

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-206-211

Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток¹

Н. В. Максименко, И. Ю. Реброва

Максименко Наталья Викторовна — аспирант, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

В работе рассмотрено множество всевозможных рядов Дирихле, порожденных заданной решёткой, и изучены свойства этого функционального пространства над полем комплексных чисел.

Введено новое понятие *C* θ -степенная плотность ряда Дирихле. Установлена связь между *C* θ -степенной плотностью ряда Дирихле и абсциссой его абсолютной сходимости.

Установлено, что если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга с $\theta_1 < \theta$, то ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ аналитически продолжается в полуплоскость с $\sigma > \theta_1$, кроме точки $\alpha = \theta$, в которой у неё полюс первого порядка с вычетом $C\theta$.

Введено новое понятие *C* логарифмическая θ -степенная плотность ряда Дирихле. Установлено, что если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет *C* логарифмическую θ -степенную плотность и $\theta < 1$, то для абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство $\sigma_f = 0$ и ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ — голоморфная функция во всей правой α -полуплоскости с $\sigma > 0$.

Показано, что если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет *C* логарифмическую θ -степенную плотность и $\theta < 1$, то областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > 0$.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:

Н. В. Максименко, И. Ю. Реброва. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4, С. 206–211.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ № 23-21-00317 «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-206-211

The space of Dirichlet series to multivariate lattices²

N. V. Maksimenko, I. Yu. Rebrova

Maksimenko Natalia Viktorovna — postgraduate student, Orenburg state University (Orenburg).

e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

The work considers the set of all possible Dirichlet series generated by a given lattice, and studies the properties of this function space over the field of complex numbers.

A new concept of *C* θ -power density of a Dirichlet series is introduced. A connection is established between the *C* θ -power density of the Dirichlet series and the abscissa of its absolute convergence.

It is established that if the Dirichlet series $f(\alpha|\Lambda)$ satisfies the conditions of the generalized Selberg lemma with $\theta_1 < \theta$, then the Dirichlet series $f(\alpha|\Lambda)$ extends analytically into the half-plane with $\sigma > \theta_1$, except for the point $\alpha = \theta$, at which it has a first-order pole with a subtraction of $C\theta$.

A new concept *C* logarithmic θ -power density of the Dirichlet series is introduced. It has been established that if the Dirichlet series $f(\alpha|\Lambda)$ has *C* logarithmic θ -power density and $\theta < 1$, then the abscissa of absolute convergence holds the equality $\sigma_f = 0$ and The Dirichlet series $f(\alpha|\Lambda)$ is a holomorphic function in the entire right α -half-plane with $\sigma > 0$.

It is shown that if the Dirichlet series $f(\alpha|\Lambda)$ has *C* logarithmic θ -power density and $\theta < 1$, then The holomorphic domain of the zeta function $\zeta(M|\alpha)$ is α -the half-plane $\sigma > 0$.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

N. V. Maksimenko, I. Yu. Rebrova, 2023, “The space of Dirichlet series to multivariate lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 206–211.

1. Введение

В работе [2] определено множество всех рядов Дирихле, порожденных заданной решёткой Λ , которое обозначается через $\mathbb{D}(\Lambda)$.

Пусть Λ — произвольная s -мерная решётка в $\mathbb{R}^s$. Рядом Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ для решётки Λ называется произвольная функция, заданная равенством

$$f(\alpha|\Lambda) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \frac{a(\vec{x})}{(\bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} A(\lambda_k) \lambda_k^{-\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geq \sigma_f^*,$$

² Acknowledgments: The reported study was funded by the RSF grant № 23-21-00317 “Geometry of numbers and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis”.

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости, а λ_k — точки усечённого норменного спектра $Q_{sp}(\Lambda)$, который определяется равенством

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}), \vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}\}, \quad q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s$$

и

$$A(\lambda_k) = \sum_{\bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s = \lambda_k} a(\vec{x}).$$

Как хорошо известно [3, 4], для любых рядов Дирихле справедливо неравенство $\sigma_f \leq \sigma_f^* + 1$.

