ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 1.

УДК 511.524

СУММЫ ХАРАКТЕРОВ ПО МОДУЛЮ СВОБОДНОГО ОТ КУБОВ НА СДВИНУТЫХ ПРОСТЫХ

З. Х. Рахмонов, Ш. Х. Мирзорахимов (г. Душанбе)

Аннотация

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В 1938 г. он доказал: *если q — простое нечётное, $(l,q)=1$, χ — неглавный характер по модулю q, тогда*

$$T(\chi)=\sum_{p\leqslant x}\chi(p-l)\ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \qquad (IMV)$$

При $x\gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\bmod q$ *вида $p-l$, $p\leqslant x$*. Затем в 1953 г. И. М. Виноградов получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x\geqslant q^{0{,}75+\varepsilon}$, q — простое. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T(\chi)$ можно записать в виде суммы, по нулям соответствующей L — функции Дирихле; тогда в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T(\chi)$ получится нетривиальная оценка, но только при $x\geqslant q^{1+\varepsilon}$.

В 1968 г. А. А. Карацуба нашел метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. В 1970 г. он с помощью развития этого метода в соединении с методом И. М. Виноградова доказал: *если q — простое, χ — неглавный характер по модулю q, $x\geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*

$$T(\chi)\ll xq^{-\frac{\varepsilon^2}{1024}}.$$

В 1985 г. З. Х. Рахмонов обобщил оценку (IMV) на случай составного модуля и доказал: *пусть D — достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q — примитивный характер, порожденный характером χ, тогда*

$$T(\chi)\leqslant x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right), \qquad q_1=\prod_{\substack{p\backslash D\\ p\not\backslash q}}p.$$

Если характер χ совпадает со своим порождающим примитивным характером χ_q, то последняя оценка нетривиальна при $x>q(\ln q)^{13}$.

В 2010 г. Дж. Б. Фридландер, К. Гонг, И. Е. Шпарлинский для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T(\chi_q)$ существует, когда x — длина суммы — по порядку меньше q. Они доказали: *для примитивного характера χ_q и всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, что для всех $x\geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ имеет место оценка*

$$T(\chi_q)\ll xq^{-\delta}.$$

В 2013 г. З. Х. Рахмонов для составного q и примитивного характера χ_q доказал нетривиальную оценку $T(\chi_q)$ при $x\geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

В этой работе для модулей q – свободных от кубов, доказана теорема об оценке суммы $T(\chi_q)$, являющиеся нетривиальной при $x\geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Ключевые слова: характер Дирихле, сдвинутые простые числа, короткая сумма характеров, тригонометрические суммы с простыми числами.

Библиография: 15 названий.

SUMS OF CHARACTERS MODULO A CUBEFREE AT SHIFTED PRIMES

Z. Kh. Rakhmonov, Sh. Kh. Mirzorakhimov (Dushanbe)

Abstract

Vinogradov's method of estimation of exponential sums over primes allowed him to solve the number of arithmetic problems with primes. One of them is a problem of distribution of the values of non-principal character on the sequence of shifted primes. In 1938 he proved that *if q is an odd prime, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ is non-principal character modulo q, then*

$$T(\chi)=\sum_{p\leqslant x}\chi(p-l)\ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \qquad (IMV)$$

This estimate is non-trivial when $x\gg q^{1+\varepsilon}$ and *an asymptotic formula for the the number of quadratic residues (non-residues) modulo q of the form $p-l$, $p\leqslant x$* follows from it. Later in 1953, I. M. Vinogradov obtained a non-trivial estimate of $T(\chi)$ when $x\geqslant q^{0,75+\varepsilon}$, q is a prime. It was a surprising result. In fact, $T(\chi)$ can be represented as a sum over zeroes of correspondent Dirichlet L — function; So a non-trivial estimate of $T(\chi)$ is obtained only for $x\ \geqslant\ q^{1+\varepsilon}$ provided that the extended Riemann hypothesis is true.

