(m_1)\cdots \sum_{\substack{M_k<m_k\leqslant 2M_k\\ x-y<m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\leqslant x}} \mu(m_k) \sum_{N_1<n_1\leqslant 2N_1}\cdots \sum_{N_k<n_k\leqslant 2N_k} \ln n_1\, e(b\alpha m_1 n_1\cdots m_k n_k) =$$

$$= \int_1^{2N_1} \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1} \mu(m_1)\cdots \sum_{\substack{M_k<m_k\leqslant 2M_k\\ x-y<m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\leqslant x}} \mu(m_k) \sum_{\max(u,N_1)<n_1\leqslant 2N_1}\cdots \sum_{N_k<n_k\leqslant 2N_k} e(b\alpha m_1 n_1\cdots m_k n_k) d\ln u.$$

Через $U_1 = \max(u, N_1)$ обозначим такое число u, при котором модуль подынтегральной функции принимает максимальное значение, тогда

$$|\hat{\S}_k(M,N)| \ll \mathscr{L}_x |\S_k(M,N)|, \tag{17}$$

где

$$\S_k(M,N) = \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1} \mu(m_1)\cdots \sum_{\substack{M_k<m_k\leqslant 2M_k\\ x-y<m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\leqslant x}} \mu(m_k) \sum_{U_1<n_1\leqslant 2N_1}\cdots \sum_{U_k<n_k\leqslant 2N_k} e(b\alpha m_1 n_1\cdots m_k n_k), \quad N_j \leqslant U_j < 2N_j.$$

Подставляя (17) в (16), а затем и (15), получим

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll \mathscr{L}_x^7 \sum_{k=1}^{3} \max|\S_k(M,N)|, \tag{18}$$

Суммы $\S_k(M,N)$, $k=1,2,3$ оцениваются почти одинаково. Остановимся на оценке суммы $\S_3(M,N)$ и, не ограничивая общности, будем считать, что выполняются условия:

$$x^{\frac{1}{3}} > M_1 \geqslant M_2 \geqslant M_3, \qquad N_1 \geqslant N_2 \geqslant N_3, \qquad M_1M_2M_3N_1N_2N_3 \asymp x. \tag{19}$$

Оценка $\S_1(M,N)$. Рассмотрим следующие возможные случаи значений параметра N_1:

1. $N_1 > 4bxq^{-1}$;
2. $bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39} < N_1 \leqslant 4bxq^{-1}$;
3. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2B+37}$, $M_1M_2 \leqslant yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$;
4. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+37}$, $M_1M_2 > yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$;
5. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+37} < N_1N_2N_3 \leqslant yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$;
6. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 > yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$.

Для рассмотрения случаев 1 и 2 сумму $\S_3(M,N)$ несколько преобразуем. Для этого, вводя обозначения

$$f(m) = \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}\mu(m_1)\sum_{M_2<m_2\leqslant 2M_2}\mu(m_2)\sum_{\substack{M_3<m_3\leqslant 2M_3\\ m_1m_2m_3n_2n_3=m}}\mu(m_3)\sum_{U_2<n_2\leqslant 2N_2}\sum_{U_3<n_3\leqslant 2N_3}1, \quad |f(m)|\leqslant \tau_5(m),$$

разбивая интервал суммирования $M_1M_2M_2U_2U_3 < m \leqslant 2^5M_1M_2M_2N_2N_3$ на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\leqslant 2M} f(m)\sum_{\substack{U_1<n\leqslant 2N_1\\ x-y<mn\leqslant x}} e(\alpha mn),$$

и представим эти суммы в виде

$$\begin{gathered} W = \sum_{M<m\leqslant 2M} f(m)\sum_{x_1-y_1<n\leqslant x_1} e(b\alpha mn),\\ x_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N_1\right), \quad y_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N_1\right) - \max\left(\frac{x}{m}-\frac{y}{m}, U_1\right) \leqslant \frac{y}{m}. \end{gathered}\tag{20}$$

Из условия $MN_1 < x$ и $4MN_1 < x-y$ следует, что

$$\frac{x}{5N_1} < \frac{x-y}{4N_1} \leqslant M \leqslant \frac{x}{N_1}. \tag{21}$$

В W, суммируя внутреннюю сумму по n, воспользовавшись условиями (20) и (21), найдём

$$W \ll \sum_{M<m\leqslant 2M}\tau_5(m)\min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha bm\|}\right) \ll \sum_{\frac{x}{N_1}<m\leqslant\frac{2x}{N_1}}\tau_5(m)\min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha bm\|}\right).$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 7, найдём

$$\begin{gathered} |W|^2 \ll \sum_{\frac{x}{N_1}<m\leqslant\frac{2x}{N_1}}\tau_5^2(n)\sum_{\frac{x}{N_1}<m\leqslant\frac{2x}{N_1}}\min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha bm\|}\right)^2 \ll\\ \ll y\mathscr{L}_x^{24}\sum_{\frac{x}{N_1}<m\leqslant\frac{2x}{N_1}}\min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha bm\|}\right) \ll y\mathscr{L}_x^{24}\sum_{\frac{bx}{N_1}<m\leqslant\frac{2bx}{N_1}}\min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha m\|}\right). \end{gathered}$$

Случай 1. $N_1 > 4bxq^{-1}$**.** Из условия рассматриваемого случая, имеем

$$\frac{2bx}{N_1} < 0,5q.$$

Применим утверждение б) леммы 8, затем воспользовавшись условием $q \leqslant y^2x^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-82}$, найдём

$$|W|^2 \ll y\mathscr{L}_x^{24} \sum_{m\leqslant 0,5q} \frac{1}{\|\alpha m\|} \ll y\mathscr{L}_x^{24} q\ln q \ll yq\mathscr{L}_x^{25} \ll y\mathscr{L}_x^{25} \cdot \frac{y^2}{x\mathscr{L}_x^{4A+82}} =$$
$$= \frac{y^2}{\mathscr{L}_x^{2A+14}} \cdot \frac{y}{x\mathscr{L}_x^{2A+43}} \ll \frac{y^2}{\mathscr{L}_x^{2A+14}}.$$

Случай 2. $bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39} < N_1 \leqslant 4bxq^{-1}$**.** Из условия рассматриваемого случая, имеем

$$\frac{2bx}{N_1} \geqslant 0,5q.$$

Разбивая интервал изменения m на $\ll bx(qN_1)^{-1}$ интервалов вида $g \leqslant h \leqslant g+q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 8, воспользовавшись условиями рассматриваемого случая, а именно условием

$$N_1 \geqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}, \qquad q \geqslant b\mathscr{L}_x^{4A+82},$$

найдём

$$|W|^2 \ll y\mathscr{L}_x^{24} \cdot \frac{bx}{qN_1} \sum_{t=g}^{g+q'} \min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha m\|}\right) \ll \frac{bxy\mathscr{L}_x^{24}}{qN_1}\left(\frac{yN_1}{x} + q\ln q\right) \ll$$
$$\ll y^2\left(\frac{b}{q} + \frac{bxy^{-1}}{N_1}\right)\mathscr{L}_x^{25} \ll \frac{y^2}{\mathscr{L}_x^{2A+14}}.$$