По теореме Абеля (см. [3], стр. 106)

$$f(\alpha|\Lambda) = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{A^*(t)}{t^{\alpha+1}} dt, \quad A^*(t) = \sum_{q(\vec{x}) \leq t} a(\vec{x}).$$

В работе [2] показано, что ряды Дирихле, порождённые решетками, естественно возникают в теоретико-числовом методе в приближенном анализе и играют в его развитии существенную роль.

Целью данной работы является изучение вопросов сходимости рядов Дирихле, порожденных заданной решёткой.

2. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток

Выделим подпространство $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)$ условием $\sup_{\vec{x} \in \Lambda} |a(\vec{x})| < \infty$. На $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)$ зададим норму

$$\|f(\alpha|\Lambda)\| = \sup_{\vec{x} \in \Lambda} |a(\vec{x})|.$$

Относительно заданной нормы $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)$ является несепарабельным банаховым пространством.

Нетрудно понять, что пространство $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)$ не является алгеброй, так как нет замкнутости относительно произведения рядов Дирихле.

Более того, для произвольной решётки Λ произведение двух рядов Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ и $g(\alpha|\Lambda)$, вообще говоря, не является рядом Дирихле $h(\alpha|\Lambda)$, так как для произвольной решётки Λ покоординатное произведение двух точек $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из Λ не является точкой решётки Λ .

Порядком точки λ усечённого норменного спектра называется количество точек $\vec{x}$ решётки Λ , для которых $q(\vec{x}) = \lambda$. Порядок точки λ обозначается через $q(\lambda)$. Нетрудно понять, что величина

$$D(T|\Lambda) = \sum_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda), \lambda \leq T} q(\lambda)$$

— количество точек решётки Λ в гиперболическом кресте $K_s(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T\}$.

Так как

$$D(T|\Lambda) = \frac{2^s T \ln^{s-1} T}{(s-1)! \det \Lambda} + O\left(\frac{T \ln^{s-2} T}{\det \Lambda}\right),$$

то для любой решётки Λ абсцисса абсолютной сходимости σ_Λ гиперболической дзета-функции $\zeta(\Lambda|\alpha)$ равна 1.

Отсюда следует, что для любого ряда Дирихле $f(\alpha|\Lambda) \in \mathbb{D}^\infty(\Lambda)$ для абсциссы абсолютной сходимости σ_f справедливо неравенство $\sigma_f \leq 1$.

3. Степенная плотность и абсцисса абсолютной сходимости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что ряд Дирихле удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга, если $A^*(t) = Ct^\theta + O(t^{\theta_1})$ и $\theta_1 < \theta$.

Про такой ряд Дирихле будем говорить, что он имеет C θ -степенную плотность.

Заметим, что мы допускаем произвольное значение величины C . В том числе и $C = 0$.

При таком определении C θ -степенной плотности получаем, что множество всех рядов Дирихле с θ -степенной плотностью образуют линейное подпространство, которое будем обозначать через $\mathbb{D}^{(\theta)}(\Lambda)$.

ЛЕММА 1. Если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет C θ -степенную плотность, то для его абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство $\sigma_f = \theta$ и в точке $\alpha = \theta$ полюс с вычетом $C\theta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения C θ -степенной плотности имеем: $A^*(t) = Ct^\theta + R_M(t)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|R_M(t)| < \varepsilon t^\theta$ при $t > N(\varepsilon)$. По теореме Абеля (См. [3], стр. 106) имеем:

$$f(\alpha|\Lambda) = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{A^*(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{Ct^\theta + R_M(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{C\alpha}{\alpha - \theta} + \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{R_M(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left| \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{R_M(t)}{t^{\alpha+1}} dt \right| < \left| \alpha \int_{\lambda_1}^{N(\varepsilon)} \frac{R_M(t)}{t^{\alpha+1}} dt \right| + \frac{|\alpha|\varepsilon}{|\alpha - \theta|N(\varepsilon)^{\Re(\alpha - \theta)}},$$

