ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 3 (2015)

УДК 511.3

О ВЗВЕШЕННОМ ЧИСЛЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛОИДАХ

Р. А. Дохов, У. М. Пачев (г. Нальчик)

Аннотация

В работе круговым методом получена асимптотическая формула для взвешенного числа целых точек на многомерных гиперболических поверхностях, определяемых прямой суммой неопределённых кватернарных целочисленных квадратичных форм специального вида. При этом взвешивающая функция выбрана как экспонента, в показателе которой стоит целочисленная квадратичная форма, являющаяся прямой суммой положительных бинарных квадратичных форм с одними и тем же дискриминантом. Выбор такого специального вида взвешивающей функции обусловлен возможностью приложения используемого подхода при исследовании вопроса о числе целых точек лежащих в некоторых областях специального вида на рассматриваемых многомерных гиперболоидах.

Опираясь на подход статьи [7], основанный на использовании точных значений двойных сумм Гаусса, мы рассматриваем многомерную задачу о взвешенном числе целых точек на гиперболических поверхностях специального вида.

Речь идёт об асимптотике с остаточным членом для величины

$$I_h\left(n,s\right)=\sum_{p\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t}\right)=h} e^{-\frac{\omega\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t}\right)}{n}},$$

где $n\to\infty$ — вещественный параметр,

$$p\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t}\right)=\sum_{i=1}^{s}\left\{Q_i^{(1)}\left(x_i,y_i\right)-Q_i^{(2)}\left(z_i,t_i\right)\right\},$$

$$\omega\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t}\right)=\sum_{i=1}^{s}\left\{Q_i^{(1)}\left(x_i,y_i\right)+Q_i^{(2)}\left(z_i,t_i\right)\right\},$$

$Q_i^{(1)},Q_i^{(2)}$ — положительные целочисленные бинарные квадратичные формы одного и того же дискриминанта δ_F; $h\neq 0$ — целое число.

При выводе асимптотической формулы для $I_h(n,s)$ существенно используются:

1) формула обращения тета-ряда бинарной квадратичной формы (в нашем случае достаточно использовать двойной Θ-ряд вместо многомерного)

2) формула для

$$\int\limits_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}} \frac{e^{-2\pi ihx}}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^S}dx$$

3) оценка для суммы Клостермана

$$K(u,v;q)=\sum_{x \bmod q}{}' e^{\frac{2\pi i}{q}\left(ux+vx'\right)},$$

где $ll' \equiv \pmod q$.

Полученная асимптотическая формула для $I_h(n,s)$ обобщает один из результатов Куртовой Л. Н. [7] о взвешенном числе целых точек на четырёхмерных гиперболоидах на случай многомерных гиперболоидов соответствующего специального вида. Кроме того, наш результат в случае постоянных коэффициентов уравнения гиперболоида обобщает также один результат Малышева А. В. [10] на случай некоторых недиагональных квадратичных форм, а в сравнении с результатом Головизина В. В. [3] главный член в рассматриваемой задаче получен в явном виде, а в [3] он выражен через некоторый комплексный интеграл $W(N)$, для которого дана только оценка сверху, при этом в нашем случае $N=[\sqrt{n}]$.

В дальнейшем результат о величине $I_h(n,s)$ может быть применён при получении асимптотических формул для числа целых точек, лежащих в некоторых областях специального вида на многомерных гиперболоидах.

Ключевые слова: круговой метод, взвешенное число целых точек, гиперболическая поверхность, многомерный гиперболоид, асимптотическая формула, квадратичная форма, тета-ряд квадратичной формы, двойная сумма Гаусса, сумма Клостермана.

Библиография: 16 названий.

ON THE WEIGHTED NUMBER OF INTEGER POINTS ON SOME MULTIDIMENSIONAL HYPERBOLOIDS

R. A. Dokhov, U. M. Pachev (Nalchik)

Abstract

In this paper asymptotic formula for weighted number of integer points on multidimensional hyperbolic surfaces defined by direct sum of indefinite quaternary integral quadratic forms of singular kind is obtained. In doing so weighted function is chosen as a real exponent on the index of which there stands integral quadratic form being direct sum of positive binary quadratic forms with the same discriminant equal to the discriminant δ_F of imaginary quadratic field $F = \Theta\left(\sqrt{d}\right)$ where d is the negative without quadrate number. The choice of real kind of weighting function is conditioned by possibility application used method in investigation of question about the number of integer points lying is some fields of real kind on examining multidimensional hyperboloids. Leaning upon the method of article [7] based on the use of exact meanings of Gauss double sum we examine multidimensional problem about weighted number of integer points on hyperbolic surface of real kind.

The question is about the asymptotic with remainder of series for value

$$I_h(n,s) = \sum_{p\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t}\right)=h} e^{-\frac{\omega\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t}\right)}{n}},$$

where $n \to \infty$ — real parameter,

$$p\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t}\right) = \sum_{i=1}^{s}\left\{Q_i^{(1)}(x_i,y_i) - Q_i^{(2)}(z_i,t_i)\right\},$$

$$\omega\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t}\right) = \sum_{i=1}^{s}\left\{Q_i^{(1)}(x_i,y_i) + Q_i^{(2)}(z_i,t_i)\right\},$$

$Q_i^{(1)}, Q_i^{(2)}$ — positive integral binary quadratic forms of the same discriminant δ_F; $h \neq 0$ — integral number.

In deducing the asymptotic formula for $I_h(n,s)$ essentially we use:

1) the formula of turning of theta-series binary quadratic form (in our case it is enough to use double theta-series instead of multidimensional);

2) formula for

$$\int_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}} \frac{e^{-2\pi i h x}}{\left(\frac{1}{n^2} + 4\pi^2 x^2\right)^S} dx$$

3) estimation of sum of Kloosterman

$$K(u,v;q) = \sum_{x \bmod q}{}' e^{\frac{2\pi i}{q}\left(ux + vx'\right)},$$

where $xx' \equiv 1 \pmod{q}$.

Obtained asymptotic formula for $I_h(n,s)$ generalises one of the results of Kurtova L. N. [7] about weighted number of integer points on four-dimensional hyperboloids for the case of multidimensional hyperboloids corresponding real

kind. Besides our result in case of constant coefficients of hyperboloid equation also generalized one result of Malishev A. B. [10] for a case of some nondiagonal quadratic forms in comparison with the result of Golovizina V. V. [3] the main number in examining problem is obtained in evident kind as in our work exact meanings of Gauss double sums are used and in [3] it is expressed by way of some complex integral $W(N)$, for which only estimation is given over in doing so in our case $N = [\sqrt{n}]$. Later on the result about value $I_h\,(n, s)$ can be applied in obtaining asymptotic formulae for the number of integer points lying in some fields of real kind on multidimensional hyperboloids.

Keywords: circle method, weighted number of integer points, hyperbolic surface, multidimensional hyperboloid, asymptotic formula, quadratic forms, theta–series of quadratic form, Gauss double sum, Klosterman sum.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

В предлагаемой работе проводится исследование задачи о взвешенном числе целых точек, лежащих на многомерных гиперболических поверхностях, определяемых прямой суммой кватернарных целочисленных квадратичных форм специального вида.

Мы будем рассматривать гиперболическую поверхность

$$\sum_{i=1}^{s} \left\{ Q_i^{(1)}(x_i, y_i) - Q_i^{(2)}(z_i, t_i) \right\} = h, \tag{1}$$

где $Q_i^{(1)}(x_i, y_i)$, $Q_i^{(2)}(z_i, t_i)$ – положительные целочисленные бинарные квадратичные формы дискриминанта $d, h \neq 0$ – целое число.

Обозначим для удобства левую часть уравнения (1) через $p(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t})$, где $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t}$ – s–мерные векторы. С уравнением (1) мы будем связывать функцию

$$I_h(n, s) = \sum_{p(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t}) = h} e^{-\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{s} (Q_i^{(1)}(x_i, y_i) + Q_i^{(2)}(z_i, t_i))}, \tag{2}$$

где $n \to \infty$ – вещественный параметр.

Будем называть сумму (2) взвешенным числом целых точек на поверхности (1), взятых с весом $e^{-\frac{1}{n}\omega(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t})}$, где

$$\omega(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t}) = \sum_{i=1}^{s} \left\{ Q_i^{(1)}(x_i, y_i) + Q_i^{(2)}(z_i, t_i) \right\}.$$

Отметим, что рассматриваемые нами поверхности (1) являются $4s$-мерными. Для гиперболических поверхностей, к которым относится наша работа, известны лишь отдельные частные результаты.

Первоначальный обзор результатов, связанных с вопросом о взвешенном числе целых точек на поверхностях второго порядка дан в [9, 10]. Первые результаты для гиперболических поверхностей второго порядка были получены в диссертации Долчиани [13].

В наших обозначениях один из её результатов состоит в том, что существует и положителен предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_h(n,s)}{n^{2s-1}}$ в случае диагональных форм $Q_i^{(1)}(x_i,y_i)$ и $Q_i^{(2)}(z_i,t_i)$, при этом ещё предполагается, что сравнение

$$\sum_{i=1}^{s}\left\{Q_i^{(1)}(x_i,y_i)-Q_i^{(2)}(z_i,t_i)\right\}\equiv h(\mathrm{mod} g)$$

разрешимо по любому модулю g (более полные сведения об этих результатах имеются в [10]). Несколько ранее Зигель [16] доказал, что в случае $h=0$ конической поверхности существует и положителен $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_0(n,4)}{n\ln n}$. При этом в [16] рассмотрен только диагональный случай квадратичных конических поверхностей.