Случай 3. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$**,** $N_1N_2N_3 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+37}$**,** $M_1M_2 \leqslant yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$**.** Из (19) и условия рассматриваемого случая, находим

$$M_1M_2 \geqslant (M_1M_2M_3)^{\frac{2}{3}} \gg \left(\frac{x}{N_1N_2N_3}\right)^{\frac{2}{3}} \geqslant \left(\frac{y}{b\mathscr{L}_x^{2A+37}}\right)^{\frac{2}{3}} =$$
$$= \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2A+37} \cdot \left(\frac{y}{bx^{\frac{3}{5}}\mathscr{L}_x^{2A+37}}\right)^{\frac{5}{3}} \geqslant \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2A+37}.$$

В сумме $\S_3(M,N)$ вводя обозначения $m_1m_2 = n$ и $m_3n_1n_2n_3 = m$, а затем разбивая интервал суммирования по m и n соответственно на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$ и $N < n \leqslant 2N$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} g(n)e(b\alpha mn), \qquad |f(m)| \leqslant \tau_4(m), \qquad |g(n)| \leqslant \tau_2(m).$$

Для этой суммы выполняются неравенства

$$bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+37} < N \leqslant yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}, \qquad b\mathscr{L}_x^{4B+74} < q \leqslant \frac{y^2}{x}\mathscr{L}_x^{-4A-74}, \tag{22}$$

являющиеся условиями (13) леммы 11 при $r=4$, $k=2$, $c=A+7$, и согласно которой получим

$$W \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^{B+7}}.$$

Случай 4. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+37}$, $M_1M_2 > yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$. Из (19) и условия рассматриваемого случая, находим

$$M_1 \geqslant \sqrt{M_1M_2} \geqslant y^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{-2A-37} = \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2A+41}\cdot\left(\frac{y}{bx^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_x^{\frac{8}{3}A+52}}\right)^{\frac{3}{2}} \geqslant \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2A+41},$$

$$M_1 \leqslant x^{\frac{1}{3}} = \frac{y}{b\mathscr{L}_x^{4A+82}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}b\mathscr{L}_x^{4A+82}}{y} \leqslant \frac{y}{b\mathscr{L}_x^{4A+82}}.$$

В сумме $\S_3(M,N)$ вводя обозначения $m_1 = n$ и $m_2m_3n_1n_2n_3 = m$, а затем разбивая интервал суммирования по m и n соответственно на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$ и $N < n \leqslant 2N$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} \mu(n)e(b\alpha mn), \qquad |f(m)| \leqslant \tau_5(m).$$

Для этой суммы выполняется следующие два неравенства

$$bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+41} < N \leqslant yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-82}, \qquad b\mathscr{L}_x^{4A+82} < q \leqslant \frac{y^2}{x}\mathscr{L}_x^{-4A-82},$$

которые являются условиями (13) леммы 11 при $r = 5$, $k = 1$, $c = A+7$. Согласно этой лемме имеем

$$W \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^{A+7}}.$$

Случай 5. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+37} < N_1N_2N_3 \leqslant yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$. Сумму $\S_3(M,N)$ преобразуем. Для этого, вводя обозначения $m_1m_2m_3 = m$ и $n_1n_2n_3 = n$, а затем разбивая интервал суммирования по m и n соответственно на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$ и $N < n \leqslant 2N$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} g(n)e(b\alpha mn), \qquad |f(m)| \leqslant \tau_3(m), \qquad |g(n)| \leqslant \tau_3(m).$$

Для этой суммы выполняются соотношения (22), являющиеся при $r = 3$, $k = 3$, $c = A+7$ условиями (13) леммы 11, согласно которой получим

$$W \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^{A+7}}.$$

Случай 6. $N_1 \leqslant bxy^{-1}\mathscr{L}_x^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 > yb^{-1}\mathscr{L}_x^{-4A-74}$. Из (19) и условия рассматриваемого случая, находим

$$N_1N_2 \geqslant (N_1N_2N_3)^{\frac{2}{3}} \geqslant \left(\frac{y}{b\mathscr{L}_x^{4A+74}}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2A+37}\left(\frac{y}{bx^{\frac{3}{5}}\mathscr{L}_x^{2{,}8A+51{,}8}}\right)^{\frac{5}{3}} \geqslant \frac{bx}{y}\mathscr{L}_x^{2A+37},$$

$$N_1N_2 \leqslant N_1^2 \leqslant b^2x^2y^{-2}\mathscr{L}_x^{4A+78} = \frac{y}{b\mathscr{L}_x^{4A+74}}\left(\frac{bx^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_x^{\frac{8A+152}{3}}}{y}\right)^3 \leqslant \frac{y}{b\mathscr{L}_x^{4A+74}}.$$

Сумму $\S_3(M,N)$ преобразуем, для этого вводя обозначения $n_1n_2 = n$ и $m_2m_2m_3n_3 = m$, и разбивая интервалы суммирования по m и n соответственно на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$ и $N < n \leqslant 2N$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} g(n)e(b\alpha mn), \qquad |f(m)| \leqslant \tau_4(m), \qquad |g(n)| \leqslant \tau_2(m).$$

Для этой суммы выполняются соотношения (22) являющиеся при $r=4$, $k=2$, $c=A+7$ условиями (13) леммы 11, согласно которой имеем

$$W \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^{A+7}}.$$

Отсюда и из всех оценок, полученных в предыдущих случаях найдём

$$|\S_3(M,N)| \ll y\mathscr{L}_x^{-A-7}.$$

Из полученных оценок $\S_k(M,N)$, $k=1,2,3$, ввиду неравенства (18), получим утверждение теоремы 3.

5. Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми

Докажем сначала две вспомогательные леммы, которыми воспользуемся при доказательстве теоремы 1.

Лемма 12. *Пусть b — натуральное число, N — достаточно большое натуральное число,*

$$\S_1(b\alpha;N,H)=\sum_{\left|bp_1-\frac{N}{3}\right|\leqslant H} e(b\alpha p), \qquad S_1(b\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(b\alpha n).$$

Тогда при $\sqrt{bN}\left(\ln\frac{N}{3b}\right)^2\leqslant H\leqslant N^{1-\frac{1}{30}}$, имеет место соотношение

$$\S_1(b\alpha;N,H)=\frac{1}{\ln\frac{N}{3b}}S_1\left(b\alpha;\frac{N}{3b}+\frac{H}{b},\frac{2H}{b}\right)+O\left(\frac{H^2}{bN\ln\frac{N}{3b}}\right).$$

Доказательство. Отрезок суммирования $\left|bp-\frac{N}{3}\right|\leqslant H$ в сумме $\S_1(b\alpha;N,H)$ заменим на интервал вида $x-y<p\leqslant x$. Имеем

$$\S_1(b\alpha;N,H)=\sum_{\frac{N}{3b}-\frac{H}{b}<p\leqslant\frac{N}{3b}+\frac{H}{b}} e(b\alpha p)+O(1).$$

Логарифмируя неравенство $\frac{N}{3b}-\frac{H}{b}<p\leqslant\frac{N}{3b}+\frac{H}{b}$, и воспользовавшись формулой

$$\ln\left(\frac{N}{3b}\pm\frac{H}{b}\right)=\ln\frac{N}{3b}+\ln\left(1\pm\frac{3H}{N}\right)=\ln\frac{N}{3b}+O\left(\frac{H}{N}\right).$$

