ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 4.

УДК 517.44

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-239-251

Матричные интегральные преобразования для моделирования волновых процессов в кусочно-однородных средах

А. И. Нижников, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко

Нижников Александр Иванович — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru

Яремко Олег Эммануилович — Московский государственный технический университет «Станкин» (г. Москва).

e-mail: yaremki8@gmail.com

Яремко Наталья Николаевна — Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» (г. Москва).

e-mail: yaremki@yandex.ru

Аннотация

В статье развивается теория матричных интегральных преобразований Фурье на основе дифференциального оператора с кусочно-постоянными матричными коэффициентами. Дается определение матричного преобразования Фурье, изучаются его свойства и приложения к моделированию взаимосвязанных волновых процессов в кусочно-однородных средах. Доказана формула обращения для матричного интегрального преобразования Фурье. Выявлены существенные отличия от скалярного случая. Развита техника применения матричного преобразования Фурье для решения взаимосвязанных смешанных краевых задач для систем дифференциальных уравнений гиперболического типа с матричными кусочно-постоянными коэффициентами. Найдено решение векторного аналога задачи о распространении волн в бесконечной струне с двумя участками различной плотности. Найдено векторный аналог формулы Даламбера. Получено решение смешанной начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений параболического типа, описывающей n -компонентную модель взаимосвязанного процесса тепломассопереноса в двухслойной среде.

Ключевые слова: Матричное интегральное преобразование Фурье, формула Даламбера, матричная экспонента, кусочно-однородная среда.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

А. И. Нижников, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко. Матричные интегральные преобразования для моделирования волновых процессов в кусочно-однородных средах // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 239–251.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 517.44

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-239-251

Generalized Laplace Transform Based on the Differentiation Operator With Piecewise Constant Coefficients

A. I. Nizhnikov, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko

Nizhnikov Alexander Ivanovich — Moscow State Pedagogical University (Moscow).*e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru***Yaremko Oleg Emmanuilovich** — Moscow State Technical University “Stankin” (Moscow).*e-mail: yaremki8@gmail.com***Yaremko Natalya Nikolaevna** — National Research Technological University “MISiS” (Moscow).*e-mail: yaremki@yandex.ru***Abstract**

The paper develops the theory of matrix integral Fourier transforms based on a differential operator with piecewise constant matrix coefficients. The definition of the matrix Fourier transform is given, its properties and applications to the modeling of interrelated wave processes in piecewise homogeneous media are studied. An inversion formula for the matrix integral Fourier transform is proved. Significant differences from the scalar case are revealed. A technique for applying the matrix Fourier transform to solving interrelated mixed boundary value problems for systems of hyperbolic differential equations with matrix piecewise constant coefficients is developed. A solution is found for the vector analog of the problem of wave propagation in an infinite string with two regions of different density. A vector analogue of the d’Alembert formula is found. A solution is obtained for a mixed initial-boundary value problem for a system of differential equations of parabolic type, which describes an n component model of an interconnected process of heat and mass transfer in a two-layer media.

Keywords: Matrix integral Fourier transform, d’Alembert formula, matrix exponential, piecewise homogeneous media

Bibliography: 19 titles.

For citation:

A. I. Nizhnikov, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko, 2023, “Matrix integral transforms for modeling wave processes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 239–251.

1. Введение

Если рассматривать колебания неограниченной струны, то нет необходимости учитывать влияния отраженных волн. Тем самым процесс моделирования колебаний струны существенно упрощается. Формула Даламбера для решения задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны послужила основой моделирования волновых явлений в неограниченных средах. Естественной представляется задача Коши для уравнения колебаний бесконечной струны с двумя участками различной плотности. В этом случае возникают так называемые внутренние граничные условия. Формальное решение такой задачи в терминах преобразования Фурье было найдено еще в 80-годы 20 века в работе [9]. Однако такое решение нельзя признать удовлетворительным, т.к. ответ приводится в терминах преобразования Фурье, тогда как в формуле Даламбера решение выражается непосредственно через начальные условия. Только

в начале 21 века в работах В.А. Ильина [4, 5] было найдено обобщение формулы Даламбера для неограниченной струны с двумя участками различной плотности, в виде несодержащем неопределенных интегралов. В векторном случае результаты до сих пор не были известны, хотя многие проблемы математического моделирования приводят к взаимосвязанным системам дифференциальных уравнений гиперболического или параболического типа [10, 14]. В.А. Ильин в своих работах развил метод бегущих волн Даламбера [16]. Метод бегущих волн оказался успешным для исследования линейных и нелинейных волновых процессов. Однако метод трудно реализуем при изучении n компонентных взаимосвязанных моделей. Причина состоит в том, что необходимо рассматривать $2n$ бегущих волн и также учитывать отражение от внутренней границы. Поэтому авторы выбрали метод матричных интегральных преобразований [18]. Таким образом, цель статьи развить технику применения матричных интегральных преобразований для моделирования волновых процессов в двухслойных средах. Решающее значение оказало понятие вектор-функции матричного аргумента.