В дальнейшем в [9, 10] ставится более общая задача о взвешенном числе целых точек, лежащих в заданной области поверхности и в заданном классе вычетов по данному модулю g. В такой постановке решение этой задачи реализовано в [10, 3] только при $g=1$ и для некоторых специальных областей при произвольной размерности $s\geq 4$ квадратичной поверхности, причём в [10] рассмотрен только диагональный случай.

В последнее время в случае четырёхмерных гиперболических поверхностей в работе Куртовой Л.Н. [7] используется несколько другой подход, основанный на точных значениях двойных сумм Гаусса.

Пользуясь этим подходом, получаем асимптотическую формулу для взвешенного числа целых точек на некоторых многомерных гиперболоидах, обобщающих один из результатов [7]. При этом наш результат в случае постоянных коэффициентов уравнения гиперболоида даёт также обобщение результата Малышева [10], а в сравнении с результатом Головизина [3] главный член в рассматриваемой задаче вычислен в явном виде, а в [3] он выражен через некоторый комплексный интеграл $W(N)$, для которого дана только оценка сверху, где $N=[\sqrt{n}]$.

2. Предварительные результаты

В нашей работе существенно используется следующее вспомогательное утверждение, при этом мы пользуемся соотношением [6]

$$\int_0^1 e^{2\pi\alpha m}d\alpha=\begin{cases}1, & \text{если} \quad m=0\\ 0, & \text{если} \quad m-\text{целое},\ m\neq 0\end{cases} \tag{3}$$

Лемма 1. *Для $I_h(n,s)$ справедливо соотношение*

$$I_h(n,s)=\int\limits_0^1\prod_{i=1}^{s}S_i^{(1)}(\alpha)S_i^{(2)}(\alpha)e^{-2\pi ih\alpha}\,d\alpha,$$

где

$$S_i^{(1)}(\alpha)=\sum_{\overline{m}_i\in Z^2}e^{(-\frac{1}{n}+2\pi i\alpha)Q_i^{(1)}(\overline{m}_i)},\quad S_i^{(2)}(\alpha)=\sum_{\overline{k}_i\in Z^2}e^{(-\frac{1}{n}-2\pi i\alpha)Q_i^{(2)}(\overline{k}_i)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_0^1\prod_{i=1}^{s}S_i^{(1)}(\alpha)S_i^{(2)}(\alpha)e^{-2\pi ih\alpha}d\alpha=$$

$$=\int\limits_0^1\sum_{\overline{m}_1\in Z^2}e^{(-\frac{1}{n}+2\pi i\alpha)Q_1^{(1)}(\overline{m}_1)}\sum_{\overline{k}_1\in Z^2}e^{(-\frac{1}{n}-2\pi i\alpha)Q_1^{(2)}(\overline{k}_1)}\times$$

$$\times\sum_{\overline{m}_2\in Z^2}e^{(-\frac{1}{n}+2\pi i\alpha)Q_2^{(1)}(\overline{m}_2)}\sum_{\overline{k}_2\in Z^2}e^{(-\frac{1}{n}-2\pi i\alpha)Q_2^{(2)}(\overline{k}_2)}\times\cdots$$

$$\cdots\times\sum_{\overline{m}_s\in Z^2}e^{(-\frac{1}{n}+2\pi i\alpha)Q_s^{(1)}(\overline{m}_s)}\sum_{\overline{k}_s\in Z^2}e^{(-\frac{1}{n}-2\pi i\alpha)Q_s^{(2)}(\overline{k}_s)}\cdot e^{-2\pi h\alpha}\,d\alpha=$$

$$=\int\limits_0^1\sum_{\overline{m}_i\overline{k}_i\in Z^2}e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{s}(Q_i^{(1)}(\overline{m}_i)+Q_i^{(2)}(\overline{k}_i))}e^{2\pi i\alpha\sum\limits_{i=1}^{s}(Q_i^{(1)}(\overline{m}_i)-Q_i^{(2)}(\overline{k}_i))}e^{-2\pi h\alpha}\,d\alpha=$$

$$=\int\limits_0^1\sum_{p(\overline{m}_1,\overline{k}_1,\ldots,\overline{m}_s,\overline{k}_s)=h}e^{-\frac{1}{n}\omega(\overline{m}_1,\overline{k}_1,\ldots,\overline{m}_s,\overline{k}_s)}e^{-2\pi ih\alpha}\,d\alpha=I_h(n,s)$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 2 (об обращении тета-ряда). *Пусть $Im\ \tau>0$, $\overline{x}\in R^2$; $\Theta(\tau,\overline{x})=\sum\limits_{\overline{n}\in Z^2}e^{2\pi i\tau Q(\overline{n},\overline{x})}$ – тета-ряд бинарной квадратичной формы Q, дискриминанта δ_F. Тогда*

$$\Theta(\tau,\overline{x})=\frac{i}{\pi\sqrt{|\delta_F|}}\sum_{\overline{n}\in Z^2}e^{-\frac{\pi i}{\tau}n^{-t}A^{-1}\overline{n}+2\pi in^{-t}\overline{x}},$$

где A – матрица квадратичной формы Q, $\overline{n}=\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix}$, $\overline{n}^t=(n_1,n_2)$.

Доказательство. См. [14] (см. также [8] гл. 3). □

Лемма 3. *Пусть* $1 \le q \le N$, h, s *– натуральные числа,* $N = [\sqrt{n}]$. *Тогда*

$$\int\limits_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}} \frac{e^{-2\pi i h x}}{(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2)^s}\,dx = \frac{n^{2s-1}e^{-\frac{h}{n}}}{2^{2s-1}} \cdot \frac{\Gamma(2s-1)}{\Gamma^2(s)} + O((qN)^{2s-1}) + O(n^{2s-2}),$$

где $\Gamma(s)$ *– гамма-функция.*

Доказательство. Обозначим данный интеграл через I и представим его в виде разности $I = I_1 - I_2$, где I_1 берётся по промежутку $(-\infty, +\infty)$, а I_2 по промежутку, определяемому неравенством

$$|x| > \frac{1}{q(q+N)}.$$

Сначала вычислим интеграл

$$W = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ihx}}{(a^2+x^2)^s}\,dx,$$

где $a > 0$.

Так как подынтегральная функция имеет в верхней полуплоскости один полюс $x = ia$ порядка s, то применяя теорию вычетов, (см. [12]) будем иметь

$$W = Res_{ia}\left[(a^2+z^2)^{-s}e^{ihz}\right] = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to ia}\left[(z-ia)^s(a^2+z^2)^{-s}\right]^{(s-1)} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to ia}[(z+ia)^{-s}e^{ihz}]^{(s-1)}.$$

По формуле Лейбница для производной произведения двух функции, получаем

$$W = Res_{ia}\left[(a^2+z^2)^{-s}e^{iaz}\right] = \frac{i^{-1}e^{-ha}}{(2a)^{2s-1}(s-1)!} \cdot s(s+1)\cdots(2s-2) +$$

$$+ \frac{i^{-1}e^{-ha}}{(2a)^s(s-1)!}\sum_{k=0}^{s-2} C_{s-1}^k s(s+1)\cdots(s+k-1)\cdot\frac{1}{(2ah)^k}.$$

Тогда

$$W = \frac{2\pi e^{-ha}}{(2a)^{2s-1}} \cdot \frac{(2s-2)!}{(s-1)!^2} +$$

$$+ \frac{2\pi e^{-ha}}{(2a)^s(s-1)!} \cdot \sum_{k=0}^{s-2} C_{s-1}^k s(s+1)\cdots(s+k-1)\cdot\frac{1}{(2ah)^k} =$$

$$= \int\limits_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{-2\pi ihk}}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2t^2\right)^s}(-2\pi)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi iht}}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2t^2\right)^s}\,dt.$$

Значит,

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi ih}}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2t^2\right)^s}\,dt = \frac{e^{-\frac{h}{n}}}{2^{2s-1}} \cdot \frac{\Gamma(2s-1)}{\Gamma^2(s)} \cdot n^{2s-1} + O\left(n^{2s-2}\right).$$

Теперь оценим сверху интеграл I_2.
Имеем

$$I_2 = \int\limits_{|x|>\frac{1}{q(q+N)}} \frac{e^{-2\pi ihx}}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2t^2\right)^s}\,dx = O\left(\int\limits_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\infty} \frac{dx}{x^{2s}}\right) = O\left((qN)^{2s-1}\right).$$

Разность $I_1 - I_2$ дает доказываемое соотношение. □
В следующей лемме используется характер квадратичного поля (см. [1]).

Лемма 4 (точное значение двойной неоднородной суммы Гаусса). *Пусть $(l,q)=1$, $ll* \equiv 1\,(mod\,q)$. Тогда справедливо равенство*

$$G\left(q,l,\overline{n}\right) = c_1\chi_1(l)q\sqrt{(|\delta_F|,q)} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{q}c_2 l^*},$$

где $c_1 = c_1\left(q,\overline{n},Q\left(\sqrt{d}\right)\right)$, $c_2 = c_2\left(q,\overline{n},Q\left(\sqrt{d}\right)\right)$, χ_1 – характер квадратичного поля $Q\left(\sqrt{d}\right)$, причем $0 \le |c_1| \le 1$, $c_2\left(q,\overline{O},Q\left(\sqrt{d}\right)\right)=0$, $c_1\left(q,\overline{O},Q\left(\sqrt{d}\right)\right)=0$, если $2||q$, $c_1\left(q,\overline{O},Q\left(\sqrt{d}\right)\right)=0$, если $4||q$, $d \equiv 2(mod 4)$.