получим, что при $\frac{N}{3b}-\frac{H}{b}<p\leqslant\frac{N}{3b}+\frac{H}{b}$, выполняется соотношение

$$\ln p=\ln\frac{N}{3b}+O\left(\frac{H}{N}\right).$$

Пользуясь этой формулой сумму $\S_1(b\alpha;N,H)$, выражаем через сумму вида $S_1(b\alpha;x,y)$. Имеем

$$\S_1(b\alpha;N,H)=\frac{1}{\ln\frac{N}{3b}}S_1\left(b\alpha;\frac{N}{3b}+\frac{H}{b},\frac{2H}{b}\right)-\sum_{\substack{\frac{N}{3b}-\frac{H}{b}<p^k\leqslant\frac{N}{3b}+\frac{H}{b}\\ k\geqslant 2}}\frac{\ln p}{\ln\frac{N}{3b}}\ e(b\alpha p^k)+O\left(\frac{H^2}{bN\ln\frac{N}{3b}}\right).$$

Обозначая последнюю сумму через R_1 и, оценивая тривиально числом слагаемых, и воспользовавшись формулой

$$(1 \pm u)^{\mu} = 1 \pm \mu u + O(u^2), \qquad |u| < 0,5,$$

имеем

$$R_1 \ll \sum_{\substack{\frac{N}{3b}-\frac{H}{b}<p^k\leqslant \frac{N}{3b}+\frac{H}{b}\\ k\geqslant 2}} 1 \ll \ln\frac{N}{3b}\left(\left(\frac{N}{3b}+\frac{H}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{N}{3b}-\frac{H}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right) \ll \frac{H}{\sqrt{bN}}\ln\frac{N}{3b} \ll \frac{H^2}{bN\ln\frac{N}{3b}}.$$

Лемма 13. *Пусть p — нечётное простое число, $p^{ord_p(N)}\|N$, тогда для суммы Рамануджана*

$$c_{p^k}(N) = \sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{p^k} e\left(\frac{Na}{p^k}\right),$$

справедлива формула

$$c_{p^k}(N) = \begin{cases} \varphi(p^k), & \text{если } k \leqslant ord_p(N);\\ p^{ord_p(N)}\mu(p^{k-ord_p(N)}), & \text{если } k \geqslant ord_p(N)+1.\end{cases}$$

Доказательство. При $k \leqslant ord_p(N)$ утверждение леммы тривиально следует из определения суммы Рамануджана

$$c_{p^k}(N) = \sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{p^k} 1 = \varphi(p^k).$$

При $k \geqslant ord_p(N)+1$, пользуясь представлением $N_1 = Np^{-ord_p(N)}$, а затем подстановкой

$$a = a_1 + a_2 p^{k-ord_p(N)},$$

где a_1 и a_2 независимо пробегают значения $a_1 = 1, 2, \ldots, p^{k-ord_p(N)}$, $a_2 = 0, 1, \ldots, p^{ord_p(N)}-1$, получим

$$c_{p^k}(N) = \sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{p^k} e\left(\frac{N_1 a}{p^{k-ord_p(N)}}\right) = \sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{p^{k-ord_p(N)}} \sum_{a_2=0}^{p^{ord_p(N)}-1} e\left(\frac{N_1(a_1+a_2p^{k-ord_p(N)})}{p^{k-ord_p(N)}}\right) =$$

$$= p^{ord_p(N)} \sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{p^{k-ord_p(N)}} e\left(\frac{N_1 a_1}{p^{k-ord_p(N)}}\right) = p^{ord_p(N)}\mu(p^{k-ord_p(N)}).$$

5.1. Доказательство теоремы 1

Для удобства вводим следующие обозначения:

$$\mathscr{L} = \ln\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right), \qquad \mathscr{L}_i = \ln\frac{N}{3b_i} \qquad \mathscr{L} \ll \mathscr{L}_i \ll \mathscr{L}. \tag{23}$$

Не ограничивая общности будем считать, что выполняются следующие условия

$$H = (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}^{60}, \qquad b_1 < b_2 < b_3, \tag{24}$$

а также пусть $æ = \tau^{-1}$, где

$$\tau = \frac{12H^2}{(N+3H)b_3\mathscr{L}^{c_2}}, \qquad \mathscr{L}^{c_2} = b_1^2 b_2^2 \mathscr{L}^{94}, \qquad c_2 = 94 + \frac{2\ln b_1 + 2\ln b_2}{\ln \mathscr{L}}. \tag{25}$$

Имеем

$$I(N,H) = \int\limits_{-æ}^{1-æ} \mathfrak{F}(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha,$$

где

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \mathfrak{F}(\alpha; N, H) = \prod_{i=1}^{3} \S_1(b_i\alpha; N, H), \qquad \S_1(b_k\alpha; N, H) = \sum_{\left|b_i p - \frac{N}{3}\right| \leqslant H} e(b_i\alpha p).$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$ представим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad (a,q) = 1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}. \tag{26}$$

В этом представлении $0 \leqslant a \leqslant q-1$, причём $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α, для которых

$$q \leqslant h, \qquad h = \mathscr{L}^{c_1} = b_1^2 b_2^2 b_3 \mathscr{L}^{94}, \qquad c_1 = 94 + \frac{2\ln b_1 + 2\ln b_2 + \ln b_3}{\ln \mathscr{L}}, \tag{27}$$

в представлении (26), через $\mathfrak{m}$ – обозначим оставшиеся α. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьём множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\begin{gathered} \mathfrak{M}_1 = \left\{\alpha: \quad \alpha \in \mathfrak{M}, \qquad \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{\sqrt{b_1 b_2}\mathscr{L}^3}{H b_3^{-1}}\right\}, \\ \mathfrak{M}_2 = \left\{\alpha: \quad \alpha \in \mathfrak{M}, \qquad \frac{\sqrt{b_1 b_2}\mathscr{L}^3}{H b_3^{-1}} < \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}\right\}. \end{gathered} \tag{28}$$

Обозначим через $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$. Будем иметь

$$I(N,H) = I(\mathfrak{M}_1) + I(\mathfrak{M}_2) + I(\mathfrak{m}). \tag{29}$$

В последней формуле первый член, то есть $I(\mathfrak{M}_1)$, доставляет главный член асимптотической формулы для $I(N,H)$, а $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

5.2. Преобразование интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$

По определению интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$I(\mathfrak{M}_1) = \int\limits_{\mathfrak{M}_1} \mathfrak{F}(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha = \sum_{q \leqslant h} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} I(a,q), \tag{30}$$

$$I(a,q) = e\left(-\frac{aN}{q}\right) \int\limits_{|\lambda| \leqslant \sqrt{b_1 b_2} b_3 \mathscr{L}^3 H^{-1}} \mathfrak{F}\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) e(-\lambda N) d\lambda. \tag{31}$$

Применяя лемму 12 к суммам $\S_1(b_i\alpha;N,H)$, $i=1;2;3$, и пользуясь формулой (23), получим

$$\S_1(b_i\alpha;N,H)=\frac{1}{\mathscr{L}_i}S_1\left(b_i\alpha;\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i},\frac{2H}{b_i}\right)+O\left(\frac{H^2}{b_iN\mathscr{L}}\right). \tag{32}$$

А теперь к суммам $S_1\left(b_i\alpha;\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i},\frac{2H}{b_i}\right)$, $i=1,2,3$ применим теорему 2, полагая

$$x=\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i},\qquad y=\frac{2H}{b_i},\qquad \mathscr{L}^A=b_1^{4,5}b_2^{4,5}b_3^3\mathscr{L}^{192}. \tag{33}$$