In 1968 A. A. Karatsuba found a method that allowed him to obtain non-trivial estimate of short sums of characters in finite fields with fixed degree. In 1970 using the modification of his technique coupled with Vinogradov's method he proved that: *if q is a prime number, χ is non-principal character modulo q and $x\geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, then the following estimate is true*

$$T(\chi)\ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

In 1985 Z. Kh. Rakhmonov generalized the estimate (IMV) for the case of composite modulo and proved: *let D is a sufficiently large positive integer, χ is a non-principal character modulo D, χ_q is primitive character generated by character χ, then*

$$T(\chi)\leqslant x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right), \qquad q_1=\prod_{\substack{p\backslash D\\ p\not\,\backslash q}}p.$$

If a character χ coincides with it generating primitive character χ_q, then the last estimate is non-trivial for $x>q(\ln q)^{13}$.

In 2010 г. J. B. Friedlander, K. Gong, I. E. Shparlinski showed that a non-trivial estimate of the sum $T(\chi_q)$ exists for composite q when x — length of the sum, is of smaller order than q. They proved: *for a primitive character χ_q and an arbitrary $\varepsilon>0$ there exists such $\delta>0$ that for all $x\geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ the following estimate holds:*

$$T(\chi_q)\ll xq^{-\delta}.$$

In 2013 Z. Kh. Rakhmonov obtained a non-trivial estimate of $T(\chi_q)$ for the composite modulo q and primitive character χ_q when $x\geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

In this paper the theorem about the estimate of the sum $T(\chi_q)$ is proved for cubefree modulo q. It is non-trivial when $x\geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

Keywords: Dirichlet Character, Shifted primes, Short Sums of characters, Exponential Sums Over Primes.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В 1938 г. он [1] доказал: *если q — простое нечётное, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q, тогда*

$$T(\chi)=\sum_{p\leqslant x}\chi(p-l)\ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \tag{1}$$

При $x\gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\mod q$ *вида* $p-l$, $p\leqslant x$. Затем И. М. Виноградов [2, 3] получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x\geqslant q^{0{,}75+\varepsilon}$, q — простое. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T(\chi)$ можно записать в виде суммы, по нулям соответствующей L — функции Дирихле; тогда в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T(\chi)$ получится нетривиальная оценка, но только при $x\geqslant q^{1+\varepsilon}$. В 1970 г. А. А. Карацуба [4, 5] получил новую оценку $T(\chi)$, нетривиальную уже при $x\geqslant q^{0{,}5+\varepsilon}$.

В [6, 7, 8] обобщена оценка (1) на случай составного модуля и доказана: *пусть D — достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q — примитивный характер, порожденный характером χ, тогда*

$$T(\chi)\leqslant x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right),\qquad q_1=\begin{matrix}p\backslash D\\ p\nmid q\end{matrix}p. \tag{2}$$

Если характер χ совпадает со своим порождающим примитивным характером χ_q, то оценка (2) нетривиальна при $x>q(\ln q)^{13}$. Дж. Б. Фридландер, К. Гонг, И. Е. Шпарлинский [9] для составного q получили нетривиальную оценку $T(\chi_q)$ при $x\geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$. В [10, 11, 12] для составного q доказана нетривиальная оценка $T(\chi_q)$ при $x\geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

В этой работе для модулей q, являющихся свободными от кубов числами, получена новая оценка $T(\chi_q)$, нетривиальная при $x\geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Теорема 1. *Пусть q — достаточно большое натуральное число свободное от кубов, χ_q — примитивный характер по модулю q, $(l,q)=1$, ε — положительное сколь угодно малое постоянное число, $\mathscr{L}=\ln q$, $x\geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Тогда имеем*

$$T(\chi_q)=\sum_{p\leqslant x}\chi_q(p-l)\ll x\exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом оценок сумм с простыми числами И. М. Виноградова в сочетании с методами работы А. А. Карацубы [5] об оценке суммы $T(\chi_q)$ для простого q, работы З. Х. Рахмонова [12] об оценке суммы $T(\chi_q)$, χ_q — примитивный характер по модулю q , q — составное. В доказательстве мы также используем результаты работ Д .А. Берджесса [13, 14]. Основные утверждения, позволившие получить новую оценку $T(\chi_q)$, содержатся в леммах 7, 8, 9.