Доказательство. Доказательство см. [4] (в случае однородных сумм Гаусса точные значения получены в [11]). □

Для оценки сверху остаточного члена для $I_h(n,s)$ понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 5 (о сумме Рамануджана). *Для суммы Рамануджана*

$$c_q(h) = \sum_{l=0\,(l,q)=1}^{q-1} e^{2\pi i\frac{lh}{q}}$$

справедливы следующие соотношения:

1) $c_q(h) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(q,n)}\right)\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{(q,n)}\right)}$, где μ – функция Мебиуса, φ – функция Эйлера;

2) $|c_q(h)| \le НОД(q,h)$.

Доказательство.

(см. [15], теорема 272), его можно получить, опираясь на то, что $c_q(h)$ есть сумма h^x степеней всех первообразных корней степени q из l. □

Заметив, что сумма Клостермана $K(-h,0,q) = c_q(-h)$, можно уточнить лемму 5 статьи [7] следующим образом.

Лемма 6. *Пусть δ_F – дискриминант поля $F = Q\left(\sqrt{d}\right)$, $d < 0$ – бесквадратное число. Тогда*

$$\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{(l,|\delta_F|q)=1} e^{-2\pi i\frac{lh}{q}} = \frac{\varphi(\delta)}{\delta}c_q(h) + O\left(|\delta_F|\,q^{\varepsilon}\right),$$

где $\delta_F = \delta\cdot\delta_1$, $(\delta,q) = 1$.

Соответственно этому получаем уточнение следствия 1 из [7].

Следствие 1. *Пусть δ_F – дискриминант поля $Q\left(\sqrt{d}\right)$. Тогда*

$$\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{(l,|\delta_F|q)=1} e^{-2\pi i\frac{lh}{q}} = O\left(|\delta_F|\,q^{\varepsilon}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число.

Лемма 7 (оценка суммы Клостермана). *Пусть*

$$K(-1,\nu,q) = \sum_{l=0}^{q-1}\sum_{(l,|\delta_F|q)} e^{2\pi i\frac{l+\nu l*}{q}},$$

где $ll^* \equiv 1(mod q)$; δ_F – дискриминант поля $Q\left(\sqrt{d}\right)$. Тогда

$$K(-1,\nu,q) = O\left(|\delta_F|\,\tau\left(|\delta_F|\right)q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Эту оценку можно вывести, следуя рассуждениям, изложенным в [7].

Лемма 8. *Если f — положительно определенная квадратичная форма, то существует такая постоянная $K = K_f > 0$, что для всех вещественных векторов x справедливо неравенство $f(x) \ge K|x|^2$, где $x = (x_1,\ldots,x_n)$ — набор переменных, т.е. $f(x_1,\ldots,x_n) \ge K\cdot(x_1^2+\ldots+x_n^2)$.*

Доказательство. См. [5], гл. 12, § 5. □

3. Асимптотическая формула для $I_h(n,s)$

Цель этой части нашей работы состоит в перенесении некоторых результатов о взвешенном числе целых точек на четырёхмерных гиперболических поверхностях из [7] на некоторые многомерные гиперболические поверхности, определяемые прямой суммой неопределённых кватернарных квадратичных форм, указанной в левой части уравнения (1), где $Q_i^{(1)}(x_i,y_i)$, $Q_i^{(2)}(z_i,t_i)$ — положительные целочисленные бинарные квадратичные формы дискриминанта $d=\delta_F$.

Теорема 1. *Пусть δ_F – дискриминант мнимого квадратичного поля $F=Q\left(\sqrt{d}\right)$, где $d<0$ – бесквадратное число, $h\neq 0$, $h\ll n^{\varepsilon}$. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$I_h(n,s)=2\pi^{2s}\frac{\Gamma(2s-1)n^{2s-1}e^{-\frac{h}{n}}}{\Gamma^2(s)\left|\delta_F\right|^s}\sum_{q=1}^{\infty}q^{-4s}\cdot\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{s}G_1^{(i)}\left(q,l,\overline{o}\right)G_2^{(i)}\left(q-l,\overline{o}\right)+O\left(n^{s-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right),\tag{4}$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция; $\varepsilon>0$ – сколь угодно малое положительное число; постоянная входящая в символ O, зависит от δ_F и коэффициентов бинарных квадратичных форм $Q\left(\overline{m}_i\right)$ и $Q\left(\overline{k}_i\right)$, $G_k^{(i)}\left(q,\pm l,\overline{o}\right)$, $(k=1;2)$ – однородные двойные суммы Гаусса.

Доказательство. Применяя круговой метод, положим $N=[\sqrt{n}]$ и разобьём промежуток $\xi_{0,1}=[-\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}]$ числами ряда Фарея со знаменателями не больше N, на попарно непересекающиеся промежутки $\xi_{l,q}=\left[\frac{l}{q}-\frac{1}{q+q''},\frac{l}{q}+\frac{1}{q+q'}\right]$, т.е.

$$\left[-\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}\right]=\bigcup_{q=1}^{N}\bigcup_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}\xi_{l,q},$$

где $1\le l$, $q\le N$, q', $q''\le N$; $\frac{l''}{q''}<\frac{l}{q}<\frac{l'}{q'}$ – соседние дроби Фарея (по поводу свойств дробей Фарея см. напр. [2]).

Тогда по лемме 1 имеем

$$I_h(n,s)=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\times$$
$$\times\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\prod_{i=1}^{s}S_i^{(1)}\left(\frac{l}{q}+x\right)S_i^{(2)}\left(\frac{l}{q}+x\right)e^{-2\pi ihx}\,dx.\tag{5}$$

Как и в [7], пользуясь леммой 2, преобразуем суммы

$$S_i^{(1)}\left(\frac{l}{q}+x\right) \quad \text{и} \quad S_i^{(2)}\left(\frac{l}{q}+x\right), \quad i=1,\ldots,s.$$

Имеем

$$S_i^{(1)}\left(\frac{l}{q}+x\right)=\sum_{\overline{s}\bmod q} e^{2\pi i\frac{l}{q}}Q_i^{(1)}\left(\overline{s}\right)\cdot \sum_{\overline{m}_i\in Z^2,\,\overline{m}_i\equiv\overline{s}(\bmod q)} e^{\left(-\frac{1}{n}+2\pi ix\right)q^2Q_i^{(1)(\overline{m}_i)}}=$$

$$=\sum_{\overline{s}\bmod q} e^{2\pi i\frac{l}{q}Q_i^{(1)}(\overline{s})}\cdot\sum_{\overline{m}_i\in Z^2} e^{(-\frac{1}{n}+2\pi ix)q^2Q_i^{(1)}\left(\overline{m}_i+\frac{\overline{s}}{q}\right)}=$$

$$=\sum_{\overline{s}\bmod q} e^{2\pi i\frac{l}{q}Q_i^{(1)}(\overline{s})}\theta\left(\left(x+\frac{i}{2\pi n}\right)q^2,\frac{\overline{s}}{q}\right).$$

Полагая теперь в формуле обращения θ – ряда (лемма 2)

$$\tau=\left(x+\frac{i}{2\pi n}\right)q^2,\quad \overline{x}=\frac{\overline{s}}{q},$$

имеем

$$\theta\left(\tau,\overline{x}\right)=\theta\left(\left(\frac{i}{2\pi n}+x\right)q^2;\frac{\overline{s}}{q}\right)=$$

$$=\frac{i}{\left(x+\frac{i}{2\pi n}\right)\sqrt{|\delta_F|}}\cdot\sum_{\overline{m}_i\in Z^2} e^{-\frac{\pi i}{\tau}\overline{m}_i^tA_{1,i}^{-1}\overline{m}_i+2\pi i\frac{\overline{s}\overline{m}_i^t}{q}}=$$

$$=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{n}-2\pi ix}\sum_{\overline{m}_i\in Z^2} e^{-\frac{2\pi^2Q_i^{(1)'}(\overline{m}_i)}{|\delta_F|q^2(n^{-1}-2\pi ix)}+2\pi i\frac{\overline{s}\overline{m}_i^t}{q}},$$

где $Q_i^{(1)'}(\overline{m}_i)$ — бинарная квадратичная форма с матрицей $\delta_FA_{1,i}^{-1}$, при этом $A_{1,i}$ — матрица квадратичной формы $Q_i^{(1)}\left(\overline{m}_i\right)$.

