ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 4.

УДК 514.763 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-212-238

Инвариантные дифференциальные полиномы

Ф. М. Малышев

Малышев Фёдор Михайлович — доктор физико-математических наук, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Аннотация

На основе предлагаемого в статье способа решения так называемых (r,s)-систем линейных уравнений доказано, что порядки однородных инвариантных дифференциальных операторов n гладких вещественных функций одной переменной принимают значения от n до $\frac{n(n+1)}{2}$, а размерность пространства всех таких операторов не превосходит $n!$. Получена классификация инвариантных дифференциальных операторов порядка $n+s$ для $s = 1,2,3,4$, а при $n = 4$ для всех порядков от 4 до 10. Единственные с точностью до множителей однородные инвариантные дифференциальные операторы самого маленького порядка n и самого большого порядка $\frac{n(n+1)}{2}$ предоставлены, соответственно, произведением n первых дифференциалов $(s = 0)$ и вронскианом $(s = (n-1)n/2)$. Доказано существование ненулевых однородных инвариантных дифференциальных операторов порядка $n+s$ для $s < \frac{1+\sqrt{5}}{2}(n-1)$.

Ключевые слова: Производная, дифференциал, система линейных уравнений, симплекс, инвариантный дифференциальный оператор.

Библиография: 31 названий.

Для цитирования:
Ф. М. Малышев. Инвариантные дифференциальные полиномы // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 212–238.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 514.763 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-212-238

Invariant differential polynomials

F. M. Malyshev

Malyshev Fyodor Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Abstract

Based on the method proposed in the article for solving the so-called (r, s)-systems of linear equations proven that the orders of homogeneous invariant differential operators n of smooth real functions of one variable take values from n to $\frac{n(n+1)}{2}$, and the dimension of the space of all such operators does not exceed $n!$. A classification of invariant differential operators of order $n+s$ is obtained for $s = 1, 2, 3, 4$, and for $n = 4$ for all orders from 4 to 10. The only, up to factors, homogeneous invariant differential operators of the smallest order n and the largest order $\frac{n(n+1)}{2}$ are given, respectively, by the product of the n first differentials ($s = 0$) and the Wronskian ($s = (n-1)n/2$). The existence of nonzero homogeneous invariant differential operators of order $n+s$ for $s < \frac{1+\sqrt{5}}{2}(n-1)$ is proved.

Keywords: Derivative, differential, system of linear equations, simplex, invariant differential operator.

Bibliography: 31 titles.

For citation:

F. M. Malyshev, 2023, “Invariant differential polynomials”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 212–238.

1. Введение

Из курса математического анализа хорошо известна теорема об инвариантности первого дифференциала. В настоящей работе исследуются инвариантные дифференциальные выражения в виде линейных комбинаций произведений дифференциалов первого и высших порядков n функций одной переменной по типу вронскиана (с $n!$ слагаемыми) и произведения n первых дифференциалов n различных функций (одно слагаемое).

Пусть $\mathcal{F}$ – множество вещественных гладких функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а $\mathcal{F}_\lambda = \{f(dx)^\lambda |\, f \in \mathcal{F}\}$ – пространство дифференциалов $f(dx)^\lambda = h^{(\lambda)}(dx)^\lambda$ порядка λ, где $\lambda \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, а $h \in \mathcal{F}$. Символом $\mathcal{F}_*$ обозначим прямую сумму $\bigoplus_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \ldots$, в которой $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Для $n \geqslant 1$ будем рассматривать *полидифференциальные операторы* $\mathcal{D}_n\colon \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}_*$, задаваемые конечными суммами вида

$$\mathcal{D}_n(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n} c_{z_1,\ldots,z_n} f_1^{(z_1)} \cdot \ldots \cdot f_n^{(z_n)} (dx)^{z_1+\ldots+z_n}, \tag{1}$$

в которых $c_{z_1,\ldots,z_n}$ – вещественные коэффициенты (равные нулю, за исключением конечного их числа).

Особо выделяем обозначаемые символом $\mathcal{D}_n^{(k)}$ *однородные полидифференциальные операторы* порядка $k \geqslant 0$: $\mathcal{D}_n^{(k)}\colon \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}_k$,

$$\mathcal{D}_n^{(k)}(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{\substack{(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n:\\ z_1+\ldots+z_n=k}} c_{z_1,\ldots,z_n} f_1^{(z_1)} \cdot \ldots \cdot f_n^{(z_n)} (dx)^k.$$

Обозначим символами $\mathcal{V}_n$ и $\mathcal{V}_n^{(k)}$ векторные пространства, состоящие из всех возможных операторов $\mathcal{D}_n$ и $\mathcal{D}_n^{(k)}$ соответственно. Коэффициенты $c_{z_1,\ldots,z_n}$ выступают естественными координатами этих операторов. Ясно, что

$$\mathcal{D}_n = \sum_{k\geqslant 0} \mathcal{D}_n^{(k)} \text{ и } \mathcal{V}_n = \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathcal{V}_n^{(k)} = \mathcal{V}_n^{(0)} \oplus \mathcal{V}_n^{(1)} \oplus \mathcal{V}_n^{(2)} \oplus \ \ldots \ . \tag{2}$$

При переходе от переменной x к другой переменной t (при другой параметризации прямой), осуществляемом диффеоморфизмом $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, при котором $x=\varphi(t)$, дифференциал $f(dx)^k$ записывается в виде

$$f(\varphi)(d\varphi)^k = f(\varphi)(\dot\varphi dt)^k = f(\varphi)\dot\varphi^k(dt)^k = g(dt)^k,$$

где $g=f(\varphi)\dot\varphi^k$, а символом $f(\varphi)$ обозначаем суперпозицию функций f и φ: $[f(\varphi)](t)=f(\varphi(t))$.

Полидифференциальный оператор (1), задаваемый коэффициентами $c_{z_1,\dots,z_n}$ по всем $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n$, является *инвариантным*, если он не зависит от используемой параметризации прямой, перестановочен с любым диффеоморфизмом $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Можно вначале произвести замену переменной $x=\varphi(t)$, а затем вычислять сумму (1) для функций $g_i(t)=f_i(\varphi(t))$, $i=1,\dots,n$, в условиях переменной t. Можно поступать иначе, вначале вычислять (1) для исходных функций от x, а затем в полученной сумме все x-ы заменить на $\varphi(t)$. Должен получиться тот же результат. Формально это выражается равенством

$$\begin{aligned}\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n} c_{z_1,\dots,z_n} g_1^{(z_1)}\cdot\ldots\cdot g_n^{(z_n)}(dt)^{z_1+\ldots+z_n} =\\ = \sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n} c_{z_1,\dots,z_n} f_1^{(z_1)}(\varphi)\cdot\ldots\cdot f_n^{(z_n)}(\varphi)\dot\varphi^{z_1+\ldots+z_n}(dt)^{z_1+\ldots+z_n},\end{aligned}\qquad(3)$$

где $g_i=f_i(\varphi)$ для всех $i=1,\dots,n$. Равенство (3) должно выполняться для любых функций $f_i\in\mathcal{F}$, где $i=1,\dots,n$.

Из теоремы об инвариантности первого дифференциала следует инвариантность однородных дифференциальных операторов порядка $k=n$, получаемых перемножением первых дифференциалов:

$$D_n(f_1,\dots,f_n)=cf_1'\cdot\ldots\cdot f_n'(dx)^n,\quad c\in\mathbb{R}.\qquad(4)$$

Непосредственно проверяется инвариантность однородного дифференциального оператора порядка $k=\frac{n(n+1)}{2}$, предоставляемого *вронскианом*:

$$D_n(f_1,\dots,f_n)=\det\begin{vmatrix} f_1' & \ldots & f_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ f_1^{(n)} & \ldots & f_n^{(n)}\end{vmatrix}(dx)^{\frac{n(n+1)}{2}}.\qquad(5)$$

Обозначим символами $\mathcal{W}_n$ и $\mathcal{W}_n^{(k)}$ векторные пространства всех инвариантных дифференциальных операторов $\mathcal{D}_n\in\mathcal{V}_n$ и $\mathcal{D}_n^{(k)}\in\mathcal{V}_n^{(k)}$ соответственно. Непосредственно проверяется справедливость разложения в прямую сумму

$$\mathcal{W}_n=\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathcal{W}_n^{(k)}=\mathcal{W}_n^{(0)}\oplus\mathcal{W}_n^{(1)}\oplus\mathcal{W}_n^{(2)}\oplus\ \ldots\ .\qquad(6)$$

Если оператор $\mathcal{D}_n$ инвариантен, то инвариантны все его однородные слагаемые $\mathcal{D}_n^{(k)}$ для $k\geqslant 0$.

Отдельные слагаемые в правой части (1) при $z_i\geqslant 1$ для всех $i=1,\dots,n$ являются (с точностью до коэффициентов $c_{z_1,\dots,z_n}$) произведениями дифференциалов первого и высших порядков. В учебнике [1] на стр. 108 такие произведения названы дифференциальными мономами.

Пусть V_n – подпространство в $\mathcal{V}_n$, состоящее из операторов $D_n\colon\mathcal{F}^n\to\mathcal{F}_*$ вида

$$D_n(f_1,\dots,f_n)=\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}^n} c_{z_1,\dots,z_n} f_1^{(z_1)}\cdot\ldots\cdot f_n^{(z_n)}(dx)^{z_1+\ldots+z_n}.\qquad(7)$$

В аннотации к статье речь идёт именно о таких операторах. Формулируемая ниже теорема 1 показывает, что особое их выделение является вполне резонным.

Символами W_n, $V_n^{(k)}$, $W_n^{(k)}$ для $k = n + s$, где $s \geqslant 0$, обозначим соответственно подпространства $V_n \cap \mathcal{W}_n$, $V_n \cap \mathcal{V}_n^{(k)}$, $V_n \cap \mathcal{W}_n^{(k)} = V_n^{(k)} \cap \mathcal{W}_n$. Последнее равенство следует из равенства $\mathcal{W}_n^{(k)} = \mathcal{V}_n^{(k)} \cap \mathcal{W}_n$, обеспечиваемого разложением в прямую сумму (6). Ясно, что $V_n = \bigoplus_{k \geqslant n} V_n^{(k)}$, а при $k < n$ имеем $V_n^{(k)} = \{0\}$ и $W_n^{(k)} = \{0\}$.

Формулируемая ниже теорема 1 указывает на возможность дальнейшего разложения в прямую сумму подпространств каждого слагаемого $\mathcal{W}_n^{(k)}$ в (6). Для этого при каждом $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ для каждого подмножества $\mathfrak{m} := \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ мощности m, будем рассматривать принадлежащие $\mathcal{V}_n$ операторы вида

$$D_{n,\mathfrak{m}}(f_1, \dots, f_n) = f_{j_1} \cdot \ldots \cdot f_{j_{n-m}} \cdot D_m(f_{i_1}, \dots, f_{i_m}), \tag{8}$$

где $\{j_1, \dots, j_{n-m}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathfrak{m}$, а $D_m \in V_m$. Символом $V_{n,\mathfrak{m}}$ обозначим множество всех таких операторов $D_{n,\mathfrak{m}}$; ясно, что $V_{n,\mathfrak{m}} \cong V_m$. Символами $V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$, $W_{n,\mathfrak{m}}$, $W_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ обозначим соответственно $V_{n,\mathfrak{m}} \cap \mathcal{V}_n^{(k)}$, $V_{n,\mathfrak{m}} \cap \mathcal{W}_n$, $V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)} \cap \mathcal{W}_n$. Ясно, что $V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)} \cong V_m^{(k)}$, а $V_{n,\{1,\dots,n\}} = V_n$, как и $W_{n,\{1,\dots,n\}} = W_n$, и

$$\mathcal{V}_n = \bigoplus_{m=0}^{n} \bigoplus_{\substack{\mathfrak{m} \subseteq \{1,\dots,n\}: \\ |\mathfrak{m}| = m}} V_{n,\mathfrak{m}}, \quad V_{n,\mathfrak{m}} = \bigoplus_{k \geqslant m} V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)} = V_{n,\mathfrak{m}}^{(m)} \oplus V_{n,\mathfrak{m}}^{(m+1)} \oplus \ldots \ . \tag{9}$$

Символом $D_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ будем обозначать элементы пространства $V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$. Для $\mathcal{D}_n \in \mathcal{V}_n$ имеем

$$\mathcal{D}_n = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{\mathfrak{m} \subseteq \{1,\dots,n\}: \\ |\mathfrak{m}| = m}} \sum_{k \geqslant m} D_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}. \tag{10}$$

Из условий (3), которые должны выполняться для всех $f_i \in \mathcal{F}$ при всех $i = 1, \dots, n$, непосредственно следует уточнение леммы 2 со стр. 7 работы [2]: если $\mathcal{D}_n$ инвариантный оператор, то будут инвариантными все его слагаемые $D_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ в (10). Оператор $D_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ принадлежит пространству $V_{n,\mathfrak{m}}$, поэтому он представляется в виде (8). Множитель $D_m \in V_m$ там обозначим символом $D_m^{(k)}$. Ясно, что $D_m^{(k)} \in V_m^{(k)}$ и инвариантность оператора $D_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ равносильна инвариантности оператора $D_m^{(k)}$. Далее это будет доказано с помощью критерия для инвариантности из работы [2]. Будет доказан аналог равенств (9) для $\mathcal{W}_n$ (см. (12) ниже).

Основная цель настоящей работы заключается в доказательстве формулируемых ниже четырёх теорем. При их формулировках потребуются целые числа $a_{r,s}$, определяемые равенством

$$\sum_{s \geqslant 0} a_{r,s} \tau^s = (1 + \tau)(1 + \tau + \tau^2) \ldots (1 + \tau + \ldots + \tau^r). \tag{11}$$

Обозначим $\psi_r(\tau) = \sum_{s \geqslant 0} a_{r,s} \tau^s$.