2. Известные леммы

Лемма 1. [9]. *Для любых натуральных q и U имеет место асимптотическая формула*

$$\left|\sum_{\substack{u=1\\(u,q)=1}}^{U}1-\frac{\varphi(q)}{q}U\right|\leqslant 2^{\omega(q)}.$$

Лемма 2. [15]. *При $x \geqslant 2$ имеем*

$$\sum_{n\leqslant x}\tau_r^k(n) \ll x\left(\ln x\right)^{r^k-1}, \qquad k=1,2.$$

Лемма 3. [12]. *Пусть σ — фиксированное число, $0,1\leqslant\sigma<0,9$, тогда*

$$\sum_{\substack{d\backslash D\\ d>\exp(\ln D^2)^\sigma}}\frac{\mu^2(d)}{d} \ll \exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^\sigma D\right).$$

Лемма 4. [12]. *Пусть K — число решений сравнения:*

$$\begin{aligned}&(nd-\eta)y\equiv(n_1d-\eta)y_1 \pmod q,\\ &M<n,n_1\leqslant M+N,\quad 1\leqslant y,y_1\leqslant Y,\quad (y,q)=1,\quad (y_1,q)=1,\end{aligned}$$

где $(\eta,q)=1$, d — делитель числа q, $2NY<q$, $d<Y$, $\rho(qd^{-1},Y)$ — число делителей β числа qd^{-1}, удовлетворяющего условиям $qY^{-1}\leqslant\beta<qd^{-1}$ и $(\beta,d)=1$. Тогда справедливо соотношение:

$$K\leqslant NY_q+\frac{2Y^2}{d}+\frac{2Y^2}{d}\rho(qd^{-1},Y)+\frac{2(NY)^{1+\delta}}{d},$$

где δ — сколь угодно малое положительное число.

Лемма 5. [12]. *Пусть $(\eta,q)=1$, $y<x$, тогда*

$$S=\sum_{\substack{x-y<n\leqslant x\\ (n,q)=1}}\chi_q(n-\eta)\ll 2^{\omega(q)}\sqrt{q}\ln q.$$

Лемма 6. *Пусть r — произвольное фиксированное натуральное число, N — натуральное число, k — натуральное число, $0\leqslant k\leqslant q-1$. Тогда справедливо соотношение*

$$W=\sum_{\lambda=0}^{q-1}\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\chi_q(\lambda+n)e\left(-\frac{kn}{q}\right)\right|^{2r}\leqslant c_1\left(N^rq+N^{2r}q^{\frac12+\delta}\right),$$

где постоянная $c_1=c_1(r,\delta)$ зависит только от r и δ.

Доказательство. Имеем

$$W=\sum_{1\leqslant n_1,\ldots n_{2r}\leqslant N}e\left(-\frac{(n_1+\ldots-n_{2r})k}{q}\right)\sum_{\lambda=0}^{q-1}\chi\left(\frac{(\lambda+n_1)\ldots(\lambda+n_r)}{(\lambda+n_{r+1})\ldots(\lambda+n_{2r})}\right).$$

Далее методом доказательства леммы 8 работы [13] воспользовавшись леммой 8 работы [14], найдем

$$W\leqslant\sum_{1\leqslant n_1,\ldots n_{2r}\leqslant N}\left|\sum_{\lambda=0}^{q-1}\chi\left(\frac{(\lambda+n_1)\ldots(\lambda+n_r)}{(\lambda+n_{r+1})\ldots(\lambda+n_{2r})}\right)\right|\leqslant N^rq+N^{2r}q^{\frac12+\delta}.$$

Лемма доказана.

3. Оценка коротких сумм значений характеров

Лемма 7. *Пусть σ — вещественное число, $r \geqslant 3$ — произвольное фиксированное натуральное число, M, N, d и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta, q) = 1$, $N < q^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4r}} d^{-\frac{1}{2}}$, $0,1 \leqslant \sigma < 0,9$, $d \leqslant \exp(\mathscr{L}^2)^{\sigma}$, тогда*

$$S = \sum_{M<n\leqslant M+N} \chi_q(nd-\eta) \leqslant N^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2. \tag{3}$$

Доказательство. Оценку (3) для сумму S докажем методом математической индукции по N. При $N \leqslant q^{\frac{1}{4}}$ для правой части оценки (3) справедливо неравенство

$$N^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2 \geqslant N^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}} > N^{1-\frac{1}{r}} \left(N^4\right)^{\frac{1}{4r}} = N.$$

то есть в этом случае оценка (3) является тривиальной и её возьмем в качестве базы индукции.