Тогда

$$\begin{aligned}S_i^{(1)}\left(\frac{l}{q}+x\right)=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{n}-2\pi ix}\times\\ \times\sum_{\overline{m}_i\in Z^2} e^{-\frac{2\pi^2}{q^2|\delta_F|}\frac{Q_i^{(1)'}(\overline{m}_i)}{(n^{-1}-2\pi ix)}}\sum_{\overline{s}\bmod q} e^{2\pi i\frac{l}{q}Q_i^{(1)}(\overline{s})+2\pi i\frac{\overline{s}\overline{m}_i^t}{q}}.\end{aligned}\tag{6}$$

Выделяя в (6) слагаемое при $\overline{m}_i=\overline{o}$, получаем

$$S_i^{(1)}\left(\frac{l}{q}+x\right)=\varphi_1^{(i)}+\Phi_1^{(i)},\tag{7}$$

где

$$\varphi_1^{(i)} = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n} - 2\pi i x} G_1^{(i)}\left(q, l, \overline{o}\right),$$
$$\Phi_1^{(i)} = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n} - 2\pi i x} \sum_{\overline{m}_i \in Z^2, \overline{m}_i \neq 0} e^{-\frac{2\pi^2 Q_i^{(1)'}(\overline{m}_i)}{q^2|\delta_F|(n^{-1}-2\pi i x)}} \cdot G_1^{(i)}\left(q, l, m_i\right), \qquad (7')$$

где $G_1^{(i)}\left(q, l, \overline{m}_i\right) = \sum\limits_{\overline{s} \bmod q} e^{2\pi i \frac{l}{q} Q_i^{(1)'}(\overline{s}) + \frac{\overline{s}\overline{m}_i^t}{q}}$ – неоднородная двойная сумма Гаусса, отвечающая квадратичной форме $Q_i^{(1)}$.

Аналогично для $S_i^{(2)}\left(\frac{l}{q} + x\right)$ получаем

$$S_i^{(2)}\left(\frac{l}{q} + x\right) = \varphi_2^{(i)} + \Phi_2^{(i)}, \qquad (8)$$

где

$$\varphi_2^{(i)} = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n} + 2\pi i x} G_2^{(i)}(q, -l, \overline{o}),$$
$$\Phi_2^{(i)} = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n} + 2\pi i x} \cdot \sum_{\overline{k}_i \in Z^2, \overline{k}_i \neq \overline{o}} e^{-\frac{2\pi^2 Q_i^{(2)'}(\overline{k}_i)}{q^2|\delta_F|(n^{-1}+2\pi i x)}} \cdot G_2^{(i)}\left(q, -l, k_i\right), \qquad (8')$$

где $G_2^{(i)}\left(q, -l, \overline{k}_i\right)$ – неоднородная двойная сумма Гаусса, отвечающая квадратичной форме $G_i^{(2)}$.

С учетом (7) и (8) формулу (5) можно переписать в виде:

$$I_h(n,s) = \sum_{q \le N} \sum_{l=0\,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \cdot \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \prod_{i=1}^{s} \Big(\varphi_1^{(i)}\varphi_2^{(i)} + \varphi_1^{(i)}\Phi_2^{(i)} + $$
$$+ \Phi_1^{(i)}\varphi_2^{(i)} + \Phi_1^{(i)}\Phi_2^{(i)}\Big) e^{-2\pi i h x}\, dx. \qquad (9)$$

Перейдем теперь к выводу асимптотической формулы для величины $I_h(n,s)$. Представим эту величину в виде следующей суммы

$$I_h(n,s) = I_1 + I_2 + \cdots + I_{4^s}, \qquad (10)$$

где только в I_1 выделяется главный член, а $I_2, \ldots, I_{4^s}$ дают вклад в остаток в асимптотической формуле для $I_h(n,s)$. При этом имеем

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{q\le N}\sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q=1} e^{-2\pi i\frac{lh}{q}} \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \prod_{i=1}^{s}\varphi_1^{(i)}\varphi_2^{(i)}e^{-2\pi ihx}\,dx = \\
&= \frac{(4\pi^2)^s}{|\delta_F|^s}\sum_{q\le N} q^{-4s}\sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\times \\
&\times \prod_{i=1}^{s} G_1^{(i)}\left(q,l,\overline{o}\right)G_2^{(i)}\left(q,-l,\overline{o}\right)\cdot \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \frac{e^{-2\pi ihx}}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s}\,dx.
\end{aligned} \tag{11}$$

В сумме (10) интеграл I_1 вычислим асимптотически, а остальные интегралы $I_2,\dots,I_{4^s}$ оцениваем сверху, при этом сделаем разбиение интеграла в (11) на сумму интегралов

$$\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} = \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{-\frac{1}{q(q+N)}} + \int\limits_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}} + \int\limits_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+q')}}$$

и соответственно этому разбиению, получаем $I_1 = I_{1,1}+I_{1,2}+I_{1,3}$.

Из них только в $I_{1,2}$ выделяется главный член для $I_h(n,s)$, а $I_{1,1}$, $I_{1,3}$ дают вклад в остаток.

Применяя лемму 3 и, учитывая (11), находим

$$\begin{aligned}
I_{1,2} &= \frac{(4\pi^2)^s}{|\delta_F|^s}\sum_{q\le N} q^{-4s}\sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\times \\
&\times \prod_{i=1}^{s} G_1^{(i)}\left(q,l,\overline{o}\right)G_2^{(i)}\left(q,-l,\overline{o}\right)\cdot\left\{\frac{n^{2s-1}e^{-\frac{h}{n}}}{2^{2s-1}}\frac{\Gamma\left(2s-1\right)}{\Gamma^2\left(s\right)}+\right. \\
&\left.+O\left((qN)^{2s-1}\right)+O\left(n^{2s-2}\right)\right\} = \\
&= \left\{\frac{2\pi^{2s}\Gamma(2s-1)}{\Gamma^2(s)}\cdot\frac{n^{2s-1}e^{-\frac{h}{n}}}{|\delta_F|^s}\sum_{q\le N} q^{-4s}\sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\times\right. \\
&\left.\times \prod_{i=1}^{s} G_1^{(i)}\left(q,l,\overline{o}\right)G_2^{(i)}\left(q,-l,\overline{o}\right)\right\} + \frac{(4\pi^2)^s}{|\delta_F|^s}\sum_{q\le N} q^{-4s}\sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\times \\
&\times \prod_{i=1}^{s} G_1^{(i)}\left(q,l,\overline{o}\right)G_2^{(i)}\left(q,-l,\overline{o}\right)\cdot\left\{O\left((qN)^{2s-1}\right)+O\left(n^{2s-2}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Из (12) следует, что

$$I_{1,2}=\frac{2\pi^{2s}}{|\delta_F|^s}\frac{\Gamma(2s-1)}{\Gamma^2(s)}n^{2s-1}\cdot e^{-\frac{h}{n}}\cdot\sum_{q\le N}q^{-4s}\cdot\sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{s}G_1^{(i)}\left(q,l,\overline{o}\right)G_2^{(i)}\left(q,-l,\overline{o}\right)+O\left(n^{s-\frac{1}{2}+\rho}\right). \tag{13}$$

где ρ — сколь угодно малое положительное число.

Действительно, первое слагаемое в (12) при $N\to\infty$ даёт главный член асимптотической формулы для $I_{1,2}$ и значит, и для $I_h(n,s)$.

Представим теперь $I_{1,2}$ в виде

$$I_{1,2}=\sum{}_1+\sum{}_2, \tag{*}$$

где $\sum_1$ — первое слагаемое, асимптотически равное главному члену; $\sum_2$ — второе слагаемое в соотношении (12).

При этом сначала в силу леммы 4 получаем, что

$$G_1^{(i)}\left(q,l,\overline{o}\right)G_2^{(i)}\left(q,-l,\overline{o}\right)=c\chi_1^{(2)}\left(-l^2\right)q^2(|\delta_F|\,,q),$$

где постоянная c не зависит от l и $\chi_1^2\left(-l^2\right)=1$ при $(l,|\delta_F|)=1$.

В дальнейшем при выводе оценок мы используем символ Виноградова $A\ll B$, означающий, что $|A|\le c\,|B|$, где $c>0$ – некоторая постоянная.

Тогда в силу лемм 5 и 6 будем иметь

$$\begin{aligned}\sum{}_2=&\frac{\left(4\pi^2\right)^S}{|\delta_F|^S}\sum_{q\le N}q^{-4s}\sum_{l=0,(l,q)=1}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{hl}{q}}\times\\&\times\prod_{i=1}^{s}G_1^{(i)}\left(q,l,o\right)G_2^{(i)}\left(q,-l,\overline{o}\right)\left\{O\left(qN\right)^{2s-1}+O\left(qN^{2s-2}\right)\right\}\ll\\&\ll\sum_{q\le N}q^{-4s}\sum_{l=0,(l,\delta_F q)=1}e^{-2\pi i\frac{hl}{q}}\cdot\chi_1\left(-l^2\right)q^{-2s}\left(qN\right)^{2s-1}+\\&+n^{2s-2}\sum_{q\le N}q^{-4s}\sum_{l=0,(l,\delta_F q)=1}e^{-2\pi i\frac{hl}{q}}\chi_1\left(-l^2\right)\ll\\&\ll\sum_{q\le N}\frac{1}{q}N^{2s-1}\left\{\frac{\varphi\left(\delta_F\right)}{\delta_F}C_q+O\left(|\delta_F|\,q^{\varepsilon}\right)\right\}+\\&+n^{2s-2}\cdot\sum_{l=0,(l,\delta_F q)=1}q^{-4s}O\left(|\delta_F|\,q^{\varepsilon}\right)\ll\\&\ll N^{2s-1}\ln N+n^{2s-2}\ll n^{2s-2}+n^{s-\frac{1}{2}+\rho}\end{aligned}$$

где $\rho>0$ – сколь угодно малое положительное число.