то утверждение леммы доказано. $\square$

ЛЕММА 2. Если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга с $\theta_1 < \theta$, то ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ аналитически продолжается в полуплоскость с $\sigma > \theta_1$, кроме точки $\alpha = \theta$, в которой у неё полюс первого порядка с вычетом $C\theta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по теореме Абеля имеем:

$$f(\alpha|\Lambda) = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{A^*(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{Ct^\theta + O(t^{\theta_1})}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{C\alpha}{\alpha - \theta} + \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{O(t^{\theta_1})}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Так как последний несобственный интеграл абсолютно сходится для любого α с $\sigma > \theta_1$, то утверждение леммы доказано. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет C логарифмическую θ -степенную плотность, если для функции $A^*(t)$ справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |A^*(t)|}{\ln^\theta t} = C, \quad C > 0, \quad \theta > 0.$$

Из определения видно, что, если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет C θ -степенную плотность, то он имеет θ логарифмическую 1-степенную плотность.

Следующая лемма показывает, что ряды Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ с C логарифмической θ -степенной плотностью при $\theta < 1$ имеют принципиальное отличие.

ЛЕММА 1. Если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет C логарифмическую θ -степенную плотность и $\theta < 1$, то для абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство $\sigma_f = 0$ и ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ — голоморфная функция во всей правой α -полуплоскости с $\sigma > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения C логарифмической θ -степенной плотности имеем: $A^*(t) = e^{C(\ln t)^\theta + R_M(t)}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|R_M(t)| < \varepsilon(\ln t)^\theta$ при $t > N(\varepsilon)$. По теореме Абеля (См. [3], стр. 106) имеем:

$$f(\alpha|\Lambda) = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{A^*(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{e^{C(\ln t)^\theta + R_M(t)}}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha \int_{\ln \lambda_1}^{\infty} \frac{e^{Ct^\theta + R_M(e^t)}}{e^{\alpha t}} dt.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left| \alpha \int_{\ln \lambda_1}^{\infty} \frac{e^{Ct^\theta + R_M(e^t)}}{e^{\alpha t}} dt \right| < \left| \alpha \int_{\ln \lambda_1}^{N(\varepsilon)} \frac{e^{Ct^\theta + R_M(e^t)}}{e^{\alpha t}} dt \right| + \left| \alpha \int_{N(\varepsilon)}^{\infty} \frac{dt}{e^{\alpha t - (C+\varepsilon)t^\theta}} \right|,$$

последний несобственный интеграл при $\theta < 1$ абсолютно сходится при любом α с $\sigma > 0$, то утверждение леммы доказано. $\square$

Дословно повторяя рассуждения из работы [1], можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет C логарифмическую θ -степенную плотность и $\theta < 1$, то областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > 0$.

Из этой теоремы сразу следует теорема антиуниверсальности.

ТЕОРЕМА 2. Если ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ имеет C логарифмическую θ -степенную плотность и $\theta < 1$, то ряд Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ не является универсальной функцией в смысле Вородина.

4. Заключение

В данной статье удалось применить подходы, развитые при анализе дзета-функции моноидов натуральных чисел.

Выражаем свою благодарность профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи и доценту Н. Н. Добровольскому за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.
2. Н. В. Максименко. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток и алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, С. 233–246.
3. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.
4. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L -функций Дирихле. — М. — Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

REFERENCES

1. N. N. Dobvol'skii, 2019, "One model Zeta function of the monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 148–163.
2. N. V. Maksimenko, 2020, "The space of Dirichlet series to multivariate lattices and the algebra of Dirichlet series of grids, repetitive multiplication", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 233–246.

3. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskiju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.
4. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L -Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.

Получено: 07.10.2023

Принято в печать: 11.12.2023