Теорема 1. *Векторное пространство $\mathcal{W}_n$ всех инвариантных дифференциальных операторов (1) представляется прямой суммой своих векторных подпространств $W_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$:*

$$\mathcal{W}_n = \bigoplus_{m=0}^{n} \bigoplus_{\substack{\mathfrak{m} \subseteq \{1,\dots,n\}: \\ |\mathfrak{m}| = m}} W_{n,\mathfrak{m}}, \quad W_{n,\mathfrak{m}} = \bigoplus_{k \geqslant m} W_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}, \tag{12}$$

и для $m > 0$ имеем $\dim W_m^{(k)} = \dim W_{n,\mathfrak{m}}^{(k)} \leqslant a_{m-1,k-m}$.

В формулировке теоремы 1 при $m = 0$ имеют место инвариантные дифференциальные операторы нулевого порядка из $W_{n,\varnothing}$:

$$D_n(f_1(x), \dots, f_n(x)) = c \cdot f_1(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) \text{ для всех } c \in \mathbb{R}.$$

Из теоремы 1 следуют неравенства

$$\dim W_m = \dim \bigoplus_{k=m}^{\frac{m(m+1)}{2}} W_m^{(k)} \leqslant \sum_{s \geqslant 0} a_{m-1,s} = \psi_{m-1}(1) = m!,$$

справедливые при всех $m = 0, 1, \dots, n$, и неравенство

$$\dim \mathcal{W}_n \leqslant \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{\mathfrak{m} \subseteq \{1,\dots,n\}: \\ |\mathfrak{m}|=m}} m! = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} m! = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m)!} = [en!].$$

Из теоремы 1 следует также, что порядки k ненулевых однородных инвариантных дифференциальных операторов (7) из W_n, именуемых далее сокращённо (n,k)-*операторы*, могут изменяться только в диапазоне от n до $\frac{n(n+1)}{2}$. Вронскиан (5) предоставляет (n,k)-опрератор самого высокого порядка $k = \frac{n(n+1)}{2}$, когда в формулировке теоремы 1 имеем $m = n$ и $\mathfrak{m} = \{1, \dots, n\}$, а $k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Теорема 2. *Для $m \geqslant 1$ и $s < \frac{1+\sqrt{5}}{2}(m-1)$ справедливы неравенства $\dim W_m^{(m+s)} > 0$, а для $s \in \{0, 1, 2, 3, 4, \frac{m(m-1)}{2}\}$ справедливы равенства*

$$\dim W_m^{(m+s)} = a_{m-1,s}. \tag{13}$$

Область значений $s < \frac{m(m-1)}{2}$ с $\dim W_m^{(m+s)} > 0$ может быть существенно расширена благодаря ненулевым $(m, m+s)$-операторам, являющимся произведениями пар ненулевых (m_1, m_1+s_1)-операторов и (m_2, m_2+s_2)-операторов с $m = m_1 + m_2$ и $s = s_1 + s_2$ (зависящих от непересекающихся наборов функций) за счёт $s_2 = \frac{m_2(m_2-1)}{2}$.

Гипотеза. Для всех $m \geqslant 1$ и $s \geqslant 0$ справедливы равенства (13).

Для $m \leqslant 3$ справедливость гипотезы следует из теоремы 2. Для $m = 4$ гипотеза тоже справедлива. Необходимое для этого дополнительно равенство (13) для $s = 5$ при $m = 4$ будет доказано в п. 9.2 работы.

В работе [2] оператору (1) ставится в соответствие многочлен

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}_0^n} c_{z_1, \dots, z_n} X_1^{z_1} \dots X_n^{z_n}. \tag{14}$$

Инвариантность оператора (1) равносильна (как утверждается на стр. 10 в [2]) равенствам

$$\sum_{i=1}^{n} X_i (\partial_{X_i})^{p+1} P(X_1, \dots, X_n) = 0 \text{ для всех } p \geqslant 1. \tag{15}$$

Доказательство теоремы 1, сводящееся к решению системы линейных уравнений (15) относительно неизвестных $c_{z_1,\dots,z_n}$, где $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}_0^n$, является конструктивным. Для всех порядков $n+s$ с $s \geqslant 0$ строятся подмножества $A_{n-1,s} \subset \mathbb{N}^n$ (см. (20)) мощности $a_{n-1,s}$ "номеров" $(z_1, \dots, z_n)$ переменных $c_{z_1,\dots,z_n}$, через которые явным образом линейно выражаются остальные координаты операторов из $W_n^{(n+s)}$. В результате, в случаях справедливости сфомулированной выше гипотезы, автоматически получается исчерпывающая классификация инвариантных полидифференциальных операторов (7) порядка $n+s$ от n функций. Они будут находиться в естественной биекции с элементами векторного пространства, натянутого на точки множества $A_{n-1,s}$.

Теорема 3. *Равенства (15) для $p \geqslant 3$ следуют только из двух равенств (15), отвечающих $p = 1$ и $p = 2$.*

Не исключено, что теорема 3 имеет совсем простое объяснение. В [2] отмечается, что свойство инвариантности лучше описывать в инфинитезимальной форме. На стр. 292 монографии [3] говорится, что во всякой локальной группе Ли с функциями произведения только трижды непрерывно дифференцируемыми в некоторых координатах функции произведения будут аналитическими.

Используемая нами в доказательствах теорем 1,2,3 система уравнений (15) в [2] представлена в виде

$$\sum_{i=1}^{m}(X_i(\partial_{X_i})^{p+1} + \lambda_i(p+1)(\partial_{X_i})^p)P(X_1, \dots, X_m) = 0 \text{ для всех } p \geqslant 1, \tag{16}$$

где числа $\lambda_i \in \mathbb{C}$ для $i = 1, \dots, n$ могут быть произвольными. В нашем случае $\lambda_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Равенства (16) равносильны, в частности, инвариантности дифференциальных операторов $\mathcal{D}_n \colon \mathcal{F}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{\lambda_n} \to \mathcal{F}_*$, задаваемых суммами

$$\mathcal{D}_n(f_1(dx)^{\lambda_1}, \dots, f_n(dx)^{\lambda_n}) = \sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n} c_{z_1,\dots,z_n} f_1^{(z_1)} \cdot \dots \cdot f_n^{(z_n)} (dx)^{\lambda_1+\dots+\lambda_n+z_1+\dots+z_n}. \tag{17}$$

В [2] на стр. 11 и независимо в [4] на стр. 56 сформулирована следующая теорема, важная для рассматриваемых в [2] задач.

Теорема 4. *При любых значениях параметров $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ размерность пространства решений системы уравнений (16) не превосходит $(n+1)!$.*

Обратим внимание, что при $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ теоремой 1 предоставляется верхняя оценка $[en!]$, которая меньше $(n+1)!$ для $n > 1$.

В [2] приведена только общая схема доказательства теоремы 4, относящейся к системе линейных уравнений (16), зависящей (в отличии от системы уравнений (15)) от n-мерного параметра $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. В п. 8 будет приведено подробное доказательство теоремы 4. Как и доказательство теоремы 1, оно будет конструктивным. При каждом фиксированном значение параметра $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ все коэффициенты многочлена (14), являющегося решением системы уравнений (16), явным образом линейно выражаются через $(n+1)!$ из этих коэффициентов с номерами $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}_0^n$, для которых $z_i \leqslant i$ по всем $i = 1, \dots, n$. Возможные степени решений при этом, вообще говоря, неограничены.

На системах линейных уравнений (15), (16) удачно демонстрируется важное замечание со стр. 15 учебника [5], утверждающего, что совершенно не обязательно базисы линейных пространств нумеровать отрезком натурального ряда. "*Нумерация, или, скорее, порядок элементов базиса, существенны при использовании матричного формализма. В других вопросах может оказаться важней другая структура на множестве индексов базиса.*"

В нашем случае равенства (15) и (16) можно рассматривать как линейные уравнения относительно неизвестных $c_{z_1,\dots,z_n} \in \mathbb{R}$ с "номерами" $(z_1, \dots, z_n)$, являющимися (в однородном случае, при $z_1+\dots+z_n = k$) точками с целочисленными координатами в симплексах, в которых каждый "номер" занимает своё, отведённое именно ему место.

Основным средством для доказательства сформулированных теорем служит способ решения так называемых (r, s)-систем линейных уравнений, определяемых в следующем п. 2, с неизвестными параметризуемыми точками с целочисленными координатами в r-мерном симплексе с длиной ребра s. В пп. 3 и 4 доказываются теоремы 5 и 6 о размерностях пространства решений соответственно (r, s)-системы уравнений и одной её подсистемы, возникающей при доказательстве теоремы 4. В следующих четырёх пунктах приводятся доказательства четырёх основных сформулированных выше теорем. Доказательство теоремы 2 основывается на теореме 3, которая будет доказана первой. В последнем п. 9 приводятся выписанные в [6] операторы (1) для $n \leqslant 3$ и доказывается равенство (13) для $m = 4$ и $s = 5$, чем завершается классификация инвариантных дифференциальных операторов четырёх гладких функций одной переменной.

Отметим, что оценки в теоремах 1 и 4 справедливы также и для не обязательно конечных сумм (1) и (14). Это следует из приводимых соответственно в пп. 5 и 8 конструктивных доказательств этих теорем.

1.1. К исследованию инвариантных операторов над полями геометрических объектов (в существенно более общей постановке по сравнению с (1) и (17)) в течении ряда лет, начиная с середины 70-х годов прошлого века, привлекал внимание математиков А.А. Кириллов (см. его обзор [2] 1980 года и статью [7] 1977 года). Аргументами и значениями операторов $\mathcal{D}_n$ (как примеры, далеко не всё охватывающие) могут быть не обязательно однотипные по ковариантности и контравариантности тензорные поля многообразий больших размерностей. Ранее, до работы [7], в работе А.Н. Рудакова [8] 1974 года была, в частности, получена классификация унарных инвариантных дифференциальных операторов, действующих на пространствах тензорных полей.

Задача классификации инвариантных дифференциальных операторов имеет давнюю историю, была сформулирована Вебленом в 1928 году на Международном конгрессе математиков в Болонье [9]. В обзоре [2] возникающие при этом задачи доведены до точных формулировок, стимулировавших появление большого числа работ с дальнейшими обобщениями (см., например, [10] – [21]). В отличие от этих работ предлагаемая статья относится к традиционным классическим понятиям дифференциалов. Специально выделеннный в [2] вопрос устройства инвариантных дифференциальных операторов (1) стоит особняком, потому как наиболее легко формулируется, относится к самым основам математического анализа и поддаётся исследованию относительно элементарными методами линейной алгебры по решению систем линейных уравнений.

2. (r, s)-системы линейных уравнений.

Символом Δ_s^r для целых $r \geqslant 1$ и $s \geqslant 0$ обозначим множество точек с целочисленными координатами в симплексе

$$\left\{ z = (z_1, \dots, z_{r+1}) \in \mathbb{R}^{r+1} |\, z_i \geqslant \tau_i, i = 1, \dots, r+1, \sum_{i=1}^{r+1} (z_i - \tau_i) = s \right\}$$

с вершинами $B_1, \dots, B_{r+1}$, занумерованными так, что для всех $i = 1, \dots, r+1$ координата с номером i самая большая у вершины B_i. На ребре этого симплекса (когда $\tau_i \in \mathbb{Z}$ для всех $i = 1, \dots, r+1$) располагается $s+1$ целочисленная точка, поэтому целочисленный параметр $s \geqslant 0$ естественно считать *длиной* ребра симплекса, а $r \geqslant 1$ – его *размерностью*. Целочисленные значения $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$, формально участвующие в задании множества Δ_s^r, не конкретизируются, каждый раз выбираются по ситуации. Множество Δ_s^r называем *целочисленным симплексом*, чаще просто *симплексом*. Будем также использовать по отношению к Δ_s^r терминологию, относящуюся к обычному континуальному симплексу, т.е. к выпуклой оболочке подмножества Δ_s^r в $\mathbb{R}^r$.

Вещественные неизвестные (r, s)-системы линейных уравнений параметризуются ("нумеруются") точками $z \in \Delta_s^r$. Символами u_z для $z \in \Delta_s^r$ обозначаем сами неизвестные. Число неизвестных равно числу точек в симплексе Δ_s^r, равному $|\Delta_s^r| = |\Delta_{s-1}^r| + |\Delta_s^{r-1}| = \binom{r+s}{s}$.