Подставляя это в выражение (*) для $I_{1,2}$ получаем при $n \to \infty$

$$I_{1,2} = \frac{2\pi^{2s}}{|\delta_F|^S} \frac{\Gamma(2s-1)}{\Gamma^2(s)} \left(n^{2s-1} + n^{2s-2}\right) e^{-\frac{h}{n}} \cdot \sum_{q \le N} q^{-4s} \sum_{l=0,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{s} G_1^{(i)}(q,l,\overline{o})\, G_2^{(i)}(q,-l,\overline{o}) + n^{s-\frac{1}{2}+\rho} =$$
$$= \frac{2\pi^{2s}}{|\delta_F|^S} \frac{\Gamma(2s-1)}{\Gamma^2(s)} n^{2s-1} e^{-\frac{h}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sum_{q \le N} q^{-4s} \sum_{l=0,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{s} G_1^{(i)}(q,l,\overline{o})\, G_2^{(i)}(q,-l,\overline{o}) + O\left(n^{s-\frac{1}{2}+\rho}\right) =$$
$$= \frac{2\pi^{2s}}{|\delta_F|^S} \frac{\Gamma(2s-1)}{\Gamma^2(s)} n^{2s-1} e^{-\frac{h}{n}} \sum_{q \le N} q^{-4s} \sum_{l=0,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{s} G_1^{(i)}(q,l,\overline{o})\, G_2^{(i)}(q,-l,\overline{o}) + O\left(n^{s-\frac{1}{2}+\rho}\right).$$

Теперь получаем при $N \to \infty$ $(n \to \infty)$

$$I_{1,2} = \frac{(4\pi^2)^s\, \Gamma(2s-1)}{2^{2s-1}\Gamma^2(s)} \cdot \frac{n^{2s-1} e^{-\frac{h}{n}}}{|\delta_F|^s} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4s} \cdot \sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{s} G_1^{(i)}(q,l,\overline{o})\, G_2(i)(q,-l,\overline{o}) + O\left(n^{s-\frac{1}{2}+\rho}\right) + R, \tag{14}$$

где

$$R = \frac{(2\pi^{2s})\Gamma(2s-1)}{\Gamma^2(s)} \cdot \frac{n^{2s-1} e^{-\frac{h}{n}}}{|\delta_F|^s} \sum_{q>N}^{\infty} q^{-4s} \cdot \sum_{l=0,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{s} G_1^{(i)}(q,l,\overline{o})\, G_2(i)(q,-l,\overline{o}).$$

Оценивая R сверху с учётом лемм 5 и 6, и применяя при этом рассуждения [7] к многомерному случаю, получаем

$$R \ll \frac{n^{2s-1} e^{-\frac{h}{n}}}{|\delta_F|^s} \cdot \sum_{q>N} q^{-4s} \sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \cdot \chi_1^{2s}(-l^2) \cdot q^{2s} (|\delta_F|, q)^s \ll$$
$$\ll n^{2s-1} \sum_{q>N} q^{-2s} \left\{ \frac{\varphi(\delta)}{\delta} c_q(h) + O\left(|\delta_F| \cdot q^{\varepsilon}\right) \right\} \ll$$

$$\ll n^{2s-1}\int\limits_{N}^{\infty} x^{-2s+\varepsilon}\,dx = O\left(n^{s-\frac{1}{2}+\rho}\right).$$

Тогда, в силу (11)

$$\begin{gathered}I_{1,2} = \frac{2\pi^{2s}\Gamma(2s-1)}{\Gamma^2(s)}\cdot\frac{n^{2s-1}e^{-\frac{h}{n}}}{|\delta_F|^s}\sum_{q=1}^{\infty}q^{-4s}\sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\times\\ \times\prod_{i=1}^{s}G_1^{(i)}(q,l,\overline{o})\,G_2^{(i)}(q,-l,\overline{o})+O\left(n^{s-\frac{1}{2}+\rho}\right),\end{gathered}\tag{15}$$

где $\rho>0$ – сколь угодно малое положительное число, т.е. получилось (13).

Теперь оцениваем интегралы $I_{1,1}$ и $I_{1,3}$. Имеем

$$\begin{gathered}I_{1,1}\le\frac{2\pi^{2s}\Gamma(2s-1)}{\Gamma^2(s)}\cdot\frac{n^{2s-1}e^{-\frac{h}{n}}}{|\delta_F|^s}\times\\ \times\sum_{q\le N}q^{-4s}\left|\sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\cdot\prod_{i=1}^{s}G_1^{(i)}(q,l,\overline{o})\,G_2^{(i)}(q,-l,\overline{o})\right|\times\\ \times\left|\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\frac{e^{-2\pi ihx}}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s}\,dx\right|.\end{gathered}$$

При этом

$$\left|\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{-\frac{1}{q(q+N)}}\frac{e^{-2\pi ihx}}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s}\,dx\right|\ll\sum_{q\le N}q^{-4s}q^{2s}\left(|\delta_F|,q\right)^s.$$

Тогда

$$I_{1,1}\ll\sum_{q\le N}\frac{1}{q^{2s}}\,|\delta_F|\,q^{\varepsilon}\cdot O\left((qN)^{2s-1}\right)\ll N^{2s-1+\rho}\ll n^{s-\frac{1}{2}+\rho}.$$

Аналогичными рассуждениями получаем также, что

$$I_{1,3}=O\left(n^{s-\frac{1}{2}+\rho}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}I_{1} = \frac{2\pi^{2s}\Gamma(2s-1)}{\Gamma^2(s)}\cdot\frac{n^{2s-1}\gamma(n)}{|\delta_F|^s}\sum_{q=1}^{\infty}q^{-4s}\sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\times\\ \times\prod_{i=1}^{s}G_1^{(i)}(q,l,\overline{o})\,G_2^{(i)}(q,-l,\overline{o})+O\left(n^{s-\frac{1}{2}+\rho}\right),\end{gathered}\tag{16}$$

где $\rho > 0$ – сколь угодно малое положительное число.

Теперь перейдём к оценке сверху интегралов $I_2, \dots, I_{4^s}$, которые дают вклад в остаточный член асимптотической формулы для $I_h(n,s)$.

Так как они оцениваются одинаковым образом с I_1, то дадим оценку сверху для I_{4^s} и для I_k, где $2 \le k \le 4^s - 1$.

Имеем

$$I_{4^s} = \sum_{q \le N} \sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \cdot \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \prod_{i=1}^{s} \Phi_1^{(i)}(x)\Phi_2^{(i)}(x) e^{-2\pi i h x}\,dx. \tag{17}$$

Подставляя в I_{4^s} значения для $\Phi_1^{(i)}(x)$ и $\Phi_2^{(i)}(x)$, $(i = 1, \dots, s)$, получаем

$$I_{4^s} = \frac{2\pi^{2s}}{|\delta_F|^s} \sum_{q \le N} q^{-4s} \sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \cdot \prod_{i=1}^{s} G_1^{(i)}\left(q, l, \overline{m}_i\right) G_2^{(i)}\left(q, -l, \overline{k}_i\right) \times$$
$$\times \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \frac{e^{-2\pi i h x}\,dx}{\left(\frac{1}{n^2} + 4\pi^2 x^2\right)^s} \cdot \sum_{\overline{m}_i \in Z^2 \setminus \{(0,0)\}} e^{-\sum\limits_{i=1}^{s} \frac{2\pi^2 Q_i^{(1)'}(\overline{m}_i)}{|\delta_F| q^2 \left(\frac{1}{n} - 2\pi i x\right)}} \times \tag{18}$$
$$\times \sum_{\overline{k}_i \in Z^2 \setminus (0,0)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{s} \frac{2\pi^2 Q_i^{(2)'}(\overline{k}_i)}{|\delta_F| q^2 \left(\frac{1}{n} + 2\pi i x\right)}},$$

где $Q_i^{(1)'}\left(\overline{m}_i\right)$, $Q_i^{(2)'}\left(\overline{k}_i\right)$ – квадратичные формы с матрицами, обратными матрицам форм $Q_i^{(1)}\left(\overline{m}_i\right)$ и $Q_i^{(2)}\left(\overline{k}_i\right)$.