Далее будем считать, что $N > q^{\frac{1}{4}}$. Производя в сумме S сдвиг интервала суммирования на h, $1 \leqslant h \leqslant H < N$, получим

$$S = \sum_{M<n\leqslant M+N} \chi_q((n+h)d-\eta) + \sum_{M<n\leqslant M+h} \chi_q(nd-\eta) - \sum_{M+N<n\leqslant M+N+h} \chi_q(nd-\eta).$$

Оценивая две последние суммы, воспользовавшись предположением индукции, имеем

$$S \leqslant \left| \sum_{M<n\leqslant M+N} \chi_q((n+h)d-\eta) \right| + 2H^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2.$$

Полагая в этом неравенстве $h = yz$ и суммируя его по y и z в пределах

$$1 \leqslant y \leqslant Y, \quad (y,q) = 1, \quad 1 \leqslant z \leqslant Z, \quad Y = \left[2^{-1} N q^{-\frac{1}{2r}} d\right], \quad Z = \left[2^{-1-\frac{2}{r-1}} q^{\frac{1}{2r}} d^{-1}\right],$$

и обозначая через Y_q — количество чисел $y \in [1, Y]$ взаимно простых с числом q, приходим к неравенству:

$$|S| \leqslant \frac{1}{Y_q Z} \left| \sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant Y\\ (y,q)=1}} \sum_{1\leqslant z\leqslant Z} \sum_{M<n\leqslant M+N} \chi_q((n+yz)d-\eta) \right| + 2(YZ)^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2.$$

Далее определяя число y^{-1} из сравнения $yy^{-1} \equiv 1 \pmod q$ и воспользовавшись определением параметров Y и Z, имеем

$$|S| \leqslant \frac{1}{Y_q Z} \sum_{M<n\leqslant M+N} \sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant Y\\ (y,q)=1}} \left| \sum_{1\leqslant z\leqslant Z} \chi_q((nd-\eta)y^{-1}+zd) \right| + 2^{-1} N^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2.$$

Обозначая в этом неравенстве символом $I(\lambda)$ — число решений сравнения

$$(nd-\eta)y^{-1} \equiv \lambda \pmod q, \quad M < n \leqslant M+N, \quad 1 \leqslant y \leqslant Y, \quad (y,q) = 1,$$

получим

$$|S| \leqslant W + 0,5\, N^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2, \tag{4}$$

$$W = (Y_q Z)^{-1} \sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) \left| \sum_{1\leqslant z\leqslant Z} \chi_q(\lambda+zd) \right|.$$

Стандартным методом (см. [12], стр. 90) преобразуем внутреннюю сумму так, чтобы её общий член не зависел от параметра d. Имеем

$$W \leqslant 4\mathscr{L} \max_{0\leqslant k\leqslant q-1} W(k), \quad W(k) = \frac{1}{Y_q Z}\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda)\left|\sum_{z\leqslant dZ}\chi_q(\lambda+z)e\left(-\frac{kz}{q}\right)\right|. \tag{5}$$

Возведём $W(k)$ в степень r, воспользуемся неравенством Гёльдера и тем, что

$$\sum_{\lambda=1}^{q} I(\lambda) \leqslant NY_q,$$

будем иметь:

$$W^r(k) \leqslant (Y_q Z)^{-r}\left(\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda)\right)^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda)\left|\sum_{1\leqslant z\leqslant dZ}\chi_q(\lambda+z)e\left(-\frac{kz}{q}\right)\right|^r \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(NY_q)^{r-1}}{(Y_q Z)^r}\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda)\left|\sum_{1\leqslant z\leqslant dZ}\chi_q(\lambda+z)e\left(-\frac{kz}{q}\right)\right|^r.$$

Обе части последнего неравенства возведём в квадрат, воспользуемся неравенством Коши. Будем иметь

$$W^{2r}(k) \leqslant \frac{(NY_q)^{2r-2}}{(Y_q Z)^{2r}}\cdot KV, \tag{6}$$

$$K = \sum_{\lambda=0}^{q-1} I^2(\lambda), \qquad V = \sum_{\lambda=0}^{q-1}\left|\sum_{1\leqslant z\leqslant dZ}\chi_q(\lambda+z)e\left(-\frac{kz}{q}\right)\right|^{2r}.$$