Уравнения в (r,s)-системе параметризуются содержащимися в симплексе Δ_s^r симплексами Δ_p^r для всех $p=1,\dots,s$. Вершины $b_1,\dots,b_{r+1}$ симплексов Δ_p^r нумеруем так, что при гомотетии с коэффициентом гомотетии большим 1, переводящей один в другой континуальные симплексы, соответствующие Δ_p^r и Δ_s^r, вершина b_i переходит в вершину B_i для всех $i=1,\dots,r+1$. Будем использовать обозначения $\Delta_s^r=[B_1,\dots,B_{r+1}]$ и $\Delta_p^r=[b_1,\dots,b_{r+1}]$. Конкретная точка $a\in\Delta_s^r\setminus\{B_1,\dots,B_{r+1}\}$, будучи вершиной у различных симплексов Δ_p^r, содержащихся в Δ_s^r, может принимать различные номера от 1 до $r+1$. Для каждого такого симплекса Δ_p^r, содержащего точку a в качестве вершины, у a будет свой номер. Коэффициенты при неизвестных в уравнениях (r,s)-системы задаются функциями $\varphi_i\colon\Delta_s^r\to\mathbb{R}_+:=\{x\in\mathbb{R}|\,x>0\}$, где $i=1,\dots,r+1$. Отвечающее симплексу $\Delta_p^r=[b_1,\dots,b_{r+1}]$ уравнение (r,s)-системы записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{r+1}\varphi_i(b_i)u_{b_i}=0. \tag{18}$$

Число уравнений в системе (18), отвечающих конкретному значению $p\in\{1,\dots,s\}$, равно числу подсимплексов Δ_p^r в симплексе Δ_s^r, находящихся (благодаря параллельным переносам) в естественном взаимно однозначном соответствии с точками симплекса Δ_{s-p}^r и равно его мощности $|\Delta_{s-p}^r|$, равной $\binom{r+s-p}{s-p}=\binom{r+s-p}{r}$. Всего в системе уравнений (18) имеется

$$\sum_{p=1}^{s}\binom{r+s-p}{r}=\binom{r+s}{r+1}=|\Delta_{s-1}^{r+1}|$$

уравнений. Они параметризуются наборами $(p,y_1,\dots,y_{r+1})$, где $p=1,\dots,s$, а $(y_1,\dots,y_{r+1})\in$ $\in\Delta_{s-p}^r$. Эти наборы образуют симплекс

$$\Delta_{s-1}^{r+1}=\bigsqcup_{p=1}^{s}\Delta_{s-p}^r=\Delta_{s-1}^r\sqcup\Delta_{s-2}^r\sqcup\dots\sqcup\Delta_1^r\sqcup\Delta_0^r.$$

Теорема 5. *Размерность пространства решений (r,s)-системы для $r\geqslant 1$ и $s\geqslant 0$ не превосходит $a_{r,s}$.*

Теорема 6. *Если из (r,s)-системы исключить все уравнения с параметром $p=1$, но оставить все уравнения с $p=2,\dots,s$, то размерность пространства решений не превзойдёт $a_{r+1,s}$.*

3. Доказательство теоремы 5.

Для пространства решений (r,s)-системы линейных уравнений (18), обозначаемого символом $U_{r,s}$, индукцией по $r\geqslant 1$ докажем неравенство

$$\dim U_{r,s}\leqslant a_{r,s}\ \text{ для всех }\ s\geqslant 0, \tag{19}$$

в котором $a_{r,s}$ определяются равенством (11). Неравенство (19) при значение $s=0$ превращается в равенство $\dim U_{r,0}=a_{r,0}=1$. Для $(r,0)$-системы имеем $|\Delta_0^r|=\binom{r}{0}=1$. Пусть $\Delta_0^r=\{a\}$. Все возможные значения $u_a\in\mathbb{R}$ единственной неизвестной u_a являются решениями $(r,0)$-системы, потому как в $(r,0)$-системе нет уравнений (в Δ_0^r не помещаются подсимплексы с положительной длиной ребра). Далее считаем $s\geqslant 1$, а левую часть уравнения (18), отвечающую подсимплексу $\Delta=\Delta_p^r$, обозначаем символом $\mathcal{L}_\Delta$.

3.1. $r=1$. Для $r=1$, согласно (11), $a_{1,0}=a_{1,1}=1$ и $a_{1,s}=0$ для $s\geqslant 2$. Случаи $s=1$ и $s\geqslant 2$ рассмотрим отдельно.

3.1.1. $r=1$, $s=1$. Для $r=1$ и $s=1$ симплекс $\Delta_s^r=\Delta_1^1=[B_1,B_2]$ представлен на рис. 1.

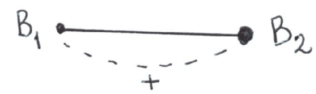

Рис. 1

Имеем две неизвестных u_{B_1}, u_{B_2} и одно уравнение

$$\mathcal{L}_{[B_1,B_2]} = \varphi_1(B_1)u_{B_1} + \varphi_2(B_2)u_{B_2} = 0,$$

поэтому $\dim U_{1,1} = 1$. Неизвестное u_{B_1} однозначно выражается через u_{B_2}, которое можно задавать произвольно.

3.1.2. $\boldsymbol{r = 1}$**,** $\boldsymbol{s \geqslant 2}$**.** При $r = 1$ и $s \geqslant 2$ симплекс $\Delta_s^r = \Delta_s^1 = [B_1, B_2]$ представлен на рис. 2, где $c \in \Delta_s^1$ – произвольная его внутренняя точка. Тогда

$$0 = \mathcal{L}_{[B_1,c]} + \mathcal{L}_{[c,B_2]} - \mathcal{L}_{[B_1,B_2]} = (\varphi_2(c) + \varphi_1(c))u_c,$$

потому как коэффициенты при неизвестных u_{B_1} и u_{B_2} будут нулевые (сократятся). В результате $u_c = 0$, так как $\varphi_2(c) + \varphi_1(c) \neq 0$. Затем из уравнений

$$\mathcal{L}_{[B_1,c]} = \varphi_1(B_1)u_{B_1} + \varphi_2(c)u_c = 0$$

и $\mathcal{L}_{[c,B_2]} = 0$ получаем $u_{B_1} = 0$ и $u_{B_2} = 0$.

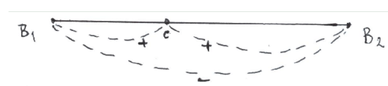

Рис. 2

При $r = 1$ и $s \geqslant 2$ у $(1, s)$-системы уравнений (18), имеется только нулевое решение.

Правые части рассматриваемой системы уравнений могли быть любыми, не обязательно нулевыми, но и тогда при $r = 1$ этим способом вначале определили бы u_c для всех внутренних целочисленных точек $c \in [B_1, B_2]$, а затем определили бы неизвестные u_{B_1}, u_{B_2} и для граничных точек B_1, B_2 симплекса $\Delta_s^1 = [B_1, B_2]$.

Изложенный приём решения (r, s)-системы уравнений для $r = 1$, решаемой путём "включения–исключения" , распространяется далее на все значения $r \geqslant 2$. Он состоит в том, что вначале определяются неизвестные u_c для внутренних точек $c \in \Delta_s^r$, а затем определяются u_c для c на границе симплекса Δ_s^r в условиях на единицу меньшей размерности симплексов. Единственная дополнительная деталь, связанная с формированием в отдельные группы неизвестных u_c на границе симплекса Δ_s^r, демонстрируется уже в размерности $r = 2$.

3.2. $\boldsymbol{r = 2}$**.** Для $r = 2$ согласно (11) имеем $a_{2,1} = a_{2,2} = 2$, $a_{2,3} = 1$ и $a_{2,s} = 0$ для $s \geqslant 4$. Соответствующие случаи $s = 1$, $s = 2$, $s = 3$, $s \geqslant 4$ рассмотрим в обратном порядке.

3.2.1. $\boldsymbol{r = 2}$**,** $\boldsymbol{s \geqslant 4}$**.** Для $r = 2$ и $s \geqslant 4$ симплекс $\Delta_s^r = \Delta_s^2 = [B_1, B_2, B_3]$ представлен на рис. 3, где $c \in \Delta_s^2$ – произвольная его внутренняя точка (с координатами не меньшими $\tau_i + 1$, $i = 1, 2, 3$), через которую проведены отрезки, параллельные сторонам симплекса Δ_s^2.

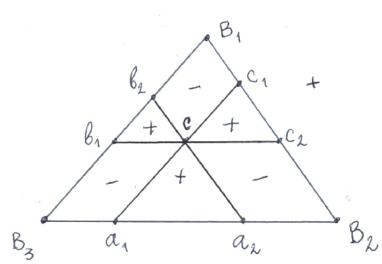

Рис. 3

В соответствии с уравнениями (18) имеем:

$$0=\mathcal{L}_{[B_1,B_2,B_3]}-\mathcal{L}_{[B_1,c_2,b_1]}-\mathcal{L}_{[c_1,B_2,a_1]}-\mathcal{L}_{[b_2,a_2,B_3]}$$
$$+\mathcal{L}_{[c_1,c_2,c]}+\mathcal{L}_{[c,a_2,a_1]}+\mathcal{L}_{[b_2,c,b_1]}=(\varphi_3(c)+\varphi_1(c)+\varphi_2(c))u_c.$$

Все остальные переменные в выписанном уравнение встречаются по два раза с одинаковыми по модулю коэффициентами, отличающимися знаком, поэтому взаимно сокращающимися. В результате $u_c=0$, так как $\varphi_3(c)+\varphi_1(c)+\varphi_2(c)\neq 0$.

Неизвестные u_c для граничных точек c симплекса Δ^2_s будем определять в три этапа. Пусть Γ_1, Γ_2, Γ_3 подмножества точек симплекса Δ^2_s, расположенные на сторонах, противоположных соответственно вершинам B_1, B_2, B_3, и $T_1=\Gamma_1\setminus(\Gamma_2\cup\Gamma_3)=\Delta^1_{s-2}$, $T_2=\Gamma_2\setminus\Gamma_3=\Delta^1_{s-1}$, $T_3=\Gamma_3=\Delta^1_s$ (см. рис. 4 для $s=4$). На первом этапе определяются u_c с $c\in T_1$, на втором – с $c\in T_2$, на третьем – с $c\in T_3$.

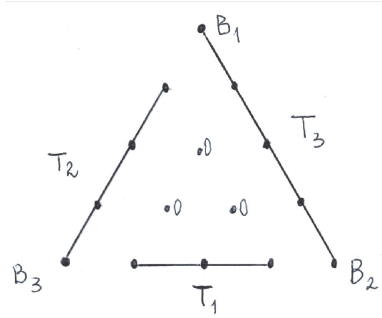

Рис. 4

Далее будет удобно через $\mathring{\Delta}^r_s$ обозначать множество внутренних точек $z=(z_1,\dots,z_{r+1})$ симплекса Δ^r_s, у которых $z_i>\tau_i$, $i=1,\dots,r+1$, $\mathring{\Delta}^r_s=\Delta^r_{s-r-1}$ (при $s<0$ считаем $\Delta^r_s=\varnothing$). В принятых обозначениях $T_1\sqcup T_2\sqcup T_3=\Delta^2_s\setminus\mathring{\Delta}^2_s$.

На первом этапе в исходной $(2,s)$-системе (18) с $s\geqslant 4$ рассматриваются только уравнения $\mathcal{L}_\Delta=0$, где $\Delta\subseteq T_1\sqcup\mathring{\Delta}^2_s=\Delta^2_{s-2}$ такие, что $\Delta\cap T_1\neq\varnothing$ (см. рис. 4 для $s=4$). Возникающая $(2,s-2)$-система, благодаря равенствам $u_c=0$ для $c\in\mathring{\Delta}^2_s$, сводится к $(1,s-2)$-системе (у нас $T_1=\Delta^1_{s-2}$), которая имеет только нулевое решение (см. п. 3.1.2), $u_c=0$ для $c\in T_1$.

На втором этапе в исходной $(2,s)$-системе (18) с $s\geqslant 4$ рассматриваются только уравнения $\mathcal{L}_\Delta=0$, где $\Delta\subseteq T_2\sqcup T_1\sqcup\mathring{\Delta}^2_s=\Delta^2_{s-1}$ такие, что $\Delta\cap T_2\neq\varnothing$ (см. рис. 4 для $s=4$). Возникающая $(2,s-1)$-система, благодаря равенствам $u_c=0$ для $c\in T_1\sqcup\mathring{\Delta}^2_s$, сводится к $(1,s-1)$-системе (у нас $T_2=\Delta^1_{s-1}$), которая имеет только нулевое решение (см. п. 3.1.2), $u_c=0$ для $c\in T_2$.

Аналогично, на третьем этапе, рассматривая систему $\mathcal{L}_\Delta=0$, где $\Delta\subseteq\Delta^2_s=T_3\sqcup T_2\sqcup T_1\sqcup\mathring{\Delta}^2_s$ такие, что $\Delta\cap T_3\neq\varnothing$, получаем $u_c=0$ для $c\in T_3$. Таким образом, $(2,s)$-система (18) при $s\geqslant 4$ имеет только нулевое решение, поэтому неравенство (19) справедливо.

3.2.2. $r=2$, $s=3$. Случай $r=2$, $s=3$ представлен на рис. 5 а). Следуя рассуждениям предыдущего пункта и трёх его этапов, проверим, что любое ненулевое решение $(2,3)$-системы (если оно существует) однозначно восстанавливается по значению u_c для $c\in T_1$, откуда и будет следовать, что $\dim U_{2,3}\leqslant a_{2,3}=1$. В этом убедимся, если покажем, что $(2,3)$-система вместе с одним дополнительным уравнением $u_c=0$ (как у разности $(u_z=u'_z-u''_z,\ z\in\Delta^2_3)$ двух решений рассматриваемой $(2,3)$-системы $(u'_z,\ z\in\Delta^2_3)$ и $(u''_z,\ z\in\Delta^2_3)$ с $u'_c=u''_c$) имеет только нулевое решение.

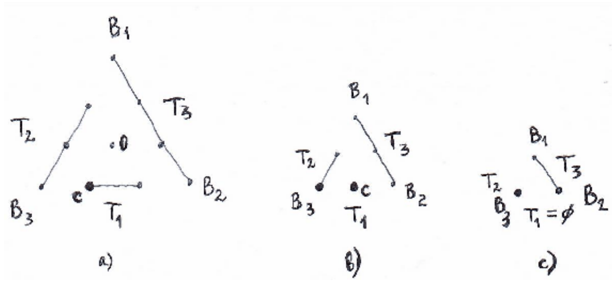

Рис. 5

Пусть $u_c = 0$. У нас $|\overset{\circ}{\Delta}{}^2_3| = |\Delta^2_0| = 1$ и $u_a = 0$ для $a \in \overset{\circ}{\Delta}{}^2_3$. Далее, согласно п. 3.1.1 на первом этапе имеем $u_d = 0$ для $d \in T_1 \diagdown \{c\}$. Наконец, согласно п. 3.1.2 на втором этапе получаем $u_a = 0$ для $a \in T_2$, после чего, в свою очередь, на третьем этапе получаем $u_a = 0$ для $a \in T_3$.