Обозначая

$$V = \sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \cdot \prod_{i=1}^{s} G_1^{(i)}\left(q, l, \overline{m}_i\right) G_2^{(i)}\left(q, -l, \overline{k}_i\right),$$

равенство (18) можно переписать в следующем виде

$$I_{4^s} = \frac{(4\pi^2)^s}{|\delta_F|^s} \sum_{q \le N} \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \frac{e^{-2\pi i h x}}{\left(\frac{1}{n^2} + 4\pi^2 x^2\right)^s} \times$$
$$\times \sum_{\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_s \in Z^2 \setminus (0,0)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{s} \frac{4\pi^2 Q_i^{(1)'}(\overline{m}_i)}{|\delta_F| q^2 \left(\frac{1}{n} - 2\pi i x\right)}} \times \tag{19}$$
$$\times \sum_{\overline{k}_1, \dots, \overline{k}_s \in Z^2 \setminus (0,0)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{s} \frac{4\pi^2 Q_i^{(2)'}(\overline{k}_i)}{|\delta_F| q^2 \left(\frac{1}{n} + 2\pi i x\right)}}\,dx \cdot V.$$

Переходя в (19) к модулю подынтегральной функции, имеем

$$
\begin{aligned}
|I_{4^s}| \ll \sum_{q\le N} q^{-4s} \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \frac{1}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s}\times \\
\times \sum_{\overline{m}_1,\dots,\overline{m}_s\in Z^2\setminus(0,0)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{s}\frac{4\pi^2 Q_i^{(1)'}(\overline{m}_i)}{|\delta_F|q^2(1+2\pi^2n^2x^2)}}\times \\
\times \sum_{\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_s\in Z^2\setminus(0,0)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{s}\frac{4\pi^2 Q_i^{(2)'}(\overline{k}_i)}{|\delta_F|q^2(1+2\pi^2n^2x^2)}}\,dx\cdot|V|\,.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Сначала оценим сверху сумму V. Для этого воспользуемся формулами из [4] (см.также [8]) для неоднородных двойных сумм Гаусса (лемма 4). Имеем

$$
G_1^{(i)}\left(q,l,\overline{m}_i\right) = c_{11}^{(i)}\lambda_1(l)q\sqrt{(q,|\delta_F|)}e^{-\frac{2\pi i}{q}}c_{21}^{(i)}l^*,
$$

$$
G_2^{(i)}\left(q,l,\overline{k}_i\right) = c_{12}^{(i)}\lambda_1(-l)q\sqrt{(q,|\delta_F|)}e^{-\frac{2\pi i}{q}}c_{22}^{(i)}l^*,
$$

где $c_{11}^{(i)}$, $c_{12}^{(i)}$, $c_{21}^{(i)}$, $c_{22}^{(i)}$ – константы, не зависящие от l; здесь $ll^*\equiv 1(\operatorname{mod} q)$. Учитывая, что $\lambda_1(-l^2)=\pm 1$, получаем

$$
V = c\sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\cdot q^{2s}\left(q,|\delta_F|\right)^s\cdot e^{-\frac{2\pi i}{q}(c_{22}-c_{21})^{l^*}} =
$$

$$
= cq^{2s}\left(q,|\delta_F|\right)^s K\left(h,\left(c_{22}-c_{21}\right)s,q\right),
$$

где c – постоянная, зависящая от $c_{11}^{(i)}$, $c_{12}^{(i)}$ и $s\,(i=1,...,s)$; $K(h,(c_{22}-c_{21})s,q)$ – сумма Клостермана. Так как для суммы Клостермана по лемме 7 справедлива оценка

$$
K\left(h,\left(c_{22}-c_{21}\right)s,q\right) = O\left(|\delta_F|\right)\tau\left(|\delta_F|\right)q^{\frac{1}{2}+\varepsilon},
$$

то

$$
|V| \ll q^{2s+\frac{1}{2}+\rho},
$$

где ε, ρ – сколь угодно малые положительные числа.

Рассматривая опять разбиение интеграла $\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}$, как в предыдущем случае, получаем $I_{4^s} = I_{4^s,1}+I_{4^s,2}+I_{4^s,3}$.

Сначала оцениваем сверху $I_{4^s,2}$. Имеем

$$
|I_{4^s,2}| \ll \frac{\left(4\pi^2\right)^s}{|\delta_F|^s}\sum_{q\le N} q^{-4s}\int\limits_0^{\frac{1}{q(q+N)}} \frac{dx}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s}\times
$$

$$\times \sum_{\overline{m}_1,\ldots,\overline{m}_s\in Z^2\setminus\{(0,0)\}} e^{-\sum\limits_{i=1}^{s}\frac{2nQ_i^{(1)'}(\overline{m}_i)}{|\delta_F|q^2(1+2\pi^2n^2x^2)}}\cdot \sum_{\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_s\in Z^2\setminus\{(0,0)\}} e^{-\sum\limits_{i=1}^{s}\frac{2nQ_i^{(2)'}(\overline{k}_i)}{|\delta_F|q^2(1+2\pi^2n^2x^2)}}\,|V|\,.$$

Пусть $\theta > 0$ – сколь угодно малое положительное число. Тогда, расширяя промежуток $\left[0, \frac{1}{q(q+N)}\right]$ до $\left[0, \frac{1}{qN}\right]$, будем иметь

$$|I_{4^s,2}| \ll \left\{\sum_{q\le n^{\frac12-\theta}} q^{-4s}\int\limits_0^{\frac{1}{qn^{\frac12+\theta}}} + \sum_{q\le n^{\frac12-\theta}} q^{-4s}\int\limits_{qn^{\frac12+\theta}}^{\frac{1}{qN}} + \sum_{n^{\frac12-\theta}\le q\le N} q^{-4s}\int\limits_0^{\frac{1}{qN}}\right\}\cdot|V|\,. \qquad (21)$$

Обозначая каждое слагаемое правой части (21) соответственно через $\sum_{4^s,1}$, $\sum_{4^s,2}$ и $\sum_{4^s,3}$, получаем

$$|I_{4^s,2}| \ll \sum{}_{4^s,1} + \sum{}_{4^s,2} + \sum{}_{4^s,3}.$$

Оценим сверху сумму $\sum_{4^s,1}$. Для этого сначала в (21) оценим суммы

$$\sigma_1(x) = \sum_{\overline{m}_1,\ldots,\overline{m}_s\in Z^2} e^{-\sum\limits_{i=1}^{s}\frac{2nQ_i^{(1)'}(\overline{m}_i)}{|\delta_F|q^2(1+2\pi^2n^2x^2)}},$$

$$\sigma_2(x) = \sum_{\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_s\in Z^2} e^{-\sum\limits_{i=1}^{s}\frac{2nQ_i^{(2)'}(\overline{k}_i)}{|\delta_F|q^2(1+2\pi^2n^2x^2)}}.$$

Для оценки сумм $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ воспользуемся леммой 8 о том, что для любой положительной квадратичной формы $f\left(\overline{x}\right)$, найдётся такая постоянная $K = K_f > 0$, что $f\left(\overline{x}\right) \ge K\left|x\right|^2$, т.е. $f\left(x_1,\ldots,x_n\right) \ge K\cdot\left(x_1^2+...+x_n^2\right)$ (см. [5], гл.12, лемма 5.2). Тогда

$$\sigma_1(x) \le \sum_{\overline{m}_1,\ldots,\overline{m}_s\in Z^2} e^{-\sum\limits_{i=1}^{s}\frac{2\pi^2nK|\overline{m}_i|^2}{|\delta_F|q^2(1+4\pi^2n^2x^2)}}.$$

Это неравенство можно записать ещё в следующем виде

$$\sigma_1(x) \le \sum_{x_i,y_i\in Z\setminus\{0\}} e^{-\sum\limits_{i=1}^{2s}\frac{2\pi^2nK\left(x_i^2+y_i^2\right)}{|\delta_F|q^2(1+4\pi^2n^2x^2)}},$$

аналогично имеем

$$\sigma_2(x) \le \sum_{z_i,t_i\in Z\setminus\{0\}} e^{-\sum\limits_{i=1}^{2s}\frac{2\pi^2nL\left(z_i^2+t_i^2\right)}{|\delta_F|q^2(1+4\pi^2n^2x^2)}};$$

где K, $L > 0$ – некоторые постоянные.

Тогда

$$\sum\nolimits_{4^s,1} \ll \frac{1}{|\delta_F|^s} \sum_{q \le n^{\frac{1}{2}-\theta}} q^{-4s} \int\limits_0^{-\frac{1}{qn^{\frac{1}{2}+\theta}}} \frac{|\sigma_1(x)\sigma_2(x)|}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s}\, dx \cdot |V| \ll$$

$$\ll \frac{1}{|\delta_F|^s} \sum_{q \le n^{\frac{1}{2}-\theta}} q^{-4s} \int\limits_0^{\frac{1}{qn^{\frac{1}{2}+\theta}}} \frac{\sum\limits_{z_1,\ldots,z_{2s}\in Z}{}' \left\{\frac{|\delta_F| q^2 \left(1+4\pi^2n^2x^2\right)}{n}\right\}^{4s}}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s}\, dx \cdot |V| \ll$$

$$\ll \sum_{q \le n^{\frac{1}{2}-\theta}} q^{4s} n^s \int\limits_0^{\frac{1}{qn^{\frac{1}{2}+\theta}}} \left(\frac{1}{n}+nx^2\right)^{3s} dx \cdot |V| =$$

$$= n^s \cdot \sum_{q \le n^{\frac{1}{2}-\theta}} q^{4s} \cdot \sum_{k=0}^{3s} C_{3s}^k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{q^2\cdot n^{2s}}\right))^{3s-k} \cdot \frac{1}{qn^{\frac{1}{2}+\theta}} \cdot |V| \ll$$

$$\ll n^s \sum_{q \le n^{\frac{1}{2}-\theta}} n^{-k} \cdot q^{2k-\frac{1}{2}+\varepsilon'} \ll$$

$$\ll n^{s-k} \cdot n^{k-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\varepsilon'-2\theta k-\frac{1}{2}\theta-\theta\varepsilon'} = O\left(n^{s-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right),$$

где ε', θ, ε – сколь угодно малые положительные числа.

Аналогичными рассуждениями получаются также, что

$$\sum\nolimits_{4^s,2}, \sum\nolimits_{4^s,3} = O\left(n^{s-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

Оценим ещё сверху любое из слагаемых I_k $(2 \le k \le 4^s - 1)$ в сумме (10) для $I_h(n,s)$. Из соотношения (9) следует, что например,

$$I_k = \sum_{q \le N} \sum_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \prod_{i_1=1}^{s_1} \varphi_1^{(i_1)} \Phi_2^{(i_1)} \prod_{i_2=1}^{s_2} \varphi_2^{(i_2)} \Phi_1^{(i_2)} e^{-2\pi i hx} dx, \tag{22}$$

где $s_1 + s_2 = s$.