Пользуясь леммой 6, получим

$$V \leqslant c_1 Z^{2r}\left(Z^{-r}d^r q + d^{2r}q^{\frac{1}{2}+\delta}\right). \tag{7}$$

Сумма K равна числу решений сравнения

$$(nd-\eta)y^{-1} \equiv (n_1 d-\eta)y_1^{-1} \pmod q,$$
$$M < n, n_1 \leqslant M+N, \quad 1\leqslant y, y_1 \leqslant Y, \quad (y,q)=1, \quad (y_1,q)=1,$$

или сравнения

$$(nd-\eta)y \equiv (n_1 d-\eta)y_1 \pmod q,$$
$$M < n, n_1 \leqslant M+N, \quad 1\leqslant y, y_1 \leqslant Y, \quad (y,q)=1, \quad (y_1,q)=1,$$

для которого все условия леммы 4 выполняются:

$$2NY = 2N\left[2^{-1}Nq^{-\frac{1}{2r}}d\right] \leqslant N^2 q^{-\frac{1}{2r}}d < \left(q^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4r}}d^{-\frac{1}{2}}\right)^2 q^{-\frac{1}{2r}}d = q,$$
$$\frac{Y}{d} = \frac{\left[2^{-1}Nq^{-\frac{1}{2r}}d\right]}{d} > \frac{\left[2^{-1}q^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{2r}}d\right]}{d} > \frac{\left[2^{-1}q^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{6}}d\right]}{d} > 3^{-1}q^{\frac{1}{12}} > 1.$$

Согласно этой лемме имеем

$$K \leqslant \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d}\left(1+\frac{d}{2(NY)^{\delta}}+\frac{Y}{N(NY)^{\delta}}\left(\rho(qd^{-1},Y)+1\right)\right).$$

Отсюда с учётом соотношений

$$\begin{aligned}
&d \leqslant \exp(\mathscr{L}^2)^{\sigma} \leqslant q^{\frac{\delta}{6}}, \qquad (NY)^{\delta} \geqslant (0,4\,N^2q^{-\frac{1}{2r}}d)^{\delta} \geqslant (0,4\,q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}}d)^{\delta} > 0,4\,q^{\frac{\delta}{3}},\\
&Y \leqslant 2^{-1}\,Nq^{-\frac{1}{2r}}d \leqslant 2^{-1}\,Nq^{-\frac{1}{2r}+\frac{\delta}{6}}, \qquad \rho(qd^{-1},Y)+1 \leqslant \tau(q) \leqslant q^{\frac{\delta}{6}},
\end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned}
K \leqslant &\frac{2(NY)^{1+\delta}}{d}\left(1+\frac{q^{\frac{\delta}{4}}}{2\cdot 0,4\,q^{\frac{\delta}{3}}}+\frac{2^{-1}\,Nq^{-\frac{1}{2r}+\frac{\delta}{6}}}{N\cdot 0,4q^{\frac{\delta}{3}}}\cdot q^{\frac{\delta}{6}}\right)=\\
&=\frac{2(NY)^{1+\delta}}{d}\left(1+\frac{5}{4}\left(q^{-\frac{\delta}{12}}+q^{-\frac{1}{2r}}\right)\right) \leqslant \frac{3(NY)^{1+\delta}}{d}.
\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку и оценку (7) в (6), а затем правую часть полученной формулы в (5), последовательно получим

$$W^{2r}(k) \leqslant \frac{3c_1N^{2r-2}}{Y_q^2 d}\left(Z^{-r}d^rq+d^{2r}q^{\frac{1}{2}+\delta}\right)(NY)^{1+\delta}.$$

$$W^{2r} \leqslant \frac{3c_1N^{2r-1+\delta}\,Y^{1+\delta}}{Y_q^2}\left(Z^{-r}d^{r-1}q+d^{2r-1}q^{\frac{1}{2}+\delta}\right)(4\mathscr{L})^{2r}.$$

Далее воспользовавшись леммой 1 и известными неравенствами

$$\omega(q) \leqslant \frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}, \qquad \frac{\varphi(q)}{2q} \leqslant \frac{c_\varphi}{\ln\mathscr{L}},$$