2. Методы

2.1. Вектор-функция матричного аргумента

Согласно спектральной теореме [2], эрмитова матрица обладает только вещественными собственными значениями и всегда может быть приведена к диагональному виду с помощью унитарной матрицы P . Пусть матрица A может быть приведена к диагональному виду, то есть мы можем найти матрицу P и диагональную матрицу Λ такие, что $A = P^{-1}\Lambda P$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пусть на действительной оси задана функция $y = \varphi(x)$. В книге Гантмахера [2] функция матричного аргумента определена формулой $\varphi(Ax) = P^{-1}\Lambda(x)P$, где матрица $\Lambda(x)$ имеет вид

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1 x) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \varphi(\lambda_n x) \end{pmatrix}.$$

В исследовании свойств матричных интегральных преобразований Фурье существенную роль будет отведено понятию вектор-функции матричного аргумента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть на действительной оси задана вектор функция

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \cdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Вектор-функцией матричного аргумента Ax назовем выражение

$$f(Ax) = f_1(Ax)e_1 + \cdots + f_n(Ax)e_n,$$

здесь e_k — единичный вектор с единицей в k -ой координате.

Пример 1. Пусть вектор-функция $f(x)$ и матрица A формулами

$$f(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

найти $f(Ax)$.

Из определения 1 имеем

$$\begin{aligned} f(Ax) &= A^2 x^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A^3 x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x^3 = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} x^3 = \begin{pmatrix} 5x^2 + 8x^3 \\ 3x^2 + 5x^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.2. Матричные интегральные преобразования Фурье

2.2.1. Матричные интегральные преобразования Фурье на действительной оси

DEFINITION 1. Пусть все собственные значения матрицы A положительны, различны и вектор-функция

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

такова, что для вектор-функции $f(Ax)$ существует интегральное преобразование Фурье [18]. Матричным преобразованием Фурье на действительной оси назовём выражение

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(A\xi) d\xi. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1. Справедлива формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iA^{-1}\lambda x} F(\lambda) d\lambda. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (1) и формулы обращения для классического преобразования Фурье, имеем

$$f(Ax) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} F(\lambda) d\lambda$$

Воспользуемся определением 1: найдем в левой и правой частях последней формулы вектор-функцию переменного $A^{-1}x$. Учитывая, что $f(x) = f(A(A^{-1}x))$ получим формулу обращения

$$f(x) = f(A(A^{-1}x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iA^{-1}\lambda x} F(\lambda) d\lambda.$$

Замечание. Справедлива формула для изображения Фурье с матричным ядром

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA^{-1}\lambda\xi} A^{-1} f(\xi) d\xi. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулу (3) достаточно установить для функции скалярного аргумента $\varphi(x)$. Тогда получим равенство

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} \varphi(A\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} P^{-1} \varphi(\lambda_j \xi) E_j P d\xi,$$

где E_j - квадратная матрица у которой все элементы равны нулю кроме $e_{jj} = 1$. В j -ом слагаемом выполним замену переменного $\lambda_j \xi = \xi_j$, тогда получим

$$\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi_j \lambda_j^{-1}} P^{-1} \varphi(\xi_j) E_j P \lambda_j^{-1} d\xi_j.$$

Обозначим переменную интегрирования одной и той же буквой ξ получим

$$\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi\lambda_j^{-1}} P^{-1}\varphi(\xi) E_j P \lambda_j^{-1} d\xi.$$

На основании определения скалярной функции матричного аргумента имеем формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA^{-1}\lambda\xi} A^{-1}\varphi(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi\lambda_j^{-1}} P^{-1} E_j P P^{-1} E_j P \lambda_j^{-1} \varphi(\xi) d\xi.$$

Учитывая, что $PP^{-1} = E, E_j \cdot E_j = E_j$ доказательство закончим.

2.2.2. Матричные интегральные преобразования Фурье на составной действительной оси

Моделирование взаимосвязанных волновых процессов требует развития спектральной теории Штурма-Лиувилля [12]. Рассмотрим матричнозначную задачу Штурма Лиувилля на составной оси $I_1 = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$\begin{aligned} A_1^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} &= \lambda^2 \varphi_1(x, \lambda), x \in (-\infty, 0); \\ A_2^2 \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} &= \lambda^2 \varphi_2(x, \lambda), x \in (0, \infty) \end{aligned} \tag{4}$$

с внутренним граничным условием в точке $x = 0$

$$\varphi_1 = \varphi_2, \alpha_1 \partial_x \varphi_1 = \alpha_2 \partial_x \varphi_2, x = 0 \tag{5}$$