Проверим выполнение условий теоремы. Воспользовавшись значениями параметров h и A, затем соотношением (24), имеем

$$\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac58}b_3h\mathscr{L}^{2,25A+81}=\frac{1}{3^{\frac58}}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac58}b_3^{\frac38}\cdot b_1^2b_2^2b_3\mathscr{L}^{94}\cdot\left(b_1^{\frac92}b_2^{\frac92}b_3^3\mathscr{L}^{192}\right)^{\frac94}N^{\frac58}=$$
$$=\frac{(b_1b_2b_3)^{\frac43}N^{\frac23}\mathscr{L}^{60}}{2b_3}\cdot\frac{2}{3^{\frac58}}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac58}b_1^{\frac{259}{24}}b_2^{\frac{259}{24}}b_3^{\frac{163}{24}}N^{-\frac{1}{24}}\mathscr{L}^{466}\leqslant\frac{(b_1b_2b_3)^{\frac43}N^{\frac23}\mathscr{L}^{60}}{2b_3}=\frac{H}{2b_3}.$$

Таким образом условие теоремы 2 выполняется, следовательно согласно этой теореме, и формуле (23), находим

$$S_1\left(b_i\alpha;\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i},\frac{2H}{b_i}\right)=\mathscr{B}_i(q)\frac{\mathfrak{S}n2\pi\lambda H}{\pi b_i\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+O\left(\frac{H\mathscr{L}^{-192}}{b_ib_1^{4,5}b_2^{4,5}b_3^3}\right),\quad \mathscr{B}_i(q)=\frac{\mu\left(\frac{q}{(b_i,q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b_i,q)}\right)}.$$

Из этой формулы и (32), имея в виду, что $H\leqslant Nb_1^{-4,5}b_2^{-4,5}b_3^{-3}\mathscr{L}^{-192}$, найдём

$$\S_1(b_i\alpha;N,H)=\frac{\mathscr{B}_i(q)}{b_i\mathscr{L}_i}\frac{\mathfrak{S}n2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+\mathbb{R}_{1i},\qquad \mathbb{R}_{1i}\ll\frac{H\mathscr{L}^{-193}}{b_ib_1^{4,5}b_2^{4,5}b_3^3}. \tag{34}$$

Воспользовавшись формулой (34), а также соотношением (23), и имея виду, что

$$\left|\mathscr{B}_i(q)\frac{\mathfrak{S}n2\pi\lambda H}{\pi b_i\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)\right|\leqslant\frac{H}{b_i},\qquad\qquad |\S_1(\alpha;\mu_iN,H)|\ll\frac{H}{b_i\mathscr{L}}, \tag{35}$$

найдём

$$\S_1(b_1\alpha;N,H)\S_1(b_2\alpha;N,H)=\left(\frac{\mathscr{B}_1(q)}{b_1\mathscr{L}_1}\frac{\mathfrak{S}n2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+\mathbb{R}_{11}\right)\S_1(b_2\alpha;N,H)=$$
$$=\frac{\mathscr{B}_1(q)}{b_1\mathscr{L}_1}\frac{\mathfrak{S}n2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)\left(\frac{\mathscr{B}_2(q)}{b_2\mathscr{L}_1}\frac{\mathfrak{S}n2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+\mathbb{R}_{12}\right)+O\left(\frac{H^2\mathscr{L}^{-194}}{b_1^{5,5}b_2^{5,5}b_3^3}\right)=$$
$$=\frac{\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)}{b_1b_2\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1}\frac{\mathfrak{S}n^22\pi\lambda H}{\pi^2\lambda^2}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)+O\left(\frac{H^2\mathscr{L}^{-194}}{b_1^{5,5}b_2^{5,5}b_3^3}\right).$$

Умножая полученное неравенство на $\S_1(b_3\alpha;N,H)$, и имея в виду, что $\mathfrak{F}(\alpha)=\prod\limits_{i=1}^{3}\S_1(b_i\alpha;N,H)$, а затем воспользовавшись формулами (34) и (35), находим

$$\mathfrak{F}(\alpha)=\frac{\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)}{b_1b_2\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1}\frac{\mathfrak{S}n^22\pi\lambda H}{\pi^2\lambda^2}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)\cdot\S_1(b_3\alpha;N,H)+\mathbb{R}_2=$$
$$=\frac{\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1\mathscr{L}_3}\cdot\frac{\mathfrak{S}n^32\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3}e(\lambda N)+\mathbb{R}_2,\qquad \mathbb{R}_2\ll\frac{H^3\mathscr{L}^{-195}}{b_1^{5,5}b_2^{5,5}b_3^4}.$$

Подставляя значение функции $\mathfrak{F}(\alpha)$, то есть правую часть последней формулы в (31), найдём

$$\begin{aligned}
I(a,q) =&e\left(-\frac{aN}{q}\right)\int\limits_{|\lambda|\leqslant\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3H^{-1}}\left(\frac{\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1\mathscr{L}_3}\cdot\frac{\mathfrak{S}n^32\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3}e(\lambda N)+\mathbb{R}_2\right)e(-\lambda N)d\lambda=\\
=&e\left(-\frac{aN}{q}\right)\frac{\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1\mathscr{L}_3}\cdot J(H)+\mathbb{R}_3,\\
J(H)=&\int\limits_{|\lambda|\leqslant\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3H^{-1}}\frac{\mathfrak{S}n^32\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3}d\lambda,\qquad \mathbb{R}_3\ll\mathbb{R}_2\cdot\frac{\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}^3}{Hb_3^{-1}}\ll\frac{H^2\mathscr{L}^{-192}}{b_1^5b_2^5b_3^3}.
\end{aligned}$$

Подставляя полученное значение интеграла $I(a,q)$ в (30), а затем воспользовавшись явным значением параметров h и A соответственно из формул (27) и (33), получим

$$\begin{aligned}
I(\mathfrak{M}_1)=&\sum_{q\leqslant h}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\left(e\left(-\frac{aN}{q}\right)\frac{\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1\mathscr{L}_3}\cdot J(H)+\mathbb{R}_3\right)=\\
=&\frac{J(H)}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1\mathscr{L}_3}\cdot\sum_{q\leqslant h}\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N)+\mathbb{R}_4,\\
&\mathbb{R}_4\ll h^2\mathbb{R}_3\ll b_1^4b_2^4b_3^2\mathscr{L}^{188}\cdot\frac{H^2}{b_1^5b_2^5b_3^3\mathscr{L}^{192}}=\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}^4},
\end{aligned}\tag{36}$$

где $c_q(-N)$ — сумма Рамануджана. Заменяя сумму по q в (36) близким к ней бесконечным рядом, не зависящим от h, то есть

$$\begin{aligned}
&\sum_{q\leqslant h}\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N)=\mathfrak{S}G(b_1,b_2,b_3,N)-R(b_1,b_2,b_3,N),\\
&\mathfrak{S}G(b_1,b_2,b_3,N)=\sum_{q=1}^{\infty}\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N),\\
&R(b_1,b_2,b_3,N)=\sum_{q>h}\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N),
\end{aligned}\tag{37}$$

получим

$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{\left(\mathfrak{S}G(b_1,b_2,b_3,N)-R(b_1,b_2,b_3,N)\right)J(H)}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_1\mathscr{L}_3}+O\left(\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}^4}\right),\tag{38}$$

5.3. Вычисление интеграла $J(H)$

Воспользовавшись чётностью подинтегральной функции и сделав замену переменных найдём

$$J(H)=2\int\limits_0^{\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3H^{-1}}\frac{\mathfrak{S}n^32\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3}d\lambda=\frac{8H^2}{\pi}\int\limits_{|u|\leqslant2\pi\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3}\frac{\mathfrak{S}n^3u}{u^3}du.$$