где c_ω и c_φ — абсолютные постоянные, найдем

$$\left|Y_q-\frac{\varphi(q)}{q}Y\right| \leqslant 2^{\omega(q)} \leqslant 2^{\frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}} = q^{\frac{c_\omega\ln 2}{\ln\mathscr{L}}} < \frac{\varphi(q)}{2q}q^{\frac{1}{7}} < \frac{\varphi(q)}{2q}\left[2^{-1}Nq^{-\frac{1}{6}}\right] = \frac{\varphi(q)}{2q}Y,$$

то есть

$$Y_q > \frac{\varphi(q)}{2q}Y \geqslant \frac{c_\varphi Y}{\ln\mathscr{L}}.$$

Пользуясь этим неравенством параметр Y_q выразим через Y. Имеем

$$W^{2r} \leqslant \frac{3c_1N^{2r-1+\delta}}{c_\varphi^2Y^{1-\delta}}\left(Z^{-r}d^{r-1}q+d^{2r-1}q^{\frac{1}{2}+\delta}\right)(4\mathscr{L})^{2r}(\ln\mathscr{L})^2.$$

$$W = 4\left(\frac{3c_1}{c_\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2r}}\;N^{1-\frac{1-\delta}{2r}}Y^{-\frac{1-\delta}{2r}}\left(Z^{-\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}}q^{\frac{1}{2r}}+d^{1-\frac{1}{2r}}q^{\frac{1}{4r}+\frac{\delta}{2r}}\right)\mathscr{L}(\ln\mathscr{L})^{\frac{1}{r}}.$$

Далее имея ввиду, что $Y=\left[2^{-1}Nq^{-\frac{1}{2r}}d\right]$ и $Z=\left[2^{-1-\frac{2}{r-1}}q^{\frac{1}{2r}}d^{-1}\right]$, найдем

$$W\leqslant 4\left(\frac{3c_1}{c_\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2r}}N^{1-\frac{1-\delta}{2r}}\left(3^{-1}Nq^{-\frac{1}{2r}}d\right)^{-\frac{1-\delta}{2r}}\left(\left(4^{-1}q^{\frac{1}{2r}}d^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}}q^{\frac{1}{2r}}+\right.$$

$$\left.+d^{1-\frac{1}{2r}}q^{\frac{1}{4r}+\frac{\delta}{2r}}\right)\mathscr{L}(\ln\mathscr{L})^{\frac{1}{r}}=N^{1-\frac{1}{r}}q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}}d^{1-\frac{1}{r}}\cdot\Delta,$$

$$\Delta=4\left(\frac{3^{2-\delta}c_1}{c_\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2r}}N^{\frac{\delta}{r}}q^{\frac{\delta}{2r}-\frac{\delta}{4r^2}}d^{\frac{\delta}{2r}}\left(2\,q^{-\frac{\delta}{2r}}+1\right)\mathscr{L}(\ln\mathscr{L})^{\frac{1}{r}}.$$

Воспользовавшись соотношением $N<q^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4r}}d^{-\frac{1}{2}}$, имеем

$$\Delta\leqslant 4\left(\frac{3^{2-\delta}c_1}{c_\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2r}}\left(q^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4r}}d^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\delta}{r}}q^{\frac{\delta}{2r}-\frac{\delta}{4r^2}}d^{\frac{\delta}{2r}}\left(2\,q^{-\frac{\delta}{2r}}+1\right)\mathscr{L}(\ln\mathscr{L})^{\frac{1}{r}}=$$

$$=4\left(\frac{3^{2-\delta}c_1}{c_\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2r}}q^{\frac{\delta}{r}}\left(2\,q^{-\frac{\delta}{2r}}+1\right)\mathscr{L}(\ln\mathscr{L})^{\frac{1}{r}}\leqslant 0,5q^{\frac{\delta}{r}}\mathscr{L}^2.$$

Поэтому

$$W\leqslant 0,5N^{1-\frac{1}{r}}q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}}d^{1-\frac{1}{r}}\mathscr{L}^2,$$

Подставляя полученную оценку для W в (4), получим утверждение леммы.