с краевым условием на бесконечности

$$\|\varphi_i(x, \lambda)\| < \infty, \tag{6}$$

здесь $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ - квадратные матрицы размера $n \times n$ все собственные значения которых положительны. Для конструкции матричных интегральных преобразований Фурье на составной действительной оси будем использовать следующую нормировку

$$\begin{aligned} \varphi_1(0, \lambda) &= 2(E + \chi)^{-1}, \varphi_2(0, \lambda) = 2(E + \chi)^{-1}, \\ \partial_x \varphi_1(0, \lambda) &= 2iA_1^{-1}\lambda(E + \chi)^{-1}, \partial_x \varphi_2(0, \lambda) = 2iA_2^{-1}\lambda\chi(E + \chi)^{-1}, \end{aligned}$$

где E единичная матрица, $\chi = A_2\lambda_2^{-1}\lambda_1A_1^{-1}$. Мы установим ниже, что матричнозначная функция

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_1(x, \lambda)H(-x) + \varphi_2(x, \lambda)H(x)$$

будет ядром обратного матричного интегрального преобразования Фурье, $H(x)$ — функция Хевисайда [17].

Пусть для вектор-функции $f(x) = f_1(x)H(-x) + f_2(x)H(x)$ существует скалярное преобразование Фурье [19].

DEFINITION 2. Матричным интегральным преобразованием Фурье на составной действительной оси $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ вектор-функции $f(x)$ назовем

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \left((E + \chi)e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi} - (E - \chi)e^{iA_1^{-1}\lambda\xi} \right) A_1^{-1} f_1(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^{\infty} e^{-i\lambda A_2^{-1}\xi} A_2^{-1} f_2(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{7}$$

Справедливы формулы обращения

ТЕОРЕМА 2. Если $F(\lambda)$ образ матричного интегрального преобразования Фурье, то оригинал вычисляется по формулам

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\infty} \varphi(x, \lambda) F(\lambda) d\lambda.$$

В развернутом виде формулы обращения записываются для каждого из промежутков $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ отдельно:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iA_1^{-1}\lambda x} 2(E + \chi)^{-1} F(\lambda) d\lambda, x \in (-\infty, 0), \\ f_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iA_2^{-1}\lambda x} + e^{-iA_2^{-1}\lambda x} (E - \chi)(E + \chi)^{-1} \right) F(\lambda) d\lambda, x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Доказательство. В основе лежит формула для матричной экспоненты для случая в котором все собственные значения матриц A_k положительны и среди них нет кратных:

$$e^{iA_k^{-1}\lambda x} = \sum_{j=1}^n P_k^{-1} E_j P_k e^{i\lambda_{kj}^{-1}\lambda x}.$$

Кроме того доказательство опирается на формулу обращения (2) матричного интегрального преобразования на действительной оси:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iA^{-1}\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda A^{-1}\xi} A^{-1} f(\xi) d\xi d\lambda$$

Покажем справедливость формулы вычисления оригинала для промежутка $(-\infty, 0)$. Имеем,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iA_1^{-1}\lambda x} 2(E + \chi)^{-1} F(\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iA_1^{-1}\lambda x} 2(E + \chi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (E + \chi) e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi} A_1^{-1} f_1(\xi) H(-\xi) d\xi d\lambda \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iA_1^{-1}\lambda x} 2(E + \chi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (E - \chi) e^{iA_1^{-1}\lambda\xi} A_1^{-1} f_1(\xi) H(-\xi) d\xi d\lambda \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iA_1^{-1}\lambda x} 2(E + \chi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA_2^{-1}\lambda\xi} A_2^{-1} f_2(\xi) H(\xi) d\xi d\lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

Первое слагаемое в формуле (8) по теореме разложения равно $f_1(x) H(-x)$. Докажем, что остальные слагаемые равны нулю. Для второго слагаемого в формуле (8) получим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n T^{-1} E_j T 2(E + \chi)^{-1} (E - \chi) \cdot \\ & \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_{1j}^{-1}\lambda A_1^{-1} A_1 x} e^{iA_1^{-1}\lambda\xi} A_1^{-1} f_1(\xi) H(\xi) d\xi d\lambda = \\ & = \sum_{j=1}^n T^{-1} E_j T 2(E + \chi)^{-1} f_1(-\lambda_{1j}^{-1} A_1 x) H(\lambda_{1j}^{-1} A_1 x) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично для третьего слагаемого в формуле (8) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n T^{-1} E_j T 2(E + \chi)^{-1} \cdot \\ & \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_{1j}^{-1}\lambda A_2^{-1} A_2 x} e^{-i\lambda A_2^{-1}\xi} A_2^{-1} f_2(\xi) H(\xi) d\xi = \\ & = \sum_{j=1}^n T^{-1} E_j T 2(E + \chi)^{-1} f_2(\lambda_{1j}^{-1} A_2 x) H(\lambda_{1j}^{-1} A_2 x) = 0. \end{aligned}$$

Справедливость теоремы разложения для второго промежутка $(0, \infty)$ доказывается без привлечения новых идей.