Заменим последний интеграл по u близким к нему несобственным интегралом, не зависящим от $\mathscr{L}$, и пользуясь соотношением

$$\int\limits_{2\pi\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3}^{\infty}\frac{\mathfrak{S}n^3u}{u^3}du\ll\frac{1}{(b_1b_2)^{1,5}b_3^3\mathscr{L}^9},$$

получим

$$J(H)=\frac{8H^2}{\pi}\left(\int\limits_0^\infty\frac{\mathfrak{S}n^3u}{u^3}du-\int\limits_{2\pi\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^3}^\infty\frac{\mathfrak{S}n^3u}{u^3}du\right)=\frac{8H^2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\mathfrak{S}n^3u}{u^3}du+O\left(\frac{H^2}{(b_1b_2)^{1,5}\,b_3^3\mathscr{L}^9}\right).$$

Воспользовавшись формулой (см. [30] стр. 174)

$$\int\limits_0^\infty\frac{\mathfrak{S}n^nmu}{u^n}du=\frac{\pi m^{m-1}}{2^n(n-1)1}\left[n^{n-1}-\frac{n}{1!}(n-2)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^{n-1}+\ldots\right],$$

при $m=1$ и $n=3$, найдём

$$J(H)=\frac{8H^2}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{8}+O\left(\frac{H^2}{(b_1b_2)^{1,5}\,b_3^3\mathscr{L}^9}\right)=3H^2+O\left(\frac{H^2}{\mathscr{L}}\right).\qquad(39)$$

5.4. Исследование особого ряда $\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N)$

Функции $\mathscr{B}_i(q)$, $i=1,2,3$ в формуле (37), являвшиеся произведениями мультипликативных функций

$$\mu\left(\frac{q}{(b_i,q)}\right),\qquad\left(\varphi\left(\frac{q}{(b_i,q)}\right)\right)^{-1},$$

сами являются мультипликативными, мультипликативной является и сумма Рамануджана $c_q(-N)$. Найдём значение этих функций при $q=p^\nu$. Согласно лемме 13, имеем

$$c_{p^\nu}(-N)=\begin{cases}\varphi(p^\nu), & \text{если } \nu\leqslant ord_p(N);\\ p^{ord_p(N)}\mu(p^{\nu-ord_p(N)}), & \text{если } \nu\geqslant ord_p(N)+1.\end{cases}\qquad(40)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$c_{p^\nu}(-N)=0,\qquad\text{если}\qquad\nu\geqslant ord_p(N)+2.\qquad(41)$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\mathscr{B}_i(p^\nu)=\frac{\mu\left(\frac{p^\nu}{(b_i,p^\nu)}\right)}{\varphi\left(\frac{p^\nu}{(b_i,p^\nu)}\right)},\qquad\qquad(b_i,p^\nu)=\begin{cases}p^\nu, & \text{если } \nu\leqslant ord_p(b_i);\\ p^{ord_p(b_i)}, & \text{если } \nu\geqslant ord_p(b_i),\end{cases}$$

найдём точное значение функции $\mathscr{B}_i(p^\nu)$. Имеем

$$\mathscr{B}_i(p^\nu)=\frac{\mu(1)}{\varphi(1)}=1,\qquad\text{если}\qquad\nu\leqslant ord_p(b_i);\qquad(42)$$

$$\mathscr{B}_i(p^\nu)=\frac{\mu\left(p^{\nu-ord(b_i)}\right)}{\varphi\left(p^{\nu-ord(b_i)}\right)}=\begin{cases}-\dfrac{1}{p-1}, & \text{если } \nu=ord_p(b_i)+1;\\ 0, & \text{если } \nu\geqslant ord_p(b_i)+2.\end{cases}\qquad(43)$$

Для вычисления значения $\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N)$ при $q=p^\nu$ с помощью формул (40), (41), (42) и (43), множество всех простых чисел $\mathcal{P}$ в зависимости от простых чисел, являющися делителями числа b_i $i=1,2,3$, с учётом условия

$$(b_i,b_j)=1,\qquad(b_i,N)=1,\qquad1\leqslant i\leqslant j\leqslant3,\qquad(44)$$

разобьём на взаимно непересекающиеся подмножества следующим образом

$$\mathcal{P} =\mathcal{P}(b_1) \cup \mathcal{P}(b_2) \cup \mathcal{P}(b_3) \cup \mathcal{P}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3), \tag{45}$$

где $\mathcal{P}(b_i)$ — множество простых чисел, являющиеся делителями числа b_i, $\mathcal{P}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ — множество простых чисел, не являющиеся делителями чисел b_1, b_2 и b_3. Из условия $(b_i, N) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant 3$ следует, что

$$\mathcal{P}(b_i) \cap \mathcal{P}(N) = \varnothing, \tag{46}$$

здесь $\mathcal{P}(N)$ — множество простых чисел, являющиеся делителями числа N. Такое равенство для множество $\mathcal{P}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ не выполняется, то есть оно может иметь с $\mathcal{P}(N)$ непустое пересечение.

5.4.1. Вычисление $\mathscr{B}_i(p^\nu)\mathscr{B}_j(p^\nu)\mathscr{B}_k(p^\nu)c_{p^\nu}(-N)$ при $p \in \mathcal{P}(b_i)$

Если $p \in \mathcal{P}(b_i)$, то из определения этого множества и из формулы (46), имеем

$$ord_p(b_i) \geqslant 1, \qquad ord_p(b_j) = 0, \qquad ord_p(b_k) = 0, \qquad ord_p(N) = 0,$$

а из формул (42), (43) и (40), находим, что

$$\mathscr{B}_i(p) = 1, \qquad \mathscr{B}_j(p^\nu) = \mathscr{B}_k(p^\nu) = \frac{\mu(p^\nu)}{\varphi(p^\nu)}, \qquad c_{p^\nu}(-N) = \mu(p^\nu).$$

Поэтому

$$\mathscr{B}_i(p^\nu)\mathscr{B}_j(p^\nu)\mathscr{B}_k(p^\nu)c_{p^\nu}(-N) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(p-1)^2}, & \text{если } \nu = 1; \\ 0, & \text{если } \nu \geqslant 2. \end{cases} \tag{47}$$

5.4.2. Вычисление $\mathscr{B}_i(p^\nu)\mathscr{B}_j(p^\nu)\mathscr{B}_k(p^\nu)c_{p^\nu}(-N)$ при $p \in \mathcal{P}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$

Если $p \in \mathcal{P}((\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$, то согласно определению, имеем

$$ord_p(b_1) = ord_p(b_2) = ord_p(b_3) = 0,$$

и из формул (42), (43) и (40), находим, что

$$\mathscr{B}_1(p^\nu) = \mathscr{B}_2(p^\nu) = \mathscr{B}_3(p^\nu) = \frac{\mu(p^\nu)}{\varphi(p^\nu)}, \qquad c_p(-N) = \begin{cases} \mu(p), & \text{если } (N, p) = 1; \\ \varphi(p), & \text{если } (N, p) = p. \end{cases}$$

Поэтому

$$\mathscr{B}_1(p^\nu)\mathscr{B}_2(p^\nu)\mathscr{B}_3(p^\nu)c_{p^\nu}(-N) = \begin{cases} \dfrac{1}{(p-1)^3}, & \text{если } \nu = 1 \text{ и } (N, p) = 1; \\ -\dfrac{1}{(p-1)^2}, & \text{если } \nu = 1 \text{ и } (N, p) = p; \\ 0, & \text{если } \nu \geqslant 2. \end{cases} \tag{48}$$