3.2.3. $\boldsymbol{r = 2,\ s = 2.}$ Случай $r = 2$, $s = 2$ представлен на рис. 5 b). Здесь $\overset{\circ}{\Delta}{}^2_2 = \varnothing$. В неравенстве (19) имеем $a_{2,2} = 2$. Чтобы убедиться в его справеливости, к $(2,2)$-системе добавляем два уравнения: $u_c = 0$ и $u_{B_3} = 0$. Следуя рассуждениям предыдущего пункта 3.2.2, замечаем, что первый этап не нужен. На втором этапе получаем $u_a = 0$ для $a \in T_2 \diagdown \{B_3\}$, после чего на третьем этапе получаем $u_a = 0$ для $a \in T_3$.

3.2.4. $\boldsymbol{r = 2,\ s = 1.}$ Случай $r = 2$, $s = 1$ представлен на рис. 5 c). Здесь $\overset{\circ}{\Delta}{}^2_1 = \varnothing$. В неравенстве (19) имеем $a_{2,1} = 2$. Чтобы убедиться в его справеливости, к $(2,1)$-системе снова добавляем два уравнения: $u_{B_3} = 0$ и $u_{B_2} = 0$. Здесь не нужны первый и второй этапы. На третьем этапе получаем $u_{B_1} = 0$.

3.3. $\boldsymbol{r \geqslant 3.}$ Доказательство теоремы 5 продолжим индукцией по r. Разобранные размерности $r = 1$ и $r = 2$ являются началом индукции. Общая схема рассуждений при $r \geqslant 3$ будет та же, что и при $r = 2$.

3.3.1. Докажем, что $u_c = 0$ для $c \in \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s$ при любых $r \geqslant 3$. Пусть

$$\Delta^r_s = \{z = (z_1, \dots, z_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1} |\, z_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, r+1,\ z_1 + \dots + z_{r+1} = s\}.$$

Тогда для внутренней точки $c = (c_1, \dots, c_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ имеем $c_i > 0$ для всех $i = 1, \dots, r+1$. Рассмотрим симплексы

$$C_i = \{z \in \Delta^r_s |\, z_j \geqslant 0, j \in \{1, \dots, r+1\} \diagdown \{i\}, z_i \geqslant c_i\},$$

для всех $i = 1, \dots, r+1$. (Для $r = 3$ эти симплексы представлены на рис. 6.) Через $\mathcal{H}_p$ для $p = 1, \dots, r$ обозначим множество всех $\binom{r+1}{p}$ симплексов Δ, получающихся пересечением p различных симплексов из семейства $C_1, \dots, C_{r+1}$. Каждый симплекс $\Delta \in \mathcal{H}_p$ задаётся соответствующим подмножеством номеров $\mathfrak{n} \subset \{1, \dots, r+1\}$ мощности p. Обозначим его символом $\Delta_{\mathfrak{n}}$, $\Delta_{\mathfrak{n}} = \cap_{i \in \mathfrak{n}} C_i$. Имеем равенства

$$\Delta = \Delta_{\mathfrak{n}} = \{z \in \Delta^r_s |\, z_i \geqslant 0, i \in \{1, \dots, r+1\} \diagdown \mathfrak{n}, z_i \geqslant c_i, i \in \mathfrak{n}\}.$$

Тогда $\Delta_{\{i\}} = C_i$ для всех $i = 1, \dots, r+1$. Положим дополнительно $\Delta_{\varnothing} = \Delta^r_s$ и $\mathcal{H}_0 = \{\Delta^r_s\}$.

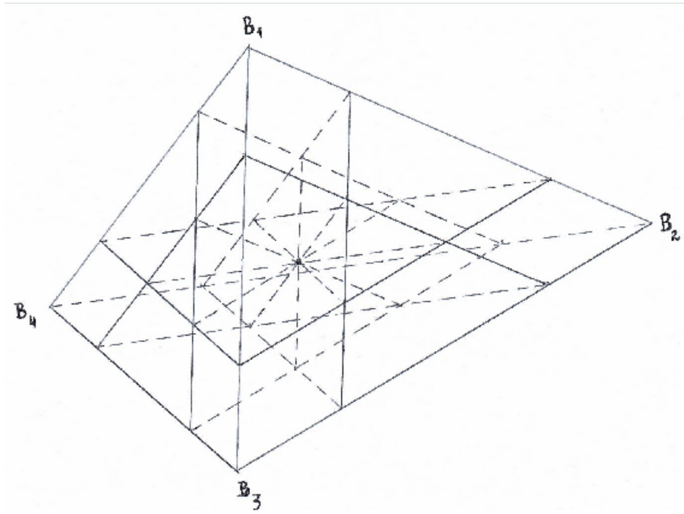

Рис. 6

Рассмотрим у симплекса $\Delta = \Delta_{\mathfrak{n}} = [b_1, \ldots, b_{r+1}] \in \mathcal{H}_p$ при всех $p = 0, 1, \ldots, r$ одну из его вершин $b_i = (b_{i,1}, \ldots, b_{i,r+1})$. Согласно определению симплекса $\Delta_{\mathfrak{n}}$ имеем $b_{i,j} \in \{0, c_j\}$ для $j \neq i$. Напомним, что вершины симплексов $\Delta \subseteq \Delta_s^r$ занумерованы в п. 2 (при определении (r,s)-системы) так, что $b_{i,i} > b_{j,i}$ для всех $j \neq i$. Такая нумерация удобна тем, что $b_{i,j} = 0$ для $j \neq i$ и $j \notin \mathfrak{n}$, $b_{i,j} = c_j$ для $j \neq i$ и $j \in \mathfrak{n}$, а $b_{i,i} = s - \sum_{j \in \{1,\ldots,r+1\} \setminus \{i\}} b_{i,j}$. В нашем случае, когда $\tau_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, r+1$, вершина b_i – ближайшая вершина симплекса Δ к i-й координатной оси, при $p = s$ вершина $B_i = b_i$ симплекса $\Delta_\varnothing = \Delta_s^r$ находится на i-й координатной оси.

Рассмотрим теперь произвольную вершину b некоторого симплекса $\Delta = \Delta_{\mathfrak{n}} \in \bigsqcup_{p=0}^r \mathcal{H}_p$. Она имеет в Δ некоторый номер $i \in \{1, \ldots, r+1\}$. Тогда $b = b_i = (b_{i,1}, \ldots, b_{i,r+1})$. Обозначим

$$\mathfrak{n}' = \{j \in \{1, \ldots, r+1\} \setminus \{i\} \,|\, b_{i,j} = c_j\},$$

$$\mathfrak{w} = \{j \in \{1, \ldots, r+1\} \setminus \{i\} \,|\, b_{i,j} = 0\},$$

$$\{1, \ldots, r+1\} = \mathfrak{w} \sqcup \{i\} \sqcup \mathfrak{n}'.$$

При $\mathfrak{w} \neq \varnothing$ точка b может быть вершиной только у двух симплексов из $\bigsqcup_{p=0}^r \mathcal{H}_p$. Вторым симплексом является либо $\Delta' = \Delta_{\mathfrak{n}'}$, где $|\mathfrak{n}'| = |\mathfrak{n}| - 1$, при $i \in \mathfrak{n}$, либо $\Delta' = \Delta_{\mathfrak{n} \cup \{i\}}$, где $|\mathfrak{n} \cup \{i\}| = |\mathfrak{n}| + 1$, при $i \notin \mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$. В другом симплексе Δ' вершина b имеет тот же номер i. В случае $i \in \mathfrak{n}$ это очевидно. Если же $i \notin \mathfrak{n}$, то

$$b_{i,i} = s - \sum_{j \in \mathfrak{n}'} c_j = c_i + \sum_{j \in \mathfrak{w}} c_j > c_i,$$

так как $\mathfrak{w} \neq \varnothing$.

Если $\mathfrak{w} = \varnothing$, то $\mathfrak{n} = \{1, \ldots, r+1\} \setminus \{i\}$, а $b = c$. Тогда в качестве i-й вершины вершина $b = c$ может выступать только у одного симплекса $\Delta = \Delta_{\{1,\ldots,r+1\} \setminus \{i\}}$, при каждом i в своём симплексе.

По сделанным замечаниям из уравнений (r,s)-системы (18) получаем

$$0 = \sum_{p=0}^{r} \sum_{\Delta \in \mathcal{H}_p} (-1)^p \mathcal{L}_\Delta = (-1)^r \left(\sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(c) \right) \cdot u_c.$$

Все остальные неизвестные u_b в этой сумме сократятся, так как встречаются по два раза, причём с одинаковыми по модулю коэффициентами, но с противоположными знаками.

У нас функции $\varphi_i\colon \Delta^r_s \to \mathbb{R}$ для всех $i = 1, ..., r+1$ положительно определённые, поэтому $\sum_{i=1}^{r+1} \varphi_i(c) \neq 0$ и $u_c = 0$, что и требовалось.

3.3.2. Докажем теперь неравенство (19). Зададим симплекс Δ^r_s (см. начало п. 2) с помощью значений $\tau_i = 1$ для всех $i = 1, \ldots, r+1$:

$$\Delta^r_s = \{z = (z_1, \ldots, z_{r+1}) \in \mathbb{N}^{r+1} |\, z_1 + \ldots + z_{r+1} = r + 1 + s\}.$$

Как и в п. 3.2.1 положим $\Gamma_i = \{z \in \Delta^r_s |\, z_i = 1\} = \Delta^{r-1}_s$ для всех $i = 1, \ldots, r+1$ и $T_i(r, s) = \Gamma_i \setminus \bigcup_{j=i+1}^{r+1} \Gamma_j$ для $i = 1, \ldots, r$, а $T_{r+1}(r, s) = \Gamma_{r+1} = \Delta^{r-1}_s$. Имеем разбиение $\Delta^r_s \setminus \mathring{\Delta}^r_s = \coprod_{i=1}^{r+1} T_i(r, s)$. Для $r = 3$ и $s = 5$ оно представлено на рис. 7:

$$T_1(3, s) = [H, G, F] = \Delta^2_{s-3}, \quad T_2(3, s) = [C, E, D] = \Delta^2_{s-2},$$
$$T_3(3, s) = [A, K, B_4] = \Delta^2_{s-1}, \quad T_4(3, s) = [B_1, B_2, B_3] = \Delta^2_s.$$

В общем случае

$$T_{r+1}(r, s) = \Delta^{r-1}_s, T_r(r, s) = \Delta^{r-1}_{s-1}, \ldots, T_i(r, s) = \Delta^{r-1}_{s-r-1+i}, \ldots, T_1(r, s) = \Delta^{r-1}_{s-r}.$$

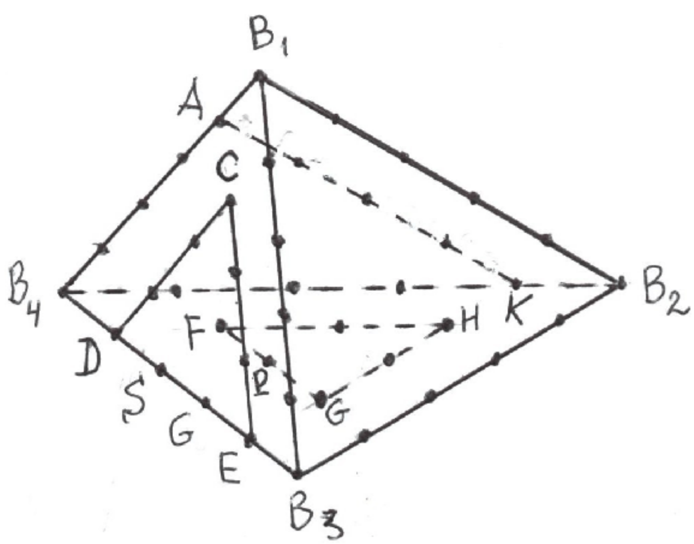

Рис. 7

По аналогии с п. 3.2.2 неравенство (19) будем доказывать (исходя из индуктивных предположений) путём добавления к (r, s)-системе уравнений $u_z = 0$ для $z \in A_{r,s}$, где

$$A_{r,s} = \{(v_1, \ldots, v_{r+1}) \in \Delta^r_s |\, v_i \leqslant i,\ i = 1, \ldots, r+1\}, \tag{20}$$

причём

$$|A_{r,s}| = a_{r,s} \quad \text{для всех} \quad r \geqslant 1 \quad \text{и} \quad s \geqslant 0. \tag{21}$$

Равенство (21) докажем индукцией по $r \geqslant 1$. При $s = 0$ оно очевидно, $|A_{r,0}| = a_{r,0} = 1$. Для $r = 1$ равенство (21) фактически уже использовалось в п. 3.1. Действительно, $A_{1,1} = \{B_2\}$ на рис. 1 и $A_{1,s} = \varnothing$ для $s \geqslant 2$ на рис. 2, а $a_{1,1} = 1$ и $a_{1,s} = 0$ для $s \geqslant 2$ согласно (11).