3. Векторная формула Даламбера для векторного уравнения колебаний на неограниченной оси

3.1. Неограниченная однородная среда

Рассмотрим сепаратную систему уравнений, описывающую n компонентную модель взаимосвязанного волнового процесса в неограниченной среде

$$u_{tt} = A^2 u_{xx}, t > 0, x \in (-\infty, \infty)$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = f(x), u'_t(0, x) = g(x).$$

Векторный аналог формулы Даламбера имеет вид

$$u(t, x) = \frac{f(Ex + At) + f(Ex - At)}{2} + \int_0^t \frac{g(Ex + A\tau) + g(Ex - A\tau)}{2} d\tau. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В образах Фурье получим задачу Коши для системы обыкновенных несвязанных дифференциальных уравнений

$$U_{tt} = -\lambda^2 U, t > 0$$

с начальными условиями

$$U(0, \lambda) = F(\lambda), U'_t(0, \lambda) = G(\lambda).$$

В изображениях Фурье решение имеет вид

$$U(t, \lambda) = \cos \lambda t F(\lambda) + \int_0^t \cos \lambda \tau d\tau G(\lambda).$$

Формула обращения (2) приводит к векторному обобщению формулы Даламбера

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iA^{-1}\lambda At} + e^{-iA^{-1}\lambda At}}{2} e^{iA^{-1}\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA^{-1}\lambda \xi} A^{-1} f(\xi) d\xi d\lambda = \\ &= \frac{f(Ex + At) + f(Ex - At)}{2} + \int_0^t \frac{g(Ex + A\tau) + g(Ex - A\tau)}{2} d\tau. \end{aligned}$$

Замечание. В скалярном случае выполняется равенство

$$\int_0^t \frac{g(Ex + A\tau) + g(Ex - A\tau)}{2} d\tau = \frac{1}{2A} \int_{x-At}^{x+At} g(\xi) d\xi.$$

Таким образом, при $n = 1$ из (9) получаем формулу Даламбера [13].

3.2. Неограниченная двухслойная среда

Рассмотрим сепаратную систему уравнений гиперболического типа, описывающую N компонентную модель волнового процесса в двухслойной среде [8]

$$u_{itt} = A_i^2 u_{ixx}, t > 0, x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \quad (10)$$

с начальными условиями

$$u_i(0, x) = f_i(x), u'_{it}(0, x) = 0, \quad (11)$$

с внутренними граничными условиями

$$u_1 = u_2, \lambda_1 \partial_x u_1 = \lambda_2 \partial_x u_2, x = 0. \quad (12)$$

Пусть $F(\lambda)$ – изображение Фурье начального условия (6), т.е.

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \left((E + \chi) e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi} - (E - \chi) e^{iA_1^{-1}\lambda\xi} \right) A_1^{-1} f_1(\xi) d\xi + \\ + \int_0^{\infty} e^{-i\lambda A_2^{-1}\xi} A_2^{-1} f_2(\xi) d\xi.$$

Непосредственная проверка показывает, что решение векторной смешанной краевой задачи (5)-(7) имеет вид

$$u_1(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda t e^{iA_1^{-1}\lambda x} 2(E + \chi)^{-1} F(\lambda) d\lambda, \\ u_2(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda t \left(e^{iA_2^{-1}\lambda x} (E + \chi) + e^{-iA_2^{-1}\lambda x} (E - \chi) \right) (E + \chi)^{-1} F(\lambda) d\lambda.$$

Преобразуем приведенные выражения. Воспользуемся формулой Эйлера для косинуса $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ и выражением для изображения Фурье $F(\lambda)$. В итоге получим:

$$u_1(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} e^{iA_1^{-1}\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi} A_1^{-1} f_1(\xi) H(-\xi) d\xi d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} e^{iA_1^{-1}\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi} A_1^{-1} f_1(\xi) H(-\xi) d\xi d\lambda + \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} e^{iA_1^{-1}\lambda x} (E + \chi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (E - \chi) e^{iA_1^{-1}\lambda\xi} A_1^{-1} f_1(\xi) H(-\xi) d\xi d\lambda + \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} e^{iA_1^{-1}\lambda x} (E + \chi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (E - \chi) e^{iA_1^{-1}\lambda\xi} A_1^{-1} f_1(\xi) H(-\xi) d\xi d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} e^{iA_1^{-1}\lambda x} 2(E + \chi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda A_2^{-1}\xi} A_2^{-1} f_2(\xi) H(\xi) d\xi d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} e^{iA_1^{-1}\lambda x} 2(E + \chi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda A_2^{-1}\xi} A_2^{-1} f_2(\xi) H(\xi) d\xi d\lambda$$