5.4.3. Точная формула для особого ряда $\mathfrak{G}G(b_1, b_2, b_3, N)$

Таким образом из найденных формул (47) и (48) следует, что

$$\mathscr{B}_1(p^\nu)\mathscr{B}_2(p^\nu)\mathscr{B}_3(p^\nu)c_{p^\nu}(-N) = 0, \qquad \text{при} \qquad \nu \geqslant 2, \tag{49}$$

$$\mathscr{B}_1(p^\nu)\mathscr{B}_2(p^\nu)\mathscr{B}_3(p^\nu)c_{p^\nu}(-N) = \begin{cases} \dfrac{1}{(p-1)^3}, & \text{если } (b_1b_2b_3N, p) = 1; \\ -\dfrac{1}{(p-1)^2}, & \text{если } (N, p) = p \text{ и } (b_1b_2b_3, p) = 1, \\ & \text{или } (b_i, p) = p \text{ и } (b_jb_k, p) = 1. \end{cases} \tag{50}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}G(N, b_1, b_2, b_3) &= \sum_{q=1}^{\infty} \mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N) = \prod_p \left(1 + \mathscr{B}_1(p)\mathscr{B}_2(p)\mathscr{B}_3(p)c_p(-N)\right) = \\ &= \prod_{(p, b_1b_2b_3N)=1} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \mid b_1b_2b_3N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \mid b_1b_2b_3N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right). \end{aligned} \tag{51}$$

5.5. Оценка остаточного члена $R(N)$

Из формул (37), (49) и (50) следует, что $R(N, b_1, b_2, b_3)$ состоит из суммы слагаемых $\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N)$, имеющих вид

$$\mathscr{B}_1(q)\mathscr{B}_2(q)\mathscr{B}_3(q)c_q(-N) = \prod_{\substack{p \mid q \\ (p, b_1b_2b_3N)=1}} \frac{1}{(p-1)^3} \prod_{\substack{p \mid q \\ (p, b_1b_2b_3N)=p}} \frac{-1}{(p-1)^2},$$

причём q – число свободное от квадратов, поэтому

$$R(N, b_1, b_2, b_3) = \sum_{q>h} \mu^2(q) \prod_{\substack{p \mid q \\ (p, b_1b_2b_3N)=1}} \frac{1}{(p-1)^3} \prod_{\substack{p \mid q \\ (p, b_1b_2b_3N)=p}} \frac{-1}{(p-1)^2}.$$

Переходя к оценкам, найдём

$$\begin{aligned} R(N, b_1, b_2, b_3) &\leqslant \sum_{q>h} \mu^2(q) \prod_{p \mid q} \frac{1}{(p-1)^2} = \sum_{q>h} \frac{\mu^2(q)}{q^2} \prod_{p \mid q} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{q>h} \frac{\mu^2(q)}{q^2} 4^{\omega(q)} = \sum_{q>h} \frac{\mu^2(q)}{q^2} q^{\frac{\omega(q)\ln 4}{\ln q}}, \end{aligned}$$

где $\omega(q)$ — число различных простых делителей числа q, и воспользовавшись известным неравенством

$$\omega(q) \leqslant \frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q}$$

получим

$$R(N, b_1, b_2, b_3) \leqslant \sum_{q>h} \frac{\mu^2(q)}{q^2} q^{\frac{c_\omega \ln 4}{\ln \ln q}} \leqslant \sum_{q>h} q^{-2 + \frac{c_\omega \ln 4}{\ln \ln q}} \ll \frac{1}{h^{1-\varepsilon}} = \frac{1}{\left(b_1^2 b_2^2 b_3 \mathscr{L}^{94}\right)^{1-\varepsilon}} \ll \frac{1}{\mathscr{L}}, \tag{52}$$

где ε — сколь угодно малое положительное постоянное.

5.6. Вывод асимптотической формулы для $I(\mathfrak{M}_1)$

Подставляя значение $J(H)$ и $\mathfrak{G}G(N)$ соответственно из формул (39) и (51), а также оценку (52) в (38), найдём

$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{1}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\mathscr{L}_3}\left(\mathfrak{G}G(N)+O\left(\frac{1}{\mathscr{L}}\right)\right)\left(3H^2+O\left(\frac{H^2}{\mathscr{L}}\right)\right)+O\left(\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}^4}\right)=$$
$$=\frac{3\mathfrak{G}G(N)\;H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\mathscr{L}_3}+O\left(\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathscr{L}^4}\right). \tag{53}$$

5.7. Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$

Имеем

$$I(\mathfrak{M}_2)=\int\limits_{\mathfrak{M}_2}\prod_{i=1}^{3}\S_1(b_i\alpha;N,H)e(-\alpha N)d\alpha.$$

Переходя к оценкам, а затем воспользовавшись неравенством Коши для интегралов, находим

$$I(\mathfrak{M}_2)\ll\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\S_1(b_3\alpha;N,H)|\int\limits_0^1\prod_{i=1}^{2}|\S_1(b_i\alpha;N,H)|d\alpha=$$
$$=\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\S_1(b_3\alpha;N,H)|\prod_{i=1}^{2}\left(\int\limits_0^1|\S_1(b_i\alpha;N,H)|^2d\alpha\right)^{\frac12}=$$
$$=\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\S_1(b_3\alpha;N,H)|\prod_{i=1}^{2}\left(\sum_{\left|p_1-\frac{N}{3b_i}\right|\leqslant\frac{H}{b_i}}1\right)^{\frac12}=$$
$$=\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\S_1(b_3\alpha;N,H)|\prod_{i=1}^{2}\left(\pi\left(\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i}\right)-\pi\left(\frac{N}{3b_i}-\frac{H}{b_i}\right)\right)^{\frac12}.$$

Применяя к двум последним множителям правой части полученной формулы, с учётом соотношения

$$\frac{2H}{b_3}\geqslant 2(b_1b_2)^{\frac43}b_3^{\frac13}N^{\frac23}\mathscr{L}^{60}=b_3\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac23}\mathscr{L}^{\frac83A+52}\cdot\frac{2\cdot3^{\frac23}}{\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac23}}\geqslant$$
$$\geqslant b_3\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac23}\mathscr{L}^{\frac83A+52}\geqslant\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac{7}{12}+\varepsilon},$$

лемму 10, найдём

$$\pi\left(\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i}\right)-\pi\left(\frac{N}{3b_i}-\frac{H}{b_i}\right)\ll\frac{H}{b_i\mathscr{L}},\qquad i=1;\;2.$$

Следовательно

$$I(\mathfrak{M}_2)\ll\frac{H}{\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}}\cdot\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|\S_1(b_3\alpha;N,H)|. \tag{54}$$

Применяя к сумме $\S_1(b_3\alpha; N, H)$ лемму 12, выражаем её через сумму вида $S_1(b_3\alpha; x, y)$, и имея в виду, что $H \leqslant N(b_1b_2)^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{-4}$, получим

$$\begin{aligned}\S_1(b_3\alpha; N, H) &\ll \frac{1}{\mathscr{L}}\left|S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)\right| + \frac{H^2}{b_3N\mathscr{L}} \ll \\ &\ll \frac{1}{\mathscr{L}}\left|S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)\right| + \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}b_3\mathscr{L}^4}. \qquad (55)\end{aligned}$$