Для произведений под знаком интеграла с учётом $(7')$ и $(8')$ после некоторых преобразований получаем

$$\prod_{i_1=1}^{s_1}\varphi_1^{(i_1)}\Phi_2^{(i_2)}\prod_{i_2=1}^{s_2}\varphi_2^{(i_2)}\Phi_1^{(i_2)}=\left(\frac{4\pi^2}{q^4\left|\delta_F\right|}\right)^s\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s}\times$$
$$\times\prod_{i_1=1}^{s_1}G_1^{(i_1)}\left(q,l,\overline{o}\right)\prod_{i_2=1}^{s_2}G_2^{(i_2)}\left(q,-l,\overline{o}\right)\prod_{i_1=1}^{s_1}G_2^{(i_1)}\left(q,-l,\overline{k_{i_1}}\right)\times \tag{23}$$
$$\times\prod_{i_2=1}^{s_2}G_1^{(i_2)}\left(q,l,\overline{m_{i_2}}\right)\prod_{i_1=1}^{s_1}\sigma_{i_1}\left(x\right)\prod_{i_2=1}^{s_2}\sigma_{i_2}\left(x\right),$$

где

$$\sigma_{i_1}\left(x\right)=\sum_{\overline{k_{i_1}}\in Z^2\setminus\{(0,0)\}}e^{-\frac{2\pi^2Q_{i_1}^{(2)'}\left(\overline{k_{i_1}}\right)}{|\delta_F|q^2\left(n^{-1}+2\pi ix\right)}},$$

$$\sigma_{i_2}\left(x\right)=\sum_{\overline{m_{i_2}}\in Z^2\setminus\{(0,0)\}}e^{-\frac{2\pi^2Q_{i_2}^{(1)'}\left(\overline{m_{i_2}}\right)}{|\delta_F|q^2\left(n^{-1}-2\pi ix\right)}}.$$

Подставляя (23) в (22), будем иметь

$$I_k=\frac{\left(4\pi^2\right)^s}{\left|\delta_F\right|^s}\sum_{q\le N}q^{-4s}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\frac{e^{-2\pi ihx}}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s}\times$$
$$\times\prod_{i_1=1}^{s_1}\sigma_{i_1}(x)\prod_{i_2=1}^{s_2}\sigma_{i_2}(x)dx\prod_{i_1=1}^{s_1}G_1^{(i_1)}\left(q,l,\overline{o}\right)\times \tag{24}$$
$$\times\prod_{i_2=1}^{s_2}G_2^{(i_2)}\left(q,-l,\overline{o}\right)\prod_{i_1=1}^{s_1}G_2^{(i_1)}\left(q,-l,\overline{k_{i_1}}\right)\prod_{i_2=1}^{s_2}G_1^{(i_2)}\left(q,l,\overline{m_{i_2}}\right).$$

Обозначая

$$V_k=\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\prod_{i_1=1}^{s_1}G_2^{(i_1)}\left(q,-l,\overline{k_{i_1}}\right)\prod_{i_2=1}^{s_2}G_1^{(i_2)}\left(q,l,\overline{m_{i_2}}\right)$$

соотношение (24) примет вид

$$I_k=\frac{\left(4\pi^2\right)^s}{\left|\delta_F\right|^s}\sum_{q\le N}q^{-4s}\prod_{i_1=1}^{s_1}G_1^{(i_1)}\left(q,l,\overline{o}\right)\prod_{i_2=1}^{s_2}G_2^{(i_2)}\left(q,-l,\overline{o}\right)\times$$
$$\times\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\frac{e^{-2\pi ihx}}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s}\sigma_1(x)\sigma_2(x)dx\left|V_k\right|, \tag{25}$$

где $\sigma_1(x) = \prod\limits_{i_1=1}^{s_1} \sigma_{i_1}(x)$, $\sigma_2(x) = \prod\limits_{i_2=1}^{s_2} \sigma_{i_2}(x)$.

Оценим сверху V_k. В силу леммы 4 о двойных суммах Гаусса имеем

$$V_k = \sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{lh}{q}} \left\{c_1\chi_1(-l)q\sqrt{(|\delta_F|\,,q)}e^{-\frac{2\pi i}{q}c_2(-l)^*}\right\}^{s_1} \times$$

$$\times \left\{c_3\chi_1(l)q\sqrt{(|\delta_F|\,,q)}e^{-\frac{2\pi i}{q}l^*}\right\}^{s_2} =$$

$$= c\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{lh}{q}} q^s\left(|\delta_F|\,,q\right)^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{2\pi i}{q}(-c_2l^*s_1-c_4l^*s_2)} =$$

$$= c\cdot q^s\left(|\delta_F|\,,q\right)^{\frac{s}{2}} K\left(-h,-c_2s_1-c_4s_2;q\right),$$

где c — некоторая вещественная постоянная.

Отсюда в силу леммы 7 об оценке суммы Клостермана получаем

$$|V_k| \ll q^s\left(|\delta_F|\,,q\right)^{\frac{s}{2}} q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(h,q) \underset{\delta_F}{\ll} q^{s+\frac{1}{2}+\varepsilon}(h,q), \tag{26}$$

где знак $\underset{\delta_F}{\ll}$ означает, что постоянная в этой оценке зависит от δ_F.

Для оценок сумм $\sigma_{i_1}(x)$ и $\sigma_{i_2}(x)$ опять воспользуемся леммой 8. При некоторой постоянной $K>0$ имеем

$$|\sigma_{i_1}(x)| \le \sum_{k_1,k_2\in Z\setminus\{0\}} e^{-\frac{2\pi^2nK\left(k_1^2+k_2^2\right)}{|\delta_F|q^2(n^{-1}+4\pi^2n^2x^2)}} =$$

$$= \sum_{k_1,k_2\in Z\setminus\{0\}} \frac{1}{e^{\frac{2\pi^2nK\left(k_1^2+k_2^2\right)}{|\delta_F|q^2(n^{-1}+4\pi^2n^2x^2)}}} \ll \left(\frac{q^2\left(1+4\pi^2n^2x^2\right)}{n}\right)^2,$$

откуда

$$\prod_{i_1=1}^{s_1}|\sigma_{i_1}(x)| \ll \frac{\left\{q^2\left(1+4\pi^2n^2x^2\right)\right\}^{2s_1}}{n^{2s_1}}.$$

Аналогично

$$\prod_{i_2=1}^{s_2}|\sigma_{i_2}(x)| \ll \frac{\left\{q^2\left(1+4\pi^2n^2x^2\right)\right\}^{2s_2}}{n^{2s_2}}.$$

Тогда

$$|\sigma_1(x)\sigma_2(x)| \ll \frac{\left\{q^2\left(1+4\pi^2n^2x^2\right)\right\}^{2s}}{n^{2s}} \le \frac{\left\{q^2\left(1+4\pi^2n^2x^2\right)\right\}^{4s}}{n^{4s}}. \tag{27}$$

Как и в случаях I_1 и I_{4^s} будем рассматривать представление $I_k = I_{k,1}+I_{k,2}+I_{k,3}$.

Оценивая сверху $I_{k,2}$, будем иметь

$$|I_{k,2}| \ll \sum_{q\le N} q^{-4s} \int\limits_0^{\frac{1}{q(q+N)}} \frac{|\sigma_1(x)\sigma_1(x)|}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s} dx\, |V_k|\,.$$

Интегрирование в этой оценке разобьём на три промежутка. Для этого, выбирая Θ сколь угодно малым положительным числом, будем иметь

$$|I_{k,2}| \ll \sum_{q\le n^{\frac12-\Theta}} \int\limits_0^{\frac{1}{qn^{\frac12+\Theta}}} + \sum_{q\le n^{\frac12-\Theta}} \int\limits_{\frac{1}{qn^{\frac12+\Theta}}}^{\frac{1}{qN}} + \sum_{n^{\frac12-\Theta}<q\le N} \int\limits_0^{\frac{1}{qN}} = \sum{}_{k,1} + \sum{}_{k,2} + \sum{}_{k,3}.$$