Изучим слагаемые в формуле для $u_1(t, x)$. Первое слагаемое вычисляется на основе формулы обращения (2) матричного интегрального преобразования Фурье на действительной оси

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} e^{iA_1^{-1}\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi} A_1^{-1} f_1(\xi) H(-\xi) d\xi d\lambda = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} e^{iA_1^{-1}\lambda(Ex + A_1 t)x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi} A_1^{-1} f_1(\xi) H(-\xi) d\xi d\lambda = l \\ = f_1(Ex + A_1 t) H(-(Ex + A_1 t)).$$

Аналогично вычисляется второе слагаемое

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} e^{iA_1^{-1}\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iA_1^{-1}\lambda\xi} A_1^{-1} f_1(\xi) H(-\xi) d\xi d\lambda = \\ = f_1(Ex - A_1 t) H(-(Ex - A_1 t)).$$

По той же схеме для третьего слагаемого получим выражение

$$\sum_{j=1}^n P_1^{-1} E_j P_1 2(E + \chi)^{-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (E - \chi) \cdot \\ \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda A_1^{-1} A_1 t} e^{i\lambda_{1j}^{-1} \lambda A_1^{-1} A_1 x} e^{-i\lambda A_1^{-1} \lambda \xi} A_1^{-1} f_1(\xi) H(-\xi) d\xi d\lambda = \\ = \sum_{j=1}^n P_1^{-1} E_j P_1 2(E + \chi)^{-1} (E - \chi) f_1(\lambda_{1j}^{-1} A_1 x + A_1 t) H\left(-\lambda_{1j}^{-1} A_1 x - A_1 t\right).$$

Четвертое слагаемое можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^n P_1^{-1} E_j P_1 2(E + \chi)^{-1} (E - \chi) f_1(\lambda_{1j}^{-1} A_1 x - A_1 t) H\left(-\lambda_{1j}^{-1} A_1 x + A_1 t\right).$$

Похожим образом, для пятого слагаемого получим представление

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n P_1^{-1} E_j P_1 2(E + \chi)^{-1} \cdot \\ & \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda A_2^{-1} A_2 t} e^{i\lambda_{1j}^{-1} \lambda A_2^{-1} A_2 x} e^{-i\lambda A_2^{-1} \xi} A_2^{-1} f_2(\xi) H(\xi) d\xi d\lambda = \\ & = \sum_{j=1}^n P_1^{-1} E_j P_1 2(E + \chi)^{-1} f_2(\lambda_{1j}^{-1} A_2 x + A_2 t) H(\lambda_{1j}^{-1} A_2 x + A_2 t). \end{aligned}$$

Наконец, для шестого слагаемого имеем выражение

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda A_2^{-1} A_2 t} e^{i\lambda_{1j}^{-1} \lambda A_2^{-1} A_2 x} 2(E + \chi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda A_2^{-1} \xi} A_2^{-1} f_2(\xi) H(\xi) d\xi d\lambda = \\ & = \sum_{j=1}^n P_1^{-1} E_j P_1 2(E + \chi)^{-1} f_2(\lambda_{1j}^{-1} A_2 x - A_2 t) H(\lambda_{1j}^{-1} A_2 x - A_2 t). \end{aligned}$$

Суммируя, получаем итоговую формулу для решения задачи (5)-(7)

$$\begin{aligned} u_1(t, x) = & \frac{f_1(Ex + A_1 t)H(-(Ex + A_1 t)) + f_1(Ex - A_1 t)H(-(Ex - A_1 t))}{2} + \\ & + \frac{\sum_{j=1}^n P_1^{-1} E_j P_1 2(E + \chi)^{-1} f_2(\lambda_{1j}^{-1} A_2 x + A_2 t) H(\lambda_{1j}^{-1} A_2 x + A_2 t)}{2} + \\ & + \frac{\sum_{j=1}^n P_1^{-1} E_j P_1 2(E + \chi)^{-1} f_2(\lambda_{1j}^{-1} A_2 x - A_2 t) H(\lambda_{1j}^{-1} A_2 x - A_2 t)}{2} + \\ & + \frac{\sum_{j=1}^n P_1^{-1} E_j P_1 2(E + \chi)^{-1} (E - \chi) f_1(\lambda_{1j}^{-1} A_1 x + A_1 t) H(-\lambda_{1j}^{-1} A_1 x - A_1 t)}{2} + \\ & + \frac{\sum_{j=1}^n P_1^{-1} E_j P_1 2(E + \chi)^{-1} (E - \chi) f_1(\lambda_{1j}^{-1} A_1 x - A_1 t) H(-\lambda_{1j}^{-1} A_1 x + A_1 t)}{2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Аналогично получим формулу для второй компоненты решения смешанной краевой задачи Коши $u_2(t, x)$:

$$\begin{aligned} u_2(t, x) = & \frac{f_2(Ex + A_2 t)H((Ex + A_2 t)) + f_2(Ex - A_2 t)H((Ex - A_2 t))}{2} + \\ & + \frac{\sum_{j=1}^n P_2^{-1} E_j P_2 2\chi(E + \chi)^{-1} f_1(-\lambda_{2j}^{-1} A_1 x - A_1 t) H(-\lambda_{2j}^{-1} A_1 x - A_1 t)}{2} + \\ & + \frac{\sum_{j=1}^n P_2^{-1} E_j P_2 2\chi(E + \chi)^{-1} f_1(-\lambda_{2j}^{-1} A_1 x + A_1 t) H(-\lambda_{2j}^{-1} A_1 x + A_1 t)}{2} - \\ & - \frac{\sum_{j=1}^n P_2^{-1} E_j P_2 2(E + \chi)^{-1} (E - \chi) f_2(\lambda_{2j}^{-1} A_2 x + A_2 t) H(-\lambda_{2j}^{-1} A_2 x - A_2 t)}{2} - \\ & - \frac{\sum_{j=1}^n P_2^{-1} E_j P_2 2(E + \chi)^{-1} (E - \chi) f_2(\lambda_{2j}^{-1} A_2 x - A_2 t) H(-\lambda_{2j}^{-1} A_2 x + A_2 t)}{2}. \end{aligned} \tag{14}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. *Решение начально-краевых задач*

$$\begin{cases} v_{itt} - a_i^2 v_{ixx} = 0, 0 < t < T, x \in (-\infty, \infty) \cup (0, \infty), \\ v_i(0, x) = 0, x \in (-\infty, \infty) \cup (0, \infty), i = 1, 2; \\ v'_i(0, x) = f_i(x), x \in (-\infty, \infty) \cup (0, \infty), i = 1, 2; \\ vu_1(t, 0) = v_2(t, 0), 0 < t < T, \\ \lambda_1 v'_{1x}(t, 0) = \lambda_2 v'_{2x}(t, 0), 0 < t < T. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{itt} - a_i^2 u_{ixx} = 0, 0 < t < T, x \in (-\infty, \infty) \cup (0, \infty), \\ u_i(0, x) = f_i(x), x \in (-\infty, \infty) \cup (0, \infty), i = 1, 2; \\ u'_i(0, x) = 0, x \in (-\infty, \infty) \cup (0, \infty), i = 1, 2; \\ u_1(t, 0) = u_2(t, 0), 0 < t < T, \\ \lambda_1 u'_{1x}(t, 0) = \lambda_2 u'_{2x}(t, 0), 0 < t < T. \end{cases}$$

связаны формулами

$$v_i(t, x) = \int_0^t u_i(z, x) dz, i = 1, 2.$$

значит, принцип суперпозиции позволяет получить решение задачи Коши с начальными условиями общего вида.

СЛЕДСТВИЕ 1. Разобьём множество $t > 0, -\infty < x < \infty$ на непересекающиеся части

$$\begin{aligned} D_1 &= \{t > 0, x < 0, x - a_1 t < 0, x + a_1 t < 0\}, \\ D_2 &= \{t > 0, x < 0, x - a_1 t < 0, x + a_1 t > 0\}, \\ D_3 &= \{t > 0, x > 0, x - a_2 t < 0, x + a_2 t > 0\}, \\ D_4 &= \{t > 0, x - a_2 t > 0, x + a_2 t > 0\}. \end{aligned}$$

В скалярном случае $n = 1$ формулы (13)-(14) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= \frac{f_1(x+A_1t)+f_1(x-A_1t)}{2}, (t, x) \in D_1, \\ u_1(t, x) &= \frac{f_1(x-A_1t)}{2} + (1+\chi)^{-1}f_2(A_1^{-1}A_2x + A_2t) - \\ &- \frac{1}{2}(1+\chi)^{-1}(1-\chi)f_1(-x - A_1t), (t, x) \in D_2, \\ u_2(t, x) &= \frac{f_2(x-A_2t)}{2} + \chi(1+\chi)^{-1}f_2(A_2^{-1}A_1x + A_1t) + \\ &+ \frac{1}{2}(1+\chi)^{-1}(1-\chi)f_1(-x - A_2t), (t, x) \in D_3, \\ u_2(t, x) &= \frac{f_2(x+A_2t)+f_2(x-A_2t)}{2}, (t, x) \in D_4. \end{aligned}$$

Полученные формулы совпадают с установленными ранее методом бегущей волны формулами В.А. Ильина из [4, 5].