Оценим $\S_1(b_3\alpha; N, H)$ для α из множества $\mathfrak{M}_2$. Если $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, то согласно (28), (27) и (25), имеем

$$\alpha = \frac{a}{q}+\lambda, \qquad (a,q)=1, \qquad \frac{\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}^3}{Hb_3^{-1}} < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau},$$
$$q \leqslant h = \mathscr{L}^{c_1} = b_1^2b_2^2b_3\mathscr{L}^{94}, \qquad \tau = \frac{12H^2}{(N+3H)b_3\mathscr{L}^{c_2}}, \qquad \mathscr{L}^{c_2} = b_1^2b_2^2\mathscr{L}^{94}.$$

К сумме $S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)$ применим теорему 2, полагая

$$b=b_3, \qquad x = \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \qquad y = \frac{2H}{b_3}, \qquad \mathscr{L}^A = b_1^{\frac{1}{2}}b_2^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^3.$$

Проверим выполнение условий теоремы. Воспользовавшись значениями параметров h и A, затем соотношением $H \geqslant (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{60}$, имеем

$$\begin{aligned}&\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac{5}{8}} b_3h\mathscr{L}^{2,25A+81} = \frac{1}{3^{\frac{5}{8}}}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{5}{8}} b_3^{\frac{3}{8}}\cdot b_1^2b_2^2b_3\mathscr{L}^{94}\cdot\left(b_1^{\frac{1}{2}}b_2^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^3\right)^{\frac{9}{4}} N^{\frac{5}{8}} = \\ &= \frac{(b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{60}}{2b_3}\cdot\frac{2}{3^{\frac{5}{8}}}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{5}{8}} b_1^{\frac{41}{24}}b_2^{\frac{41}{24}}b_3^{\frac{1}{24}}N^{-\frac{1}{24}}\mathscr{L}^{\frac{111}{4}} \leqslant \frac{(b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{60}}{2b_3} \leqslant \frac{H}{2b_3}.\end{aligned}$$

Таким образом условие теоремы 2 выполняется, следовательно согласно этой теореме, находим

$$\begin{aligned}S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right) &= \frac{\mu\left(\frac{q}{(b_3,q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b_3,q)}\right)}\frac{\mathfrak{S}n\left(\frac{2\pi\lambda H}{b_3}\right)}{\pi\lambda} e\left(\frac{\lambda N}{3b_3}\right) + O\left(\frac{H}{b_3\mathscr{L}^{3+\frac{\ln b_1+\ln b_2}{2\ln\mathscr{L}}}}\right) \ll \\ &\ll \lambda^{-1} + \frac{H}{b_3\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}^3} \ll \frac{H}{b_3\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}^3}.\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (55), найдём

$$|\S_3(\alpha; \mu_3N, H)| \ll \frac{H}{b_3\sqrt{b_1b_2}\,\mathscr{L}^4}.$$

Подставляя полученную оценку для $|\S_3(\alpha; \mu_3N, H)|$, $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, в (54), получим

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}\mathscr{L}}\cdot\frac{H}{b_3\sqrt{b_1b_2}\,\mathscr{L}^4} \ll \frac{H^2}{b_1b_2b_3\,\mathscr{L}^5}. \qquad (56)$$

5.8. Оценка интеграла $I(\mathfrak{m})$

Имеем

$$I(\mathfrak{m}) = \int\limits_{\mathfrak{m}} \S_1(b_1\alpha; N, H)\S_1(b_2\alpha; N, H)\S_1(b_3\alpha; N, H)e(-\alpha N)d\alpha.$$

Переходя к оценкам, и поступая аналогично как при оценке $I(\mathfrak{M}_2)$, имеем

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2}\mathscr{L}} \cdot \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |\S_1(b_3\alpha; N, H)|. \tag{57}$$

Пользуясь соотношением (55) сумму $\S_1(b_3\alpha; N, H)$, выражая через сумму вида $S_3(\alpha; x, y)$, имеем

$$\S_1(b_3\alpha; N, H) \ll \frac{1}{\mathscr{L}}\left|S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)\right| + \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2} b_3 \mathscr{L}^4}. \tag{58}$$

Оценим $\S_1(b_3\alpha; N, H)$ для α из множества $\mathfrak{m}$. Если $\alpha \in \mathfrak{m}$, то

$$\alpha = \frac{a}{q}+\lambda, \qquad (a,q)=1, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \qquad h < q \leqslant \tau,$$
$$h = \mathscr{L}^{c_1} = b_1^2 b_2^2 b_3 \mathscr{L}^{94}, \qquad \tau = \frac{12H^2}{(N+3H) b_3 \mathscr{L}^{c_2}}, \qquad \mathscr{L}^{c_2} = b_1^2 b_2^2 \mathscr{L}^{94}.$$

К сумме $S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)$ применим теорему 3, полагая

$$b = b_3, \qquad x = \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \qquad y = \frac{2H}{b_3}, \quad A = 3 + \frac{\ln b_1 + \ln b_2}{2\ln\mathscr{L}}.$$

Проверим выполнение условий теоремы. Пользовавшись соотношением $H = (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}^{60}$ и значением параметра A, имеем

$$b_3\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}^{\frac{8}{3}A+52} = (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}^{60} \cdot \frac{1}{3^{\frac{2}{3}} b_3}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{H}{3^{\frac{2}{3}} b_3}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{2}{3}} \leqslant \frac{H}{2b_3},$$
$$b_3 \mathscr{L}^{4A+82} = b_1^2 b_2^2 b_3 \mathscr{L}^{94} = \mathscr{L}^{c_1} = h,$$
$$\frac{\left(\frac{2H}{b_3}\right)^2}{\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}} \mathscr{L}^{-4A-82} = \frac{12H^2}{(N+3H)b_3}\left(b_1^2 b_2^2 b_3 \mathscr{L}^{94}\right)^{-1} = \frac{12H^2}{(N+3H) b_3 \mathscr{L}^{c_2}} = \tau.$$

Таким образом условие теоремы 3 выполняется и согласно этой теореме, находим

$$S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right) \ll \frac{H}{b_3 \mathscr{L}^A} = \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2} b_3 \mathscr{L}^3}.$$

Подставляя полученную оценку в (58), а затем в (57), получим

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2}\mathscr{L}} \cdot \frac{H}{\sqrt{b_1 b_2} b_3 \mathscr{L}^4} = \frac{H^2}{b_1 b_2 b_3 \mathscr{L}^5}. \tag{59}$$

5.9. Асимптотическая формула для $I(N,H)$

Подставляя найденные оценки для $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно из формул (53), (56) и (59) в (29), а затем воспользовавшись формулой (23) и соотношением

$$\frac{1}{\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\mathscr{L}_3} = \frac{1}{(\ln N)^3}\prod_{i=1}^{3}\left(1+\frac{\ln 3b_i}{\ln N - \ln 3b_i}\right) = \frac{1}{\ln^3 N} + O\left(\frac{\ln\ln N}{(\ln N)^4}\right),$$

получим

$$I(N,H) = \frac{3\mathfrak{G}G(b_1,b_2,b_3,N)\ H^2}{b_1 b_2 b_3 \mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\mathscr{L}_3} + O\left(\frac{H^2}{b_1 b_2 b_3 \mathscr{L}^4}\right) = \frac{3\mathfrak{G}G(b_1,b_2,b_3,N)\ H^2}{b_1 b_2 b_3 (\ln N)^3} + O\left(\frac{H^2 \ln\ln N}{b_1 b_2 b_3 (\ln N)^4}\right).$$