Оценивая сумму $\sum_{k,1}$ с учетом (25)–(27), будем иметь

$$\left|\sum{}_{k,1}\right| \ll \sum_{q\le n^{\frac12-\Theta}} q^{-4s} \int\limits_0^{\frac{1}{qn^{\frac12+\Theta}}} \frac{|\sigma_1(x)\sigma_2(x)|}{\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s} dx\, |V_k| \ll$$

$$\ll \sum_{q\le n^{\frac12-\Theta}} q^{-4s} \int\limits_0^{\frac{1}{qn^{\frac12+\Theta}}} \frac{\left\{q^2\left(1+4\pi^2n^2x^2\right)\right\}^{4s}}{n^{4s}\left(\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2\right)^s} dx\, |V_k| =$$

$$= \sum_{q\le n^{\frac12-\Theta}} q^{4s} \int\limits_0^{\frac{1}{qn^{\frac12+\Theta}}} \frac{\left(1+4\pi^2n^2x^2\right)^{4s}}{n^{2s}\left(1+4\pi^2n^2x^2\right)^s} dx\, |V_k| =$$

$$= n^s \sum_{q\le n^{\frac12-\Theta}} q^{4s} \int\limits_0^{\frac{1}{qn^{\frac12+\Theta}}} \left(\frac{1}{n}+4\pi^2nx^2\right)^{3s} dx\, |V_k| \ll$$

$$\ll n^s \sum_{q\le n^{\frac12-\Theta}} q^{4s} \left(\frac{1}{n}+n\frac{1}{q^2n^{1+2\Theta}}\right)^{3s} \frac{1}{qn^{\frac12+\Theta}} q^{s+\frac12+\varepsilon}(h,q) \ll_h$$

$$\ll_h n^s \sum_{q\le n^{\frac12-\Theta}} q^{4s} \frac{1}{q^{6s}n^{6s\Theta}} \frac{q^{s-\frac12+\rho}}{n^{\frac12+\Theta}} \ll n^{s-\frac12-\Theta} \sum_{q\le n^{\frac12-\Theta}} q^{-s-\frac12+\rho} =$$

$$= n^{s-\frac12-\Theta} \sum_{q\le n^{\frac12-\Theta}} \frac{1}{q^{s+\frac12-\varepsilon}} \ll n^{s-\frac12-\Theta} \sum_{q\le n^{\frac12-\Theta}} \frac{q^\rho}{q^{\frac32}} \ll$$

$$\ll n^{s-\frac12} \sum_{q\le n^{\frac12-\Theta}} \frac{1}{q^{\frac12}} \ll n^{s-\frac12+\varepsilon}\sqrt{q} \ll n^{s-\frac14+\varepsilon},$$

где $\Theta, \rho, \varepsilon > 0$ — сколь угодно малые числа.

Аналогичные рассуждения приводят также к оценкам $\sum_{k,2}, \sum_{k,3} \ll n^{s-\frac{1}{4}+\varepsilon}$ и значит, $I_k = O\left(n^{s-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)$, где постоянная в знаке O зависит от δ_F и h, причем оценки будут сохраняться при $h \ll n^{\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Подставляя теперь оценки для I_1, I_{4^s} и I_k $(2 \le k \le 4^s - 1)$ в (10) получим асимптотическую формулу (4) для $I_h(n, s)$.

□

4. Заключение

Для суммы

$$I_h\left(n,s\right) = \sum_{p\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t}\right)=h} e^{-\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{s} Q_i^{(1)}(x_i,y_i)+Q_i^{(2)}(z_i,t_i)\right)},$$

где

$$p\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t}\right) = \sum_{i=1}^{s}\left\{\sum Q_i^{(1)}\left(x_i,y_i\right) - Q_i^{(2)}\left(z_i,t_i\right)\right\},$$

$\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t}$ — четырёхмерные векторы, выражающей взвешенное число целых точек на $4s$–мерной гиперболической поверхности, получена асимптотическая формула

$$I_h = 2\pi^{2s}\frac{\Gamma(2s-1)n^{2s-1}}{\Gamma^2(s)\left|\delta_F\right|^s} e^{-\frac{h}{n}} \cdot \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4s} \sum_{l=0,\,(l,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{lh}{q}} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{s} G_1^{(i)}\left(q,l,\overline{o}\right) G_2^{(i)}\left(q,-l,\overline{o}\right) + O\left(n^{s-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция, $G_1^{(i)}\left(q,l,\overline{o}\right)$ и $G_2^{(i)}\left(q,-l,\overline{o}\right)$ — двойные суммы Гаусса, δ_F — дискриминант мнимого квадратичного поля, ε — сколь угодно малое положительное число.

Асимптотическая формула для $I_h(n, s)$ обобщает основной результат Куртовой Л. Н. [7] на случай о взвешенном числе целых многомерных гиперболических поверхностей, а именно при $s = 1$ получаем результат из [7]. Кроме того, наш результат в случае постоянных коэффициентов уравнения гиперболоида обобщает результат Малышева А. В. [10] на случай некоторых недиагональных квадратичных форм, а в сравнении с результатом Головизина В. В. [3] главный член в рассматриваемой задаче получен в явном виде, а в [3] он выражен через некоторый комплексный интеграл $W(N)$, для которого дана только оценка сверху, при этом $N = [\sqrt{n}]$.

В дальнейшем результат о $I_h\,(n,s)$ может быть применен к одной задаче Малышева А. В. [10] об асимптотике числа целых точек, лежащих в некоторых областях специального вида на многомерных гиперболоидах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боревич З. И., Шафаревич И.Р. *Теория чисел. Изд. 3-е.*, Москва, 1985. 503 с.
2. Виноградов И. М. *Основы теории чисел*, М.: Изд. «Наука». 1981. 168 с.
3. Головизин В. В. *О распределении целых точек на гиперболических поверхностях второго порядка* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **106** (1981), с. 52–69.
4. Гриценко С. А. *О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле* Чебышевский. Сборник, **4**, вып. 2(6) (2003), с. 55–67.
5. Касселс Дж. *Рациональные квадратичные формы.* М.: «Мир». 1982. 436 с.
6. Карацуба А. А. *Основы аналитической теории чисел.* М.: «Мир». 1983. 240 с.
7. Куртова Л. Н. *Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами* // Вестник Самарского госуниверситета. Естественно-научная серия. Математика, № 7(57) (2007), с. 107–121.
8. Малышев А. В. *О представлении целых чисел положительными квадратичными формами* // Труды Математического ин-та АНССР, **65** (1962), 212 с.
9. Малышев А. В. *О представлении целых чисел квадратичными формами* // Труды четвёртого всесоюзного математического съезда, **2** (1964), с. 118–124.
10. Малышев А. В. *О взвешенном количестве целых точек, лежащих на поверхности второго порядка* // Зап. научн. семин. ЛОМИ. **1** (1966), с. 6–83.
11. Пачев У. М., ДоховР. А. *О двойных суммах Гаусса, соответствующих классам идеалов мнимого квадратичного поля* // Научные ведомости БелГУ, **19(162)**, вып. 32, (2013), С. 108–119.
12. Свешников С. А., Тихонов А. Н. *Теория функций комплексной переменной.* М.: «Наука». 1967. 304 с.
13. Dolciani M. P. *On the representation of integers by quadratic forms* // Thesis Ithaca, New York, 1947. P. 1–56.
14. Ogg A. P. *Modular Forms and Dirichlet Series.* New York, W.A. Benjamin Inc., 1969. 211 p.

15. Hardy G. H., Wrigth E. M. *An introduction to theory of numbers*, Oxford, 1938. 421 p.

16. Siegel C. L. *Equivalence of quadratic forms.* Amer. I. Math., **63** (1941), P. 658–680.

REFERENCES

1. Borevich, Z. I., Shafarevich, I. R. 1985, "*Teoriya chisel*", [The theory of numbers] 3rd edition, Nauka, Moscow, 503 pp. (Russian)

2. Vinogradov, I. M. 1981, "*Osnovy teorii chisel*", [Baics of the theory of numbers] 9th edition, Nauka, Moscow. (Russian)

3. Golovizin, V. V. 1981, "On the distribution of integer points on hyperbolic surfaces of the second order", *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, vol. 106, pp. 52–69. (Russian)

4. Gritsenko, S. A. 2003, "On functional equation for one Dirichlet ariphmetic series", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 4, no. 2(6), pp. 55–67. (Russian)

5. Cassels, J. 1982, "*Racional'nye kvadratichnye formy*", [Rational quadratic forms], Mir, Moscow, 436 pp. (Russian)

6. Karatsuba, A. A. 1983, "*Osnovy analiticheskoi teorii chisel*", [Principles of analytic number theory], Nauka, Moscow, 240 pp. (Russian)

7. Kurtova L. N. 2007, "On one binary additive problem with quadratic forms", *Vestn. Samarsk. Gos. Univ. Est.-Nauchn. Ser. Mat.*, no. 7(57), pp. 107–121. (Russian)

8. Malyshev, A. V. 1962, "On the representation of integers by positive quadratic forms", *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 65, 212 p. (Russian)

9. Malyshev, A. V. 1964, "On the representation of integers by quadratic forms", *Proc. 4th All-Union Mat. Congr.*, vol. 2, pp. 118–124. (Russian)

10. Malyshev, A. V. 1966, "On the weighted number of integer points on a quadric", *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, vol. 1, pp. 6–83. (Russian)

11. Pachev, U. M., Dokhov, R. A., 2013, "On Gauss doble sums corresponding to classes of ideals of imaginary quadratic field", *Nauchn. Ved. Bel. Gos. Univ.*, vol. 19(162), no. 32, pp. 108–119. (Russian)

12. Sveshnikov, S. A., Tikhonov, A. N. 1967, "*Teorija funkcij kompleksnoj peremennoj*", [The theory of functions of complex variable], Nauka, Moscow, 304 pp. (Russian)

13. Dolciani, M. P. 1947, "On the representation of integers by quadratic forms", *Thesis Ithaca*, New York, pp. 1–56.

14. Ogg, A. P. 1969, *Modular Forms and Dirichlet Series*. New York, W.A. Benjamin Inc., 211 p.

15. Hardy, G. H., Wrigth, E. M. 1938, *An introduction to theory of numbers*, Oxford, 421 p.

16. Siegel, C. L. 1941, "Equivalence of quadratic forms", *Amer. I. Math.*, vol. 63, pp. 658–680.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
Получено 29.07.2015