4. Обсуждение

Представленные в работе матричные интегральные преобразования Фурье с кусочно тригонометрическим ядром в работах [1, 15, 19] были распространены на случай неограниченных и полуограниченных сред с двумя и более участками однородности, однако полученные в них решения формулировались в терминах прямого и обратного преобразований Фурье. Следовательно, в статье была решена актуальная проблема поиска матричных аналогов формулы Даламбера. Эти интегральные преобразования можно применять не только для моделирования волновых взаимосвязанных процессов. Метод будет успешен при моделировании явлений взаимосвязанного тепломассопереноса в многослойных средах [8, 11]. Получающие при применении метода результаты представляют обобщение известных для скалярного случая [7, 9, 10]. Среди возможных приложений метода матричных интегральных преобразований отметим задачи моделирования стационарных кусочно-однородных физических полей [7]. Отметим, что матричное интегральное преобразование действует по пространственной переменной, поэтому метод интегральных преобразований применим к гиперболическим, параболическим и эллиптическим системам уравнений в частных производных моделирующим процессы в неограниченных двухслойных средах. Для примера рассмотрим систему уравнений параболического типа, описывающую n компонентную модель взаимосвязанного процесса тепломассопереноса в двухслойной среде

$$u_{it} = A_i^2 u_{ixx}, t > 0, x \in (-\infty, 0) \cup (\infty) \quad (15)$$

с начальными условиями

$$u_i(0, x) = f_i(x), \quad (16)$$

с внутренними граничными условиями

$$u_1 = u_2, \lambda_1 \partial_x u_1 = \lambda_2 \partial_x u_2, x = 0. \quad (17)$$

Применим матричное интегральное преобразование Фурье (2). В образах Фурье получим задачу Коши для системы обыкновенных несвязанных дифференциальных уравнений

$$U_t = -\lambda^2 U, t > 0$$

с начальными условиями

$$U(0, \lambda) = F(\lambda).$$

В изображениях Фурье решение имеет вид

$$U(t, \lambda) = e^{\lambda^2 t} F(\lambda).$$

Возвращаясь к оригиналам, с помощью техники развитой выше, получим решение задачи (15)-(17)

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \left(e^{-\frac{(A_1^{-1}x - E\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(A_1^{-1}x + E\xi)^2}{4t}} (E - \chi)(E + \chi)^{-1} \right) f_1(A_1\xi) d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(A_1^{-1}x - E\xi)^2}{4t}} 2(E + \chi)^{-1} f_2(A_2\xi) d\xi, \quad x < 0; \\ u_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(A_2^{-1}x - E\xi)^2}{4t}} 2\chi(E + \chi)^{-1} f_1(A_1\xi) d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(A_2^{-1}x - E\xi)^2}{4t}} + e^{-\frac{(A_2^{-1}x + E\xi)^2}{4t}} (E - \chi)(E + \chi)^{-1} \right) f_2(A_2\xi) d\xi, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Авторы предполагают продолжить распространение метода матричных интегральных преобразований и метода матричных операторов преобразования на случай более сложных краевых задач, например, для кусочно-однородных неограниченных, полуограниченных и ограниченных сред с числом слоев более двух.

5. Заключение

В работе разработан метод матричных интегральных преобразований Фурье с кусочно-тригонометрическим матричным ядром. Получен векторный аналог Формулы Даламбера для решения задачи Коши для взаимосвязанной системы уравнения волнового типа с кусочно-постоянными коэффициентами. Таким образом, были распространены результаты В.А. Ильина [4, 5]. Дано определение вектор-функции матричного аргумента, которое оказалось инструментом анализа взаимосвязанных математических моделей. На его основе создан появилась возможность аналитического описания взаимосвязанных математических моделей таких как n компонентная модель взаимосвязанного процесса теплопереноса в двухслойной среде.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баврин И.И., Яремко О.Э. Операторный метод в теории интегральных преобразований для кусочно-однородных сред. Докл. РАН.—2001.— Т.379, № 3.—с.295–298.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Физматлит, 2010 г. 560 С.
3. Ефимова И. Т. Об одном классе сингулярных задач, разрешимых с помощью специальных интегральных преобразований по цилиндрическим функциям, Дифференц. уравнения, 1972, Т. 8, №5.- с. 817–822.
4. Ильин В. А. Формула типа Даламбера для поперечных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности. Докл. РАН, 2009, Т.427, №5.- с. 609–611.
5. Ильин В. А. Формула типа Даламбера для продольных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности и разной упругости”, Докл. РАН, Т.427, №4.- с. 466–468.