Пусть $r \geqslant 2$. Имеем вложения

$$A_{r,s} \subset \Gamma_1 \subset \Delta^r_s \setminus \mathring{\Delta}^r_s = \coprod_{j=1}^{r+1} T_j(r, s),$$

поэтому

$$A_{r,s} = \bigsqcup_{j=1}^{r+1} (A_{r,s} \cap T_j(r,s)).$$

Подмножество $A_{r,s} \cap T_j(r,s)$ для каждого $j = 1, \dots, r+1$ состоит из точек $v = (v_1, \dots, v_{r+1}) \in \Delta^r_s$, координаты которых удовлетворяют условиям

$$v_i \leqslant i \text{ для } i \in \{1, \dots, r+1\} \setminus \{j\},\ v_j = 1,\ v_i > 1 \text{ для } i \in \{j+1, \dots, r+1\}.$$

Для выяснения расположения подмножества $A_{r,s} \cap T_j(r,s)$ в симплексе $T_j(r,s) = \Delta^{r-1}_{s-r-1+j}$, зададим его величинами

$$\tau'_1 = \tau_1 = 1, \dots, \tau'_{j-1} = \tau_{j-1} = 1; \tau'_j = \tau_{j+1} - 1, \dots, \tau'_r = \tau_{r+1} - 1.$$

При таком задании симплекса $T_j(r,s)$ имеем

$$A_{r,s} \cap T_j(r,s) = \{(v_1, \dots, v_r) \in \Delta^{r-1}_{s-r-1+j} | \, v_i \leqslant i,\ i = 1, \dots, r\} = A_{r-1,s-r-1+j}.$$

В результате, по предположению индукции имеем

$$|A_{r,s}| = \sum_{j=1}^{r+1} |A_{r,s} \cap T_j(r,s)| = \sum_{j=1}^{r+1} |A_{r-1,s-r-1+j}| = \sum_{j=1}^{r+1} a_{r-1,s-r-1+j} = a_{r,s}.$$

Последнее равенство в выписанной цепочке равенств непосредственно следует из (11). (При $r \geqslant 1$ и $s < 0$ считаем $a_{r,s} = 0$ и $A_{r,s} = \varnothing$.)

Равенство (21) доказано.

Для доказательства неравенства (19) остаётся убедиться, что (r,s)-система вместе с уравнениями $u_z = 0$ для $z \in A_{r,s}$ имеет только нулевое решение. В п. 3.3.1 показали, что $u_z = 0$ для $z \in \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s$. После чего, как и в п. 3.2 убеждаемся (благодаря предположению индукции) в равенствах $u_z = 0$ для $z \in T_j(r,s)$ последовательно для $j = 1, 2, \dots, r+1$. При очередном j имеем $(r-1, s-r-1+j)$-систему с дополнительными уравнениями $u_z = 0$ для $z \in A_{r-1,s-r-1+j}$. В результате имеем $u_z = 0$ для $z \in \Delta^r_s \setminus \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s = \bigsqcup_{j=1}^{r+1} T_j(r,s)$, а значит и $u_z = 0$ для всех $z \in \Delta^r_s$. Этим доказано неравенство (19), утверждаемое Теоремой 5.

4. Доказательство теоремы 6.

Систему линейных уравнений из формулировки теоремы 6 обозначим символом $(r,s)_2$. Она получается из (r,s)-системы удалением уравнений $\mathcal{L}_\Delta = 0$ для всех подсимплексов $\Delta = \Delta^r_1 \subset \Delta^r_s$ с длиной ребра 1. Символом $R_{r,s}$ обозначим пространство решений $(r,s)_2$-системы. Необходимо доказать следующее неравенство

$$\dim R_{r,s} \leqslant a_{r+1,s} \quad \text{для всех} \quad s \geqslant 0. \tag{22}$$

4.1. Неравенство (22) докажем аналогично доказательству неравенства (19) в п. 3 (при доказательстве теоремы 5) индукцией по $r \geqslant 1$. Начало индукции с $r = 1$ для $s = 0, 1, 2, 3$ очевидно, а для $s \geqslant 4$ проверяется с помощью рассуждений п. 3.1.2. Индуктивный переход повторяет рассуждения п. 3.3, используя разбиение

$$\Delta^r_s = \overset{\circ}{\Delta}{}^r_s \sqcup \coprod_{j=1}^{r+1} T_j(r,s) \tag{23}$$

из п. 3.3.2. Вместо подмножеств $A_{r,s}$ будем рассматривать другие подмножества $B_{r,s} \subset \Delta_s^r$. Символом $B_{r,s}$ обозначено подмножество

$$B_{r,s} = \{(v_1, \dots, v_{r+1}) \in \Delta_s^r | \, v_i \leqslant i+1, i = 1, \dots, r+1\}. \tag{24}$$

(Как и в п. 3.3.2 симплекс Δ_s^r здесь задаём значениями $\tau_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, r+1$.) Неравенства (22) следуют из равенств

$$|B_{r,s}| = a_{r+1,s} \quad \text{для всех} \quad s \geqslant 0, \tag{25}$$

и из того, что $(r,s)_2$-система с дополнительными уравнениями $u_z = 0$ для всех $z \in B_{r,s}$, имеет только нулевое решение для всех $s \geqslant 0$. Оба эти утверждения докажем индукцией по $r \geqslant 1$, опуская начала индукции за очевидностью.

4.2. Из разбиения (23) получаем

$$B_{r,s} = (B_{r,s} \cap \overset{\circ}{\Delta}{}_s^r) \sqcup \coprod_{i=1}^{r+1} (B_{r,s} \cap T_i(r,s)). \tag{26}$$

Выясним расположение в симплексе $T_j(r,s) = \Delta_{s-r-1+j}^{r-1}$ подмножества $B_{r,s} \cap T_j(r,s)$, состоящего из точек $(v_1, \dots, v_{r+1}) \in \Delta_s^r$, координаты которых удовлетворяют условиям

$$v_i \leqslant i+1 \quad \text{для} \quad i \in \{1, \dots, r+1\} \setminus \{j\}, \quad v_j = 1,$$
$$v_i > 1 \quad \text{для} \quad i \in \{j+1, \dots, r+1\}.$$

Зададим симплекс $\Delta_{s-r-1+j}^{r-1}$ величинами

$$\tau_i' = \tau_i = 1 \text{ для } i = 1, \dots, j-1 \text{ и } \tau_i' = \tau_{i+1} - 1 \text{ для } i = j, \dots, r.$$

При таком задании симплекса $T_j(r,s)$ имеем $B_{r,s} \cap T_j(r,s) = B_{r-1,s-r-1+j}$. Аналогично, из равенства $\overset{\circ}{\Delta}{}_s^r = \Delta_{s-r-1}^r$ получаем $B_{r,s} \cap \overset{\circ}{\Delta}{}_s^r = A_{r,s-r-1}$. После этого разбиение (26) принимает вид

$$B_{r,s} = A_{r,s-r-1} \sqcup \coprod_{i=1}^{r+1} B_{r-1,s-r-1+j},$$

откуда по предположению индукции, учитывая равенства (21), имеем равенства (25):

$$|B_{r,s}| = |A_{r,s-r-1}| + \sum_{j=1}^{r+1} |B_{r-1,s-r-1+j}| = a_{r,s-r-1} + \sum_{j=1}^{r+1} a_{r,s-r-1+j} = a_{r+1,s}.$$

Последнее равенство в этой цепочке равенств следует из (11).

4.3. Пусть, теперь, величины u_z с "номерами" $z \in \Delta_s^r$ являются решением $(r,s)_2$-системы, удовлетворяющим условиям $u_z = 0$ по всем $z \in B_{r,s}$. Покажем, что тогда $u_z = 0$ для всех $z \in \Delta_s^r$.

Вначале докажем, что совокупность величин u_z с "номерами" $z \in \overset{\circ}{\Delta}{}_s^r = \Delta_{s-r-1}^r$ является решением $(r, s-r-1)$-системы. Пусть $\tilde{\Delta}$ – произвольный симплекс, содержащийся в $\overset{\circ}{\Delta}{}_s^r$. Покажем, что $\mathcal{L}_{\tilde{\Delta}} = 0$. (Для получения всех уравнений $(r, s-r-1)$-системы, достаточно ограничиваться симплексами $\tilde{\Delta}$ с длиной ребра 1.) Как и в п. 3.3.1, симплекс Δ_s^r зададим величинами $\tau_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, r+1$. Тогда

$$\tilde{\Delta} = \{(v_1, \dots, v_{r+1}) \in \Delta_s^r | \, v_i \geqslant c_i > 0, \, i = 1, \dots, r+1\},$$

для некоторых целых положительных $c_1, \dots, c_{r+1}$. Как и в п. 3.3.1 рассмотрим симплексы

$$C_i = \{z \in \Delta_s^r | \, z_j \geqslant 0, j \in \{1, \dots, r+1\} \setminus \{i\}, z_i \geqslant c_i\}$$

для всех $i = 1, \dots, r+1$. Символом $\mathcal{H}_p$ для $p = 1, \dots, r+1$ обозначаем множество всех симплексов, получающихся пересечением p различных симплексов из семейства $C_1, \dots, C_{r+1}$. Тогда $\mathcal{H}_{r+1} = \{\tilde{\Delta}\}$, а для $p \leqslant r$ симплексы из $\mathcal{H}_p$, как содержащие $\tilde{\Delta}$ и отличные от $\tilde{\Delta}$, имеют длину ребра не меньшую двух.

Практически повторяя рассуждения п. 3.3.1, имеем равенство

$$\sum_{p=0}^{r+1} (-1)^p \sum_{\Delta \in \mathcal{H}_p} \mathcal{L}_\Delta = 0,$$

откуда, благодаря уравнениям $\mathcal{L}_\Delta = 0$ из $(r,s)_2$-системы, получаем $\mathcal{L}_{\tilde{\Delta}} = 0$. Таким образом, набор значений u_z с "номерами" $z \in \overset{\circ}{\Delta}{}_s^r = \Delta_{s-r-1}^r$ является решением $(r, s-r-1)$-системы, а с учётом того, что $u_z = 0$ для $z \in A_{r,s-r-1} = B_{r,s} \cap \overset{\circ}{\Delta}{}_s^r$, из п. 3.3.2 имеем $u_z = 0$ для всех $z \in \overset{\circ}{\Delta}{}_s^r$.

Далее определяем u_z последовательно для $z \in T_j(r,s) = \Delta_{s-r-1+j}^{r-1}$ в порядке $j = 1, 2, \dots, r+1$. При каждом очередном j, благодаря равенствам $u_z = 0$ для $z \in \overset{\circ}{\Delta}{}_s^r \sqcup \coprod_{i=1}^{j-1} T_i(r,s)$, будем иметь $(r-1, s-r-1+j)_2$-систему относительно неизвестных u_z с "номерами" $z \in T_j(r,s)$ с дополнительными условиями $u_z = 0$ для $z \in B_{r,s} \cap T_j(r,s) = B_{r-1,s-r-1+j}$. По предположению индукции так расширенные системы уравнений имеют только нулевые решения. В результате имеем $u_z = 0$ для всех $z \in \Delta_s^r$.

Теорема 6 доказана.

5. Доказательство теоремы 1.

Поскольку дифференциальные операторы (1) и соответствующие им многочлены $P(X_1, \dots, X_n)$ в (14) задаются одним и тем же набором коэффициентов $c_{z_1,\dots,z_n} \in \mathbb{R}$, параметризованных векторами $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}_0^n$, а условия (3) и (15) равносильны, для соответствующих линейных подпространств в пространстве многочленов $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ будем использовать обозначения из теоремы 1.

При таком соглашении линейное пространство $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ с базисом $X_1^{z_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{z_n}$ по всем $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{N}_0^n$, обозначаемое далее символом $\mathcal{V}_n$, представляется прямой суммой 2^n своих подпространств $V_{n,\mathfrak{m}}$, параметризованных подмножествами $\mathfrak{m} \subseteq \{1, \dots, n\}$ и задаваемых в виде линейной оболочки:

$$V_{n,\mathfrak{m}} = \langle X_1^{z_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{z_n} | \, z_i = 0, \, i \notin \mathfrak{m}, \, z_i \geqslant 1, \, i \in \mathfrak{m} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Для $\mathfrak{m} = \{1, \dots, n\}$ имеем пространство многочленов, делящихся на $X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$, т.е. $V_n = V_{n,\{1,\dots,n\}}$, а для произвольных $\mathfrak{m} \subseteq \{1, \dots, n\}$ имеем $V_{n,\mathfrak{m}} \cong V_m$, где $m = |\mathfrak{m}|$. Линейные подпространства $V_{n,\mathfrak{m}}$ инвариантны относительно используемых в (15) линейных преобразований

$$L_p := \sum_{i=1}^n X_i (\partial_{X_i})^{p+1}$$

для всех $p \geqslant 1$. Инвариантность следует из того, что $X_i (\partial_{X_i})^{p+1} X_i^{z_i}$ с $z_i \geqslant 1$ либо равно нулю при $p+1 > z_i$, либо (при $p+1 \leqslant z_i$) равно $z_i(z_i-1)\dots(z_i-p) X_i^{z_i-p}$, где $z_i - p \geqslant 1$. Благодаря этому замечанию, множество решений $\mathcal{W}_n$ системы уравнений (15) представляется прямой суммой линейных подпространств $W_{n,\mathfrak{m}}$. Пространство $W_{n,\mathfrak{m}}$ состоит из решений системы уравнений (15), принадлежащих $V_{n,\mathfrak{m}}$.