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Избранные труды — М: Изд-во АН СССР, 1952 г.
2. Виноградов И. М., Карацуба А. А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 77. С. 4 – 30.
3. Haselgrove C. B. Some theorems in the analitic theory of number // J. London Math. Soc. 1951. V. 26. P. 273 – 277.
4. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. 1990. V. 2. P. 138 – 147.
5. Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. 1991. V. 7, No 3. P. 135 – 170.
6. Jutila M. Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions // Acta Arithmetica. 1991. V. 57. Is. 2. P. 93 – 114.
7. Jia Chao-hua. Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Mathematica Sinica. New ser. 1994. V. 10, No 4. P. 369 – 387.
8. Baker A. On some diophantine inequalities involving primes // J. Reine Angew. Math. 1967. V. 228. P. 166 – 181.
9. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел — Термез. Изд. «Сурхан нашр». 2021. 160 с.
10. Рахмонов З. Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74, вып. 4. С. 564 – 572.
11. Рахмонов З. Х., Мирзоабдугафуров К. И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2008. Т. 51. № 2. С. 83 – 86.
12. Рахмонов З. Х., Азамов А. З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 3. С. 34 – 42.
13. Рахмонов З. Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95, вып. 3. С. 445 – 456.
14. Рахмонов З. Х., Назрублоев Н. Н., Рахимов А. О. Короткие суммы Г. Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1(53). С. 232 – 247.
15. Рахмонов З. Х. Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. .... С. ... – ....
16. Рахмонов З. Х. Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4(81). С. 199 – 223.
17. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук. 2016. Т. 296. С. 220 – 242. https://doi.org/10.1134/S0371968517010174,

18. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x, \chi)$ и ее приложения // Известия РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 – 71.

19. Рахмонов Ф З. Оценка квадратичных тригонометрических с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 3. С. 56 – 60.

20. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459, № 2. С. 156 – 157.

21. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып 4. С. 281 – 305.

22. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.:, Наука, 1983.

23. Дэвенпорт Х. Мультипликативная теория чисел — М.: Наука. 1971 г.

24. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм — М.: Наука. 1987 г. 368 с.

25. Прахар К. Распределение простых чисел — М.: Мир. 1967 г.

26. Рахмонов З. Х. Оценка плотности нулей дзета функции Римана // УМН. 1994. Т. 49, Вып. 1. С. 161 – 162.

27. Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. 1939. Т. 22, № 7. 391 – 393.

28. Виноградов И. М. Особые варианты методов тригонометрических сумм — М.: Наука. 1976 г.

29. Huxley M. N. On the differences between consecutive primes // Inventiones mathematicae. 1972. V. 15. P. 164—170.

30. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, ч. 1. Основные операции анализа — М.: Физматгиз. Изд. 2–е. Перев. с англ. 1963. 342 с.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M., 1952, *Izbrannye trudy. (Russian) [Selected works.]*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow.

2. Vinogradov, I. M., & Karatsuba, A. A., 1986, "The method of trigonometric sums in number theory", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 168, pp. 3-30.

3. Haselgrove C. B., 1951, "Some theorems in the analitic theory of number", *J. London Math. Soc.*, vol. 26, pp. 273-277.

4. Pan Chengdong, Pan Chengbiao, 1990, "On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III)", *Chinese Ann. of Math.*, vol. 2, pp. 138-147.

5. Zhan, T., 1991, "On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes", *Acta Math Sinica. New ser.*, vol. 7, Is. 3, pp. 135 – 170.

6. Jutila, M., 1991, "Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions", *Acta Arithmetica*, vol. 57, Is. 2, pp. 93 – 114.

7. Jia Chao-hua, 1994, "Three primes theorem in a short interval (VII)//, *Acta Mathematica Sinica. New ser.*, vol. 10, No 4, pp. 369 – 387.

8. Baker A., 1967, "On some diophantine inequalities involving primes", *J. Reine Angew. Math.*, vol. 228, pp. 166 – 181.

9. Allakov I., 2021, *Otsenka trigonometricheskikh summ i ikh prilozheniya k resheniyu nekotorykh additivnykh zadach teorii chisel. (Russian) [Estimation of exponential sums and their applications to the solution of some additive problems in number theory]*, Termez. Ed. "Surkhan nashr".

10. Rakhmonov Z. Kh., 2003, "Estermann's ternary problem with almost equal summands", *Mathematical Notes*, vol. 74, Is. 4, pp. 534-542.

11. Rakhmonov Z. Kh., & Mirzoabdugafurov K. I., 2008, "Waring's problem for cubes with almost equal summands", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 51, no 2, pp. 83-86, (in Russian).

12. Rakhmonov Z. Kh., & Azamov A. Z., 2011, "An asymptotic formula in Waring's problem for fourth powers with almost equal summands", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 54, no 3, pp. 34-42, (in Russian).

13. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, "The Estermann cubic problem with almost equal summands", *Mathematical Notes*, vol. 95, Is. 3-4, pp. 407–417. doi.org/10.1134/S0001434614030122.

14. Rakhmonov Z. Kh., & Nazrubloev N. N., Rakhimov A.O., 2015, "Short Weyl sums and their applications", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, Is. 1, pp. 232–247, (in Russian).

15. Rakhmonov, Z. Kh., 2023, "Generalization of Waring's problem for nine almost proportional cubes", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, Is. ..., pp. ... – ..., (in Russian).

16. Rakhmonov, Z. Kh., 2021, "Estimates of short exponential sums with primes in major arcs", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, Is. 4(81), pp. 199 – 223, (in Russian).

17. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2017, "Short Cubic Exponential Sums over Primes", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 211 – 233. doi.org/10.1134/S0081543817010175

18. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, "Theorem on the mean value of $\psi(x,\chi)$ and its applications", *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 43, Is. 1, pp. 49 – 64. doi.org/10.1070/IM1994v043n01ABEH001558

19. Rahmonov, F. Z., 2011, "Estimate of quadratic trigonometric sums with prime numbers", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 3, pp. 56 – 60.

20. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2014, "Sum of short exponential sums over prime numbers", *Doklady Mathematics*, vol. 90, No 3, pp. 699–700. doi.org/10.1134/S1064562414070138.

21. Rakhmonov Z. Kh., Rahmonov F. Z., 2019, "Short cubic exponential sums with Möbius function", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 20. № 4(72). pp. 281 – 305, doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-281-305.

22. Karatsuba A. A., 1993, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, xiv+222 pp.

23. Davenport H., 1967, *Multiplicative Number Theory*, Markham Publishing Company, Chigago.

24. Arkhipov G. I. & Chubarikov V. N. & Karatsuba A. A. 2004. *Trigonometric sums in number theory and analysis*, Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 554 p.

25. Prachar K., 1957, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag.

26. Rakhmonov Z. Kh., 1994, “Estimate of the density of the zeros of the Riemann zeta function”, *Russian Math. Surveys*, vol. 49, is. 2, pp. 168–169.

27. Vinogradov, I. M., 1976, *Osobye varianty metoda trigonometricheskikh summ (Russian) [Special variants of the method of trigonometric sums]*, Izdat. “Nauka”, Moscow. 119 p.

28. Mardjhanashvili, K. K., 1939, “An estimate for an arithmetic sum”, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 22, no 7, pp. 391–393.

29. Huxley M. N., 1972, “On the differences between consecutive primes”, *Inventiones mathematicae*, vol. 15, pp. 164 – 170.

30. Whittaker G. E.,& Watson T. N., 1915, *A Course of Modern Analysis. Part 1. The processes of analysis. Part 2. The transcendental functions*, Cambridge, Cambridge University Press, 620.

Получено: 20.06.2023
Принято в печать: 11.12.2023