6. Карташов Э. М. Аналитические подходы к исследованиям нестационарной теплопроводности для частично ограниченных областей. ТВТ, 2020. Т.58, №3.- с. 402–411.
7. Коляно Ю. М., Процюк Б. В., Драпкин Б. А., Функция Грина для пространственных стационарных задач теплопроводности многослойного тела. Дифференц. уравнения, 1992, Т.28, №3.- с. 524–527.
8. Лексина, С. В. Начальные задачи для системы волновых уравнений. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.–мат. науки. –2009. – Т.1, № 18. –с.280–282.
9. Ленюк М. П. Интегральное преобразование Фурье на кусочно-однородной полупрямой. Изв. вузов. Матем., 1989, 5, с.14–18.
10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва. Высшая школа, 1967. - 599 с.
11. Лыков А.В. Теория сушки. М.: Энергия, 1968. – 472 с.
12. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка. – 1977.–331 с.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: Учебное пособие.. — 6-е изд., испр. и доп.. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 798 с.
14. Уфлянд Я. С. Точное решение задачи нестационарной конвективной диффузии в цилиндре. ЖТФ, 1987, Т.57, №2.- с. 398–400.
15. Яремко О. Э. Матричные интегральные преобразования Фурье для задач с n точками деления и операторы преобразования. Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 417, № 3. – с. 323–325.
16. Griffiths G.; Schiesser W.E. Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations. Numerical and Analytical Methods with Matlab and Maple. Academic Press.2010, P.461.
17. Legua, M.P., Morales, I., Sánchez Ruiz, L.M. The Heaviside Step Function and MATLAB. Computational Science and Its Applications – ICCSA 2008. vol 5072. Springer.
18. Polyanin A. D., Manzhirov, A. V. Handbook of Integral Equations, Boca Raton. 1998. CRC Press.
19. Sitnik S. M., Yaremko O., Yaremko N. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems, Springer Nature Switzerland, pp.447-466, 2020.

REFERENCES

1. I. I. Bavrin, O. E. Yaremko, Transformation Operators and Boundary Value Problems, Differ. Uravn., 40:8 (2004), 1085–1095.
2. Gantmakher F. R. Theory of matrices. New York: Chelsea Pub. Co. 1959.
3. I. T. Efimova, “A certain class of singular problems that can be solved by means of special integral transformations with respect to cylindrical functions”, Differ. Uravn., 8:5 (1972), 817–822.
4. V. A. I’lin, d’Alembert-type formula for transverse oscillations of an infinite rod consisting of two segments with different densities, Dokl. Math., 80:1 (2009), 624–626.

5. V. A. I'lin, A d'Alembert-type formula for longitudinal oscillations of an infinite rod consisting of two segments with different densities and elasticities, *Dokl. Math.*, 80:1 (2009), 613–615.
6. E. M. Kartashov, Analytical approaches to the analysis of unsteady heat conduction for partially bounded regions, *TVT*, 58:3 (2020), 402–411.
7. Yu. M. Kolyano, B. V. Protsyuk, B. A. Drapkin, “The Green function for spatial stationary problems of heat conduction of a multilayer body”, *Differ. Uravn.*, 28:3 (1992), 524–527.
8. S. V. Leksina. Initial Value Problems for System of Wave Equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 1(18) (2009), 280–282.
9. M. P. Lenyuk. An integral Fourier transform on a piecewise-inhomogeneous half-line. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 33:5, 1989, 19–24 pp.
10. A.V, Lykov. *Teoriia teploprovodnosti [Theory of heat conduction].* Moscow, Vysshaia shkola publ. (1967).
11. Lykov A.V. *Teoriya sushki [Drying theory]*, Moscow: Energy, 1968, 472 p. (In Russ.)
12. Marchenko, V.A. *Sturm-Liouville Operators and Their Applications.* Naukova Dumka, Kiev English Trans Birkhauser, Basel. 1977.
13. A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii. *Equations of Mathematical Physics.* Dover Publications. 2011. P.800.
14. Ya. S. Uflyand, Correct solution of the nonstationary convective diffusion-problems in cylinders *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, 57:2 (1987), 398–400 pp.
15. Yaremko, O.E. Matrix integral Fourier transforms for problems with discontinuous coefficients and transformation operators. *Dokl. Math.* 76, 876–878 (2007).
16. Griffiths G.; Schiesser W.E. *Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations. Numerical and Analytical Methods with Matlab and Maple.* Academic Press.2010, P.461.
17. Legua, M.P., Morales, I., Sánchez Ruiz, L.M. *The Heaviside Step Function and MATLAB. Computational Science and Its Applications – ICCSA 2008.* vol 5072. Springer.
18. Polyanin A. D., Manzhirov, A. V. *Handbook of Integral Equations*, Boca Raton. 1998. CRC Press.
19. Sitnik Sergei M., Yaremko Oleg, Yaremko Natalia. *Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems*, Springer Nature Switzerland, P.447-466, 2020.

Получено: 06.07.2023

Принято в печать: 11.12.2023