Пространство $V_{n,\mathfrak{m}}$ представляется прямой суммой своих подпространств $V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$, равных линейным оболочкам

$$\langle X_1^{z_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{z_n}\in\mathcal{V}_n|\, z_i=0, i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\mathfrak{m}, z_i\geqslant 1, i\in\mathfrak{m}, z_1+\ldots+z_n=k\rangle_{\mathbb{R}}$$

по всем $k\geqslant m$, где $m=|\mathfrak{m}|$. Пространство $V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ состоит из однородных многочленов степени k. Для всех $p\geqslant 1$ и $k\geqslant m$ имеем $L_p(V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)})\subseteq V_{n,\mathfrak{m}}^{(k-p)}$. Последне справедливо, так как для отдельных слагаемых $X_i(\partial_{X_i})^{p+1}$ преобразования L_p и базисных векторов $X_1^{z_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{z_n}\in V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ имеем либо $X_i(\partial_{X_i})^{p+1}(X_1^{z_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{z_n})=0$ (при $z_i<p+1$), либо (при $z_i\geqslant p+1$)

$$X_i(\partial_{X_i})^{p+1}(X_1^{z_1}\ldots X_n^{z_n})=z_i(z_i-1)\ldots(z_i-p)X_1^{z_1}\ldots X_{i-1}^{z_{i-1}}X_i^{z_i-p}X_{i+1}^{z_{i+1}}\ldots X_n^{z_n}\in V_{n,\mathfrak{m}}^{(k-p)}.$$

Тогда, если $w=\sum_{k\geqslant m}v_k$, где $v_k\in V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$, и $w\in W_{n,\mathfrak{m}}$, то для всех $p\geqslant 1$ имеем равенства $L_p(w)=\sum_{k\geqslant m}L_p(v_k)=0$, в которых $L_p(v_k)\in V_{n,\mathfrak{m}}^{(k-p)}$, поэтому $L_p(v_k)=0$ для всех $k\geqslant m$ и $p\geqslant 1$. Таким образом, подпространство решений $W_{n,\mathfrak{m}}$ системы уравнений (15) представляется прямой суммой своих подпространств $W_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}=W_{n,\mathfrak{m}}\cap V_{n,\mathfrak{m}}^{(k)}$ по всем $k\geqslant m$.

Приведённые выше замечания сводят доказательство теоремы 1 к установлению неравенств

$$\dim W_m^{(k)}\leqslant a_{m-1,k-m}, \tag{27}$$

для $m\geqslant 1$ и $k\geqslant m$. Здесь, напомним, пространство $W_m^{(k)}=W_{m,\{1,\ldots,m\}}^{(k)}$, будучи подпространством пространства $V_m^{(k)}=V_{m,\{1,\ldots,m\}}^{(k)}$, равного

$$V_m^{(k)}=\left\{\sum_{(z_1,\ldots,z_m)\in\mathbb{N}^m}c_{z_1,\ldots,z_m}X_1^{z_1}\cdot\ldots\cdot X_m^{z_m}\,|\, c_{z_1,\ldots,z_m}\in\mathbb{R},\ z_1+\ldots+z_m=k\right\}$$

состоит из однородных многочленов степени k, делящихся на $X_1\cdot\ldots\cdot X_m$.

5.1. В линейном пространстве $V_m^{(k)}$ рассмотрим базис

$$e_{z_1,\ldots,z_m}=\frac{X_1^{z_1}}{(z_1-1)!}\cdot\ldots\cdot\frac{X_m^{z_m}}{(z_m-1)!}, \tag{28}$$

где векторы $(z_1,\ldots,z_m)$ пробегают точки целочисленного симплекса

$$\Delta_{k-m}^{m-1}=\{(Z_1,\ldots,Z_m)\in\mathbb{N}^m|\, Z_1+\ldots+Z_m=k\}.$$

Обозначение $e_{z_1,\ldots,z_m}$ будем использовать и в ситуациях, когда $(z_1,\ldots,z_m)\notin\mathbb{N}^m$, считая тогда $e_{z_1,\ldots,z_m}=0$. В этом новом базисе элементы пространства $V_m^{(k)}$ имеют координаты

$$u_{z_1,\ldots,z_m}=(z_1-1)!\cdot\ldots\cdot(z_m-1)!\cdot c_{z_1,\ldots,z_m}.$$

Действие линейного преобразования $L_p\colon V_m^{(k)}\to V_m^{(k-p)}$ на базисных элементах (28) представляется в виде:

$$L_pe_{z_1,\ldots,z_m}=\sum_{i=1}^m z_ie_{z_1,\ldots,z_{i-1},z_i-p,z_{i+1},\ldots,z_m}.$$

Коэффициент при базисном векторе $e_{y_1,\ldots,y_m}$ с "номером" $(y_1,\ldots,y_m)\in\Delta_{k-p-m}^{m-1}$ у образа

$$L_p\left(\sum_{(z_1,\ldots,z_m)\in\Delta^{m-1}_{k-m}} u_{z_1,\ldots,z_m}e_{z_1,\ldots,z_m}\right)=$$
$$=\sum_{(z_1,\ldots,z_m)\in\Delta^{m-1}_{k-m}} u_{z_1,\ldots,z_m}\sum_{i=1}^{m} z_i e_{z_1,\ldots,z_{i-1},z_i-p,z_{i+1},\ldots,z_m}$$

равен

$$v_{y_1,\ldots,y_m}=\sum_{i=1}^{m}(y_i+p)u_{y_1,\ldots,y_{i-1},y_i+p,y_{i+1},\ldots,y_m},$$

и он, согласно (15), должен быть нулевым, причём для всех $(y_1,\ldots,y_m)\in\Delta^{m-1}_{k-p-m}$. В результате система уравнений (15) относительно неизвестных $u_{z_1,\ldots,z_m}$, параметризованных точками $(z_1,\ldots,z_m)\in\Delta^{m-1}_{k-m}$, запишется в виде уравнений

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i+p)u_{y_1,\ldots,y_{i-1},y_i+p,y_{i+1},\ldots,y_m}=0 \tag{29}$$

для всех p из диапазона $1\leqslant p\leqslant k-m$ и $(y_1,\ldots,y_m)\in\Delta^{m-1}_{k-p-m}$. Для $p>k-m$ дополнительных уравнений не возникает, поскольку тогда $L_p(V^{(k)}_m)=\{0\}$.

Интересующая нас система линейных уравнений (29), как не трудно понять, является $(m-1,k-m)$-системой с функциями $\varphi_i\colon\Delta^{m-1}_{k-m}\to\mathbb{R}$, $\varphi_i(z_1,\ldots,z_m)=z_i$, при условии, что симплекс Δ^{m-1}_{l-m} задаётся значениями $\tau_i=1$ для всех $i=1,\ldots,m$, поэтому требуемая для доказательства теоремы 1 верхняя оценка (27) для размерности пространства решений системы линейных уравнений (29) будет следует из уже доказанной теоремы 5.

Теорема 1 доказана.

Равносильность условий инвариантности (3) системе уравнений (29) может быть доказана также с помощью формулы Фаа ди Бруно о производных высших порядков суперпозиции функций $g=f(\varphi)$ [22]:

$$g^{(z)}=\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_z)\in\mathbb{N}_0^z:\\ i_1+2i_2+3i_3+\ldots+zi_z=z}}\frac{z!}{i_1!i_2!\ldots i_z!}f^{(i_1+i_2+\ldots+i_z)}(\varphi)\prod_{j=1}^{z}\left(\frac{\varphi^{(j)}}{j!}\right)^{i_j}.$$

Впервые она получена Антони Арбогастом [23], но известность получила благодаря работам [24], [25].

6. Доказательство теоремы 3.

Согласно рассуждениям пп. 2 и 3, теорема 3 будет доказана, если показать, что в (r,s)-системе с параметрами $r\geqslant 1$ и $s\geqslant 0$, для которой $\varphi_i(z_1,\ldots,z_{r+1})=z_i$ для всех $i=1,\ldots,r+1$ (при задании симплекса Δ^r_s значениями $\tau_i=1$ при всех $i=1,\ldots,r+1$) уравнения $\mathcal{L}_{\Delta^r_p}=0$ для всех $\Delta^r_p\subseteq\Delta^r_s$ и всех $p=3,\ldots,s$ следуют из уравнений $\mathcal{L}_{\Delta^r_1}=0$ по всем $\Delta^r_1\subseteq\Delta^r_s$ и уравнений $\mathcal{L}_{\Delta^r_2}=0$ по всем $\Delta^r_2\subseteq\Delta^r_s$.

Пусть $p\geqslant 3$ и конкретно

$$\Delta^r_p=\{(z_1,\ldots,z_{r+1})\in\Delta^r_s|\, z_i\geqslant k_i\geqslant 1,\, i=1,\ldots,r+1\}.$$

Тогда $k_1 + ... + k_{r+1} = r + 1 + s - p$. Вершины симплекса Δ_p^r обозначим $B_1, \dots, B_{r+1}$. Для всех $i = 1, \dots, r+1$ имеем
$$B_i = (k_1, ..., k_{i-1}, k_i + p, k_{i+1}, \dots, k_{r+1}).$$

Рассмотрим возможное при $p \geqslant 3$ разбиение $p = p' + p''$, где p', $p'' \in \mathbb{N}$ и $p' \neq p''$. К вершине B_i для всех $i = 1, \dots, r+1$ пристроим два симплекса
$$\Delta_{p'}^r(i) = \{(z_1, \dots, z_{r+1}) \in \Delta_p^r |\, z_i \geqslant k_i + p''\} \subset \Delta_p^r$$
и
$$\Delta_{p''}^r(i) = \{(z_1, \dots, z_{r+1}) \in \Delta_p^r |\, z_i \geqslant k_i + p'\} \subset \Delta_p^r$$
с вершинами соответственно
$$B'_{i,1}, \dots, B'_{i,i-1}, B_i, B'_{i,i+1}, \dots, B'_{i,r+1} \ \text{ и } \ B''_{i,1}, \dots, B''_{i,i-1}, B_i, B''_{i,i+1}, \dots, B''_{i,r+1},$$
расположенными на рёбрах симплекса Δ_p^r (см. рис. 8, где $p' < p''$). Возникает по две вершины $B'_{i,j} = B''_{j,i}$, $B''_{i,j} = B'_{j,i}$ внутри каждого ребра $[B_i, B_j]$ симплекса Δ_p^r.

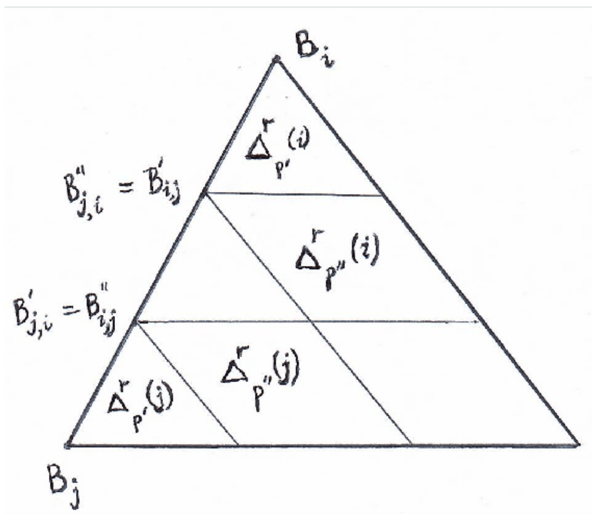

Рис. 8

Справедливость теоремы 3 будет следовать из равенств
$$\sum_{i=1}^{r+1} (k_i + p'')\mathcal{L}_{\Delta_{p'}^r(i)} - \sum_{i=1}^{r+1} (k_i + p')\mathcal{L}_{\Delta_{p''}^r(i)} = (p'' - p')\mathcal{L}_{\Delta_p^r}, \tag{30}$$
позволяющих последовательно исключать из (r, s)-системы уравнения $\mathcal{L}_\Delta = 0$ с симплексами Δ максимального (на текущий момент) размера. Коэффициент при неизвестном u_{B_i} в левой и правой части равенства (30) равен
$$(k_i + p'')(k_i + p) - (k_i + p')(k_i + p) = (p'' - p')(k_i + p).$$
Далее, коэффициенты при $u_{B'_{i,j}}$ и $u_{B''_{i,j}}$ в правой части равенства (30) равны 0, а в левой части они равны соответственно
$$(k_i + p'')(k_j + p') - (k_j + p')(k_i + p'') = 0$$
и
$$(k_j + p'')(k_i + p') - (k_i + p')(k_j + p'') = 0.$$

Теорема 3 доказана.

7. Доказательство теоремы 2.

Согласно пп. 2 и 3 для доказательства равенства (13) достаточно проверить, что размерность пространства решений $U_{r,s}$ соответствующей (r,s)-системы для $s=0,1,2,3,4$ равна $a_{r,s}$. Непосредственно из равенства (11) получаем

$$a_{r,0}=1, \quad a_{r,1}=r, \quad a_{r,2}=\frac{r(r+1)}{2}-1,$$
$$a_{r,3}=\frac{r(r-1)(r+4)}{6}-1, \quad a_{r,4}=\frac{r(r-2)(r+3)(r+5)}{24}-1.$$

По теореме 3 можно считать, что (r,s)-система с неизвестными u_z, где $z\in\Delta_s^r$, состоит только из уравнений $\mathcal{L}_{\Delta_1^r}=0$ по всем $\Delta_1^r\subset\Delta_s^r$ и $\mathcal{L}_{\Delta_2^r}=0$ по всем $\Delta_2^r\subset\Delta_s^r$ общим числом $|\Delta_{s-1}^r|+|\Delta_{s-2}^r|$. В результате нижней оценкой для размерностей $\dim U_{r,s}=\dim W_{m,m+s}$, где $m=r+1$, выступают величины

$$|\Delta_s^r|-(|\Delta_{s-1}^r|+|\Delta_{s-2}^r|)=$$
$$=\binom{r+s}{s}-\binom{r+s-1}{s-1}-\binom{r+s-2}{s-2}=\binom{r+s-1}{s}-\binom{r+s-2}{s-2},$$

равные $a_{r,s}$ для $s=0,1,2,3,4$. (Считаем $\binom{a}{b}=0$ при $b<0$.) По теореме 5 эти же величины выступают верхними оценками для размерности пространства решений произвольной (r,s)-системы.

Равенство (13) для $s=0,1,2,3,4$ доказано. Для $s=\frac{m(m-1)}{2}$ равенство (13) обеспечивается вронскианом (5).

Далее,

$$\dim U_{r,s}\geqslant\binom{r+s-1}{s}-\binom{r+s-2}{s-2}=\frac{(r+s-2)!}{r!s!}(r^2+sr-r-s^2+s)>0$$

для $s<\frac{r+1}{2}+\frac{\sqrt{5r^2-2r+1}}{2}$. Последняя сумма больше $\frac{1+\sqrt{5}}{2}r$, а $r=m-1$.

Теорема 2 доказана.

8. Доказательство теоремы 4.

Элементы кольца многочленов $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ будем представлять в виде

$$P(X_1,\dots,X_n)=\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{N}_0^n}u_{z_1,\dots,z_n}e_{z_1,\dots,z_n}, \tag{31}$$

где вместо базиса (28) используется другой базис

$$e_{z_1,\dots,z_n}=\frac{(X_1-1)^{z_1}}{z_1!}\cdot\ldots\cdot\frac{(X_n-1)^{z_n}}{z_n!}. \tag{32}$$

Далее используем разложение линейного пространства $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ в прямую сумму своих линейных подпространств:

$$\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]=\sum_{j\geqslant0}M_j,\ M_j=\langle e_{z_1,\dots,z_n}\,|\,z_1+\ldots+z_n=j\rangle_{\mathbb{R}},\ j\geqslant0. \tag{33}$$

Используемый в уравнение (16) линейный оператор представляем в виде

$$\sum_{i=1}^{n}((\partial_{X_i})^{p+1}+(X_i-1)(\partial_{X_i})^{p+1}+\lambda_i(p+1)(\partial_{X_i})^p)=L'_p+L''_p,$$

$$L'_p = \sum_{i=1}^{n} (\partial_{X_i})^{p+1}, \quad L''_p = \sum_{i=1}^{n} ((X_i - 1)(\partial_{X_i})^{p+1} + \lambda_i (p+1)(\partial_{X_i})^p).$$

Как и в п. 5.1 имеем

$$L'_p e_{z_1,\dots,z_n} = \sum_{i=1}^{n} e_{z_1,\dots,z_{i-1},z_i-p-1,z_{i+1},\dots,z_n},$$

поэтому $L'_p(M_j) \subseteq M_{j-p-1}$ для всех $j \geqslant 0$. Здесь полагаем $e_{z_1,\dots,z_n} = 0$, если $(z_1, \dots, z_n) \notin \mathbb{N}_0^n$, когда $z_i < 0$ при некотором $i \in \{1, \dots, n\}$. Считаем также $M_j = \{0\}$ при $j < 0$. Аналогичным образом имеем вложения[1] $L''_p(M_j) \subseteq M_{j-p}$ для всех $j \geqslant 0$, так как

$$L''_p e_{z_1,\dots,z_n} = \sum_{i=1}^{n} (z_i - p + \lambda_i(p+1)) e_{z_1,\dots,z_{i-1},z_i-p,z_{i+1},\dots,z_n}.$$

Коэффициент при базисном векторе $e_{y_1,\dots,y_n}$ для всех $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{N}_0^n$ у образа

$$(L'_p + L''_p) \left(\sum_{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{N}_0^n} u_{z_1,\dots,z_n} e_{z_1,\dots,z_n} \right) =$$
$$= \sum_{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{N}_0^n} u_{z_1,\dots,z_n} \sum_{i=1}^{n} e_{z_1,\dots,z_{i-1},z_i-p-1,z_{i+1},\dots,z_n} +$$
$$+ \sum_{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{N}_0^n} u_{z_1,\dots,z_n} \sum_{i=1}^{n} (z_i - p + \lambda_i(p+1)) e_{z_1,\dots,z_{i-1},z_i-p,z_{i+1},\dots,z_n}$$

равен

$$v_{y_1,\dots,y_n} = \sum_{i=1}^{n} u_{y_1,\dots,y_{i-1},y_i+p+1,y_{i+1},\dots,y_n} + \sum_{i=1}^{n} (y_i + \lambda_i(p+1)) u_{y_1,\dots,y_{i-1},y_i+p,y_{i+1},\dots,y_n},$$

и он, согласно (16), должен быть нулевым, причём для всех $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Благодаря этим замечаниям, при каждом $p \geqslant 1$ уравнения системы линейных уравнений (16) имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i + \lambda_i(p+1)) u_{y_1,\dots,y_{i-1},y_i+p,y_{i+1},\dots,y_n} + \sum_{i=1}^{n} u_{y_1,\dots,y_{i-1},y_i+p+1,y_{i+1},\dots,y_n} = 0, \tag{34}$$

по всем $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Первое слагаемое в сумме (34) отвечает оператору L''_p, а второе слагаемое – оператору L'_p

8.1. Коль скоро система линейных уравнений (34) имеет блочно треугольный вид, отвечающий разложению (33), верхней оценкой для размерности пространства её решений при любых $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ может служить $\sum_{j \geqslant 0} \dim K_j$, где $K_j \subseteq M_j$ – пространство решений однородной системы линейных уравнений

$$L'_p P(X_1, \dots, X_n) = 0 \text{ для всех } p \geqslant 1, \tag{35}$$

относительно неизвестных $P(X_1, \dots, X_n) \in M_j$. Здесь учитывается, что неизвестные $u_{z_1,\dots,z_n}$ системы уравнений (34) могут определяться по мере увеличения параметра $j = z_1 + \dots + z_n \geqslant 0$.

[1] В формуле (6) работы [4] имеется опечатка, нет множителя $(p+1)$ перед $(\partial_{X_i})^p$ в определение оператора L''_p. Автор её обнаружил при чтении [2]. На эту опечатку обратил ещё внимание В.В. Доценко. Она вызвала сомнения в корректности обоснования оценки $(n+1)!$ в [4], но на справедливость приводимых там рассуждений эта опечатка не влияет, требуемое нам включение $L''_p(M_j) \subseteq M_{j-p}$ для всех $j \geqslant 0$, от неё не зависит.

Утверждаемая теоремой 4 верхняя оценка $(n+1)!$ при любых $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ будет следовать из неравенств

$$\dim K_j \leqslant a_{n,j} \quad \text{по всем} \quad j \geqslant 0, \tag{36}$$

так как $\sum_{j\geqslant 0} a_{n,j} = (n+1)!$, где числа $a_{n,j}$ определяются в (11).

Система уравнений (35) для $P(X_1, \dots, X_n) \in M_j$ при каждом $j \geqslant 0$ может быть записана в виде

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} u_{y_1,\dots,y_{i-1},y_i+p+1,y_{i+1},\dots,y_n} = 0 \\ \text{по всем} \quad (y_1, \dots, y_n) \in \Delta^{n-1}_{j-p-1} \quad \text{и} \quad 1 \leqslant p \leqslant j-1.\end{gathered} \tag{37}$$

Неизвестными в уравнениях (37) являются $u_{z_1,\dots,z_n}$, параметризованные точками $(z_1, \dots, z_n)$ симплекса Δ^{n-1}_j:

$$(z_1, \dots, z_n) \in \Delta^{n-1}_j = \{(Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{N}_0^n |\, Z_1 + \dots + Z_n = j\}.$$

Для $j = 0$ и $j = 1$ в системе (37) уравнений нет, поэтому $K_0 = M_0$, $K_1 = M_1$.

Система линейных уравнений (37) является подсистемой определённой в п. 2 (r, s)-системы с параметрами $r = n-1$ и $s = j$ относительно того же набора переменных u_z, параметризованных точками $z \in \Delta^{n-1}_j$, но с другим набором уравнений и положительнозначных функций $\varphi_i\colon \Delta^{n-1}_j \to \mathbb{R}$. Здесь $\varphi_i(z) = 1$ для всех $z \in \Delta^{n-1}_j$ и $i = 1, \dots, n$. Она состоит из уравнений $\mathcal{L}_\Delta = 0$, для всех $\Delta = \Delta^{n-1}_q \subseteq \Delta^{n-1}_j$ с $q = 2, \dots, j$. В п. 4 она названа $(r, s)_2$-системой с $r = n-1$ и $s = j$. Из доказанного там неравенства (22) следует (36).

Теорема 4 доказана.

9. Заключительные замечания.

Представляется, что предлагаемый в статье подход решения (r, s)-систем линейных уравнений может оказаться полезным при решении других задач, связанных с инвариантными дифференциальными операторами. В подтверждение приведём несколько замечаний.

9.1. В работе [6], относящейся не только к прямой, но и к многообразиям произвольной размерности, приводится, в частности, классификация тернарных ($n = 3$) инвариантных дифференциальных операторов над пространствами так называемых взвешенных плотностей на прямой, задаваемых числами λ_1, λ_2, λ_3. Вычленение из представленного там на стр. 168 – 176 общего списка инвариантных дифференциальных операторов тех, что относятся к нашему случаю (когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$), представляет не простую задачу, потому как разложения (10) и (12) там не используются, ограничиваются разложениями (2) и (6), справедливыми для произвольных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Видимо автор [6] не счёл нужным специально их выделять ввиду явной простоты.

Действительно, согласно теореме 1 настоящей статьи такие операторы при $n \leqslant 3$ описываются совсем коротко. Они линейно выражаются через (домноженные на функции) произведения первых дифференциалов (4) с $n = 1, 2, 3$ и вронскианы (5) с $n = 2, 3$ и ещё двух видов операторов из $W_3^{(4)}$ и $W_3^{(5)}$, представленных соответственно в доказательстве теоремы 5 в начале индукции в п. 3.2.4 (рис. 5c)) и в п. 3.2.3 (рис. 5b). В терминах многочленов (14) это соответственно для $s = 1$ многочлены

$$X_1X_2X_3(\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \alpha_3X_3) \quad \text{с} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

и для $s = 2$ многочлены

$$X_1X_2X_3(\alpha_1X_1^2 + \alpha_2X_2^2 + \alpha_3X_3^2 + 3\alpha_1X_2X_3 + 3\alpha_2X_1X_3 + 3\alpha_3X_1X_2) \tag{38}$$

тоже с $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$.

9.2. Гораздо богаче примерами значение $n=4$. Подробно рассмотрим случай $s=5$. Проверим равенство $\dim W_4^{(9)}=3$, необходимое для подтверждения сформулированной во введение гипотезы в случае $n=4$.

В терминах п. 3 имеем $\dim W_4^{(9)}=\dim U_{3,5}$. Предполагаем, что в соответствующей $(3,5)$-системе симплекс Δ_5^3 задаётся величинами $\tau_1=\tau_2=\tau_3=\tau_4=1$, а функции $\varphi_i\colon \Delta_5^3\to\mathbb{N}$ для задания коэффициентов в уравнениях (18) определются как в п. 5: $\varphi_i(z_1,z_2,z_3,z_4)=z_i$ для всех $i=1,2,3,4$. Симплекс Δ_5^3 будем представлять с помощью рис. 7, предполагая там длину ребра равной 5, с шестью точками на ребре.

Теорема 5 утверждает, что $\dim U_{3,5}\leqslant 3$, поэтому для подтверждения равенства $\dim U_{3,5}=3$ достаточно предъявить 3 линейно независимых решения $(3,5)$-системы уравнений. В п. 3 по существу изложен алгоритм явного выписывания любого возможного решения (r,s)-системы $(u_z, z\in\Delta_s^r)$ через произвольно заданные значения u_z для $z\in A_{r,s}\subset\Delta_s^r$. Правда потом для так полученного "решения" необходима проверка уравнений $\mathcal{L}_\Delta=0$ для всех подсимплексов $\Delta\subset\Delta_s^r$ с длинами рёбер 1 и 2. По теореме 3 этого достаточно для проверки.

В нашем случае $|A_{3,5}|=3$. На рис. 7 имеем $A_{3,5}=\{S,P,F\}$. Будем искать возможное решение с $u_S=1$ и $u_P=u_F=0$. Согласно п. 3 имеем $u_z=0$ для $z\in\overset{\circ}{\Delta}{}_5^3$, а для $z\in\Delta_5^3\setminus\overset{\circ}{\Delta}{}_5^3$ значения u_z можно определять в четыре этапа. Вначале для $z\in[H,G,F]=\Delta_2^2$, затем для $z\in[C,E,D]=\Delta_3^2$, на третьем этапе для $z\in[A,K,B_4]=\Delta_4^2$ и, наконец, для $z\in[B_1,B_2,B_3]=\Delta_5^2$.

На первом этапе получаем $u_z=0$ для $z\in\Delta_2^2$, так как $u_z=0$ для $z\in A_{2,2}=\{F,P\}$. Уже на этом этапе можно заключить, что для всех $z\in\Delta_5^3$ справедливы равенства $u_{\sigma_1(z)}=u_z$ и $u_{\sigma_{1,i}(z)}=-u_z$ для $i=2,3,4$. Здесь символом σ_i обозначаем поворот симплекса Δ_5^3 на 120° вокруг его высоты, выходящей из вершины B_i, а символом $\sigma_{i,j}$ обозначаем зеркальную симметрию симплекса Δ_5^3, оставляющую вершины B_i и B_j неподвижными. Это легко доказать исходя из определения (r,s)-системы, инвариантного (в случае нашего выбора коэффициентов $\varphi_i(b_i)$ при неизвестных в уравнениях (18)) при любой перестановке вершин $B_1,\dots,B_{r+1}$. Не приводя формального доказательства, будем всё же использовать заявленную симметрию и кососимметрию, поскольку в конце всё равно предусматривается необходимая проверка. В результате сразу же получаем $u_z=0$ для $z\in[B_1,B_i]$ для всех $i=2,3,4$.

На втором этапе, следуя действиям п. 3.2, находим u_z для $z\in[C,E,D]=\Delta_3^2$. Ответ представлен трапецией (39), $u_D=-\frac{2}{15}$, $u_S=1$, $u_Q=-1$, $u_E=\frac{2}{15}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & \frac{14}{9} & & -\frac{14}{9} & & 0 & & \\
 & 0 & & -\frac{7}{6} & & 0 & & \frac{7}{6} & & 0 & \\
0 & & -\frac{2}{15} & & 1 & & -1 & & \frac{2}{15} & & 0\ .
\end{array} \tag{39}$$

Проводить третий и четвёртый этапы нет необходимости, благодаря заявленной симметрии и кососимметрии уже получены значения u_z для всех $z\in\Delta_5^3$. Выписанное "решение" проверку выдерживает, поэтому оно является решением. За счёт симметрий поверка равенств $\mathcal{L}_\Delta=0$ для подсимплексов $\Delta\subset\Delta_5^3$ с длинами рёбер 1 и 2 существенно упрощается.

Благодаря изоморфной S_4 группе симметрий симплекса Δ_5^3, из полученного решения получаем $24=4!$ решений $(3,5)$-системы линейных уравнений, из которых попарно различными будут $8=24/3$, потому как у найденного решения, в свою очередь, имеет место группа симметрий $\langle\sigma_1\rangle$ порядка 3. Среди этих 8 решений можно выделить 3 линейно независимых, например, ещё два, получающиеся из найденного решения путём поворотов σ_2 и σ_2^{-1}.

9.2.1. Общее решение для $(3,5)$-системы (в виде линейных комбинаций трёх указанных решений) тоже можно представить в виде, аналогичном (38). Приведём ответ для соответствующего упражнения. Он представляется любопытным.

Прежде всего, для любого решения $(u_z,\, z \in \Delta_5^3)$ имеем

$$u_{B_1} = u_{B_2} = u_{B_3} = u_{B_4} = 0,$$

и для всех $z \in \overset{\circ}{\Delta}{}_5^3$ имеем $u_z = 0$. Граничные точки разобъём на четыре группы, каждая из которых является множеством вершин однородного многогранника, являющегося либо архимедовым телом (см. [26]) либо комбинаторно эквивалентным архимедову телу. В последнем случае название используем то же, что и для архимедова тела.

Многогранники с вершинами $(1,3,2,3)$, $(1,4,1,3)$, $(1,5,1,2)$ называем соответственно малым, средним и большим усечённым тетраэдром. Остальные вершины каждого многогранника получаются перестановкой выписанных координат. Определяющим для нас (заменяющим классифицирующее множество $A_{3,5}$) является кубооктаэдр с вершиной $(1,4,2,2)$ (см. стр. 35 в [26]).

К вершинам кубооктаэдра z произвольно приписываем вещественные числа x_z, но так, что сумма при вершинах каждой грани равна нулю. Векторное пространство возможностей трёхмерно, так как числами при любых трёх вершинах любой прямоугольной грани числа при остальных вершинах кубооктаэдра определяются однозначно без нарушения общего правила.

К каждой вершине z малого усечённого тетраэдра, являющейся серединой длинного ребра $[z_1, z_2]$ кубооктаэдра, приписываем $x_z = -x_{z_1} - x_{z_2}$.

К каждой вершине z соответственно среднего усечённого тетраэдра и большого усечённого тетраэдра, являющейся ближайшей к короткому ребру $[z_1, z_2]$ кубооктаэдра, приписываем соответственно $x_z = -x_{z_1} - x_{z_2}$ и $x_z = x_{z_1} + x_{z_2}$.

После этого получаем решение $(3,5)$-системы

$$u_z = \theta x_z, \quad \text{где} \quad z \in (\Delta_5^3 \setminus \overset{\circ}{\Delta}{}_5^3) \setminus \{B_1, B_2, B_3, B_4\},$$

а коэффициент θ равен соответственно $\frac{14}{9}$, $\frac{7}{6}$, 1 или $\frac{2}{15}$ в зависимости от многогранника, вершиной которого является точка z, соответственно, малого усечённого тетраэдра, кубооктаэдра, среднего или большого усечённых тетраэдров.

Приведённые выше четыре правила выписывания переменных x_z при вершинах многогранников z в частном случае для $u_S = 1$ и $u_P = u_F = 0$ непосредственно проверяются по боковым граням, задаваемым трапецией (39) и образами этой трапеции при поворотах σ_1 и σ_1^{-1}, и по нулевой внутренности основания.

По случаю заметим, что вронскиану при $n = 4$ отвечает усечённый октаэдр в симплексе Δ_6^3 с вершиной $(1,2,3,4)$ (см. стр. 31 в [26]). Для соответствующих решений $(3,6)$-системы имеем $u_{z_1} = -u_{z_2}$, если $[z_1, z_2]$ ребро усечённого октаэдра.

9.3. Судя по доказательству теоремы 4 в п. 8, обращение к базису (32) (вместо (28)) может оказаться полезным для классификации инвариантных дифференциальных операторов (17). В этом случае определение коэффициентов многочленов (31) $u_{z_1,\dots,z_n}$ с $(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{N}_0^n$ для очередного порядка $k = z_1 + \dots + z_n$ связано с решение $(n-1,k)$-системы линейных уравнений с ненулевой зависящей от $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ правой частью, определённой на предыдущих этапах, но зато с коэффициентами при неизвестных $u_{z_1,\dots,z_n}$ тождественно равными 1. В отличие от рассматриваемой в теореме 1 ситуации $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, здесь о гипотезе типа (13) говорить не приходится. После вычисления неизвестных $u_{z_1,\dots,z_n}$ для $z_1 + \dots + z_n = k$ по алгоритму из п. 3, последующие проверки равенств $\mathcal{L}_\Delta = 0$ для всех подсимплексов $\Delta \subseteq \Delta_k^{(n-1)}$ с ненулевой длиной ребра будут предоставлять, в частности, условия на параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, обеспечивающие ненулевые решения.

В этой связи, особенно в свете работы [19], интересным является вопрос о существовании решений системы линейных уравнений (16) с бесконечными суммами в (31) для каких либо $n \geqslant 2$ и $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$.

Автор благодарит рецензента за предоставленную литературу и высказанные замечания, способствовавшие более адекватному представлению результатов статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. 5-е издание, М.: "Дрофа" , 2004, 640 с.

2. Кириллов А.А. Инвариантные операторы над геометрическими величинами. Итоги науки и техники. Т. 16. М.: ВИНИТИ, 1980, с. 3–29.

3. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. 4-е издание, М.: "Наука" , 1984, 520 с.

4. Малышев Ф.М. Симплициальные системы линейных уравнений. В кн.: Алгебра. М.: Изд-во МГУ, 1980, стр. 53-56.

5. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986, 304 с.

6. Буаррудж С. Тернарные инвариантные дифференциальные операторы, действующие на пространстве взвешенных плотностей, ТМФ, **158**:2 (2009), с. 165–180.

7. Кириллов А.А. Об инвариантных дифференциальных операциях над геометрическими величинами. Функц. анализ и его прилож., 1977, 11, № 2, с. 39–44.

8. Рудаков А.Н. Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли картановского типа. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, 38, № 4, с. 835–866.

9. Veblen O. Differential invariants and geometry. Atti del Congr., Int. Mat., Bologna, 1929.

10. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. Об инвариантных дифференциальных операторах на прямой. Функц. анализ и его прилож., 1979, 13, № 4, с. 91–92.

11. Грозман П.Я. Классификация билинейных инвариантных операторов над тензорными полями. Функц. анализ и его прилож., 1980, 14, № 2, с. 58–59.

12. Бернштейн И.Н., Лейтес Д.А. Инвариантные дифференциальные операторы в формальных тензорных полях. – Сердика, 1981, т. 11, № 4, с. 30–45.

13. Лейтес Д.А. Неприводимые представления супералгебр Ли векторных полей и инвариантные дифференциальные операторы. Функц. анализ и его прилож., 1982, 16, № 1, с. 76–77.

14. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро. Функц. анализ и его прилож., 1982, 16, № 2, с. 47–63.

15. Табачников С.Л. Об инвариантных дифференциальных операторах общего положения. Функц. анализ и его прилож., 1982, 16, № 3, с. 86–87.

16. Шмелёв Г.С. Неприводимые представления бесконечномерных гамильтоновых и пуассоновых супералгебр Ли и инвариантные дифференциальные операторы. – Сердика, 1982, т.12, № 1, с. 11–23.

17. Шмелёв Г.С. Дифференциальные $H(2n, m)$-инвариантные операторы и неразложимые $osp(2, 2n)$-представления. Функц. анализ и его прилож., 1983, 17, № 4, с. 94–95.

18. Шмелёв Г.С. Инвариантные операторы на симплектическом супермногообразии. Мат. сб. Т. 120(162), № 4, 1983, с. 528–539.

19. Iohara K., Mathieu O. A Global version of Grozman's theorem. Math. Zeitschrift, **274**:3 (2013), с. 955–992.

20. Bouarroudj S., Leites D.A. Invariant differential operators in positive characteristic. J. Algebra. **499** (2018), с. 281–297.

21. Grozman P. Invariant bilinear differential operators. Communications in Mathematics, **30**:3, (2022), с. 129–188.

22. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2005, 767 с.

23. Arbogast L. F. A. Du calcul des dérivations aux sŕies rćurrentes, tant simples que doubles or triples, d'un ordre quelconque. — Strasbourg: Levrault, 1800.

24. Faà di Bruno F. Sullo sviluppo delle funzioni. Annali di Scienze Matematiche et Fisiche di Tortoloni. **6** (1855), с. 479–480.

25. Faà di Bruno F. Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel. Quart. J. Math. **1** (1857), с. 359–360.

26. Веннинджер М. Модели многогранников. М.: Мир, 1974, 236 с.

REFERENCES

1. Arkhipov G.I., Sadovnichy V.A., Chubarikov V.N. 2004, "Lectures on mathematical analysis. 5th edition", *M.: "Bustard"*, 640 p.

2. Kirillov A.A. 1980, "Invariant operators over geometric quantities. Results of science and technology". Vol. 16. *M.: VINITI*, pp. 3–29.

3. Pontryagin L.S. 1984, "Continuous groups". 4-th edition, *Moscow: Nauka*, 520 p.

4. Malyshev F. M. 1980, "Simplicial systems of linear equations. In the book: Algebra", *M.: Publishing House of Moscow State University*, pp. 53–56.

5. Kostrikin A.I., Manin Yu.I. 1986, "Linear algebra and geometry", *Moscow: Nauka*, 304 p.

6. Buarrudj S. 2009, "Ternary invariant differential operators acting on the space of weighted densities, *TMF*, **158**:2, pp. 165–180.

7. Kirillov A.A. 1977, "On invariant differential operations on geometric quantities", *Function. analysis and its application*, Vol. 11, № 2, pp. 39–44.

8. Rudakov A.N. 1974, "Irreducible representations of infinite-dimensional Lie algebras of Cartan type. *Izv. AN USSR. Ser. mat.*, Vol. 38, № 4, pp. 835–866.

9. Veblen O. 1929, "Differential invariants and geometry", *Atti del Congr., Int. Mat., Bologna.*

10. Feigin B.L., Fuchs D.B. 1979, "On invariant differential operators on a straight line", *Function. analysis and its application.*, Vol. 13, № 4, pp. 91–92.

11. Grozman P.Ya. 1980, “Classification of bilinear invariant operators over tensor fields”, *Function. analysis and its application.*, Vol. 14, № 2, pp. 58–59.

12. Bernstein I.N., Leites D.A. 1981, “Invariant differential operators in formal tensor fields”, *Serdika*, Vol. 11, № . 4, pp. 30–45.

13. Leites D.A. 1982, “Irreducible representations of Lie superalgebras of vector fields and invariant differential operators”, *Function. analysis and its application.*, Vol. 16, № 1, pp. 76–77.

14. Feigin B.L., Fuchs D.B. 1982, “Skew-symmetric invariant differential operators on a straight line and Verma modules over the Virasoro algebra”, *Function. analysis and its application.*, Vol. 16, № 2, pp. 47–63.

15. Tabachnikov S.L. 1982, “On invariant differential operators of general position”, *Function. analysis and its application.*, Vol. 16, № 3, pp. 86–87.

16. Shmelev G.S. 1982, “Irreducible representations of infinite-dimensional Hamiltonian and Poisson Lie superalgebras and invariant differential operators”, *Serdika*, Vol. 12, № . 1, pp. 11–23.

17. Shmelev G.S. 1983, “Differential $H(2n, m)$-invariant operators and indecomposable $osp(2, 2n)$-representations”, *Function. analysis and its application.*, Vol. 17, № 4, pp. 94–95.

18. Shmelev G.S. 1983, “Invariant operators on a symplectic supermanifold”, *Mat. Sat.* Vol. 120(162), № 4, pp. 528–539.

19. Iohara K., Mathieu O. 2013, “A Global version of Grozman’s theorem”, *Math. Zeitschrift*, **274**:3, pp. 955–992.

20. Bouarroudj S., Leites D.A. 2018, “Invariant differential operators in positive characteristic”, *J. Algebra.* **499**, pp. 281–297.

21. Grozman P. 2022, “Invariant bilinear differential operators”, *Communications in Mathematics*, **30**:3, pp. 129–188.

22. Stanley R. 2005, “Enumerative combinatorics. Trees producing functions and symmetric functions”, *Moscow: Mir*, 767 p.

23. Arbogast L. F. A. 1800, “Du calcul des dérivations aux sŕies rćurrentes, tant simples que doubles or triples, d’un ordre quelconque”, *Strasbourg: Levrault.*

24. Faà di Bruno F. 1855, “Sullo sviluppo delle funzioni”, *Annali di Scienze Matematiche et Fisiche di Tortoloni.* **6**, pp. 479–480.

25. Faà di Bruno F. 1857, “Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel”, *Quart. J. Math.*, **1**, pp. 359–360.

26. Wenninger M. 1974, “Models of polyhedra”, *M.: Mir*, 236 p.

Получено: 13.04.2023
Принято в печать: 11.12.2023