Лемма 8. *Пусть* $(\eta,q)=1$, $y\geqslant q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$, $0,1\leqslant\sigma<0,9$, *тогда*

$$S=\sum_{\substack{x-y<n\leqslant x\\(n,q)=1}}\chi_q(n-\eta)\ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\sqrt{q}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right)<y\leqslant 0,5q$. Воспользовавшись леммой 5 и известным неравенством

$$\omega(q)\leqslant\frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}},$$

где c_ω — абсолютная постоянная, имеем равенство:

$$S\leqslant 2^{\omega(q)}\sqrt{q}\mathscr{L}\leqslant\frac{\sqrt{q}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega\ln 2\ \mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}+2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma+\ln\mathscr{L}\right)}{y}\cdot y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{q}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right)}{y}\cdot y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right)\leqslant y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right).$$

Пусть теперь $q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}\leqslant y\leqslant\sqrt{q}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right)$. Имеем равенство:

$$S=\sum_{x-y<n\leqslant x}\chi_q(n-\eta)\sum_{d\backslash(n,q)}\mu(d)=\sum_{d\backslash q}\mu(d)S(d),\quad S(d)=\sum_{x-y<nd\leqslant x}\chi_q(nd-\eta).$$

Разбивая сумму S на две части, имеем

$$S=S_1+S_2,\qquad S_1=\sum_{\substack{d\backslash q\\d\leqslant\exp(2\mathscr{L})^\sigma}}\mu(d)S(d),\quad S_2=\sum_{\substack{d\backslash q\\\exp(2\mathscr{L})^\sigma<d\leqslant x}}\mu(d)S(d).$$

Для оценки суммы S_2 воспользуемся тривиальной оценкой суммы $S(d)$ и леммой 3. Имеем

$$S_2 \ll \sum_{\substack{d\backslash q\\ \exp(2\mathscr{L})^\sigma < d\leqslant x}} \mu^2(d)\left(\frac{y}{d}+1\right) \ll y \sum_{\substack{d\backslash q\\ \exp(2\mathscr{L})^\sigma < d\leqslant x}} \frac{\mu^2(d)}{d} + \tau(q) \ll$$
$$\ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right) + q^\delta \ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right).$$

Оценим теперь S_1. Для этого оценим $S(d)$, воспользовавшись леммой 7 при

$$M = \left[\frac{x-y}{d}\right], \qquad N = \left[\frac{x}{d}\right] - \left[\frac{x-y}{d}\right] \ll \frac{y}{d},$$

имеем

$$S(d) \ll \left(\frac{y}{d}\right)^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}}\mathscr{L}^2 = y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}}\mathscr{L}^2,$$

Следовательно,

$$S_1 \ll y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}}\mathscr{L}^2 \sum_{\substack{d\backslash q\\ d\leqslant \exp(2\mathscr{L})^\sigma}} \mu^2(d) \ll y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}}\mathscr{L}^2\cdot 2^{\omega(q)} \leqslant$$
$$\leqslant y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}}\mathscr{L}^2\cdot 2^{\frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}} = y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}}\mathscr{L}^2\exp\left(\frac{c_\omega\ln 2\cdot\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right) =$$
$$= y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right)\cdot\left(\frac{q^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4r}+\delta}\mathscr{L}^{2r}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega r\ln 2\cdot\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}} + r\sigma 2^{\sigma-1}\mathscr{L}^\sigma\right)}{y}\right)^{\frac{1}{r}} <$$
$$= y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right)\cdot\left(\frac{q^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4r}+\delta}\mathscr{L}^{2r}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega r\cdot\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right)}{y}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Выбирая $r=[\delta^{-1}]+1$, найдем

$$S_1 \ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right)\cdot\left(\frac{q^{\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\delta}\mathscr{L}^{2r}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega r\cdot\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right)}{y}\right)^{\frac{1}{r}} \ll$$
$$\ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right)\cdot\left(\frac{q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}}{y}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right).$$

Лемма доказана и из этой леммы при $\sigma = 0,6$ следует:

Следствие 1. *Пусть $(\eta,q)=1$, $y<x$ и $y\geqslant q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$, тогда*

$$\sum_{\substack{x-y<n\leqslant x\\ (n,q)=1}} \chi_q(n-\eta) \ll y\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

4. Оценка двойных сумм значений характеров

Лемма 9. *Пусть x, M, N и l — целые числа, $(l,q)=1$, a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\leqslant\tau^c(m)$ и $|b_n|\leqslant\tau^c(m)$, где c — произвольное положительное* *фиксированное число не всё время одно и то же, θ — фиксированное число и $0<\theta\leqslant\frac{1}{12}$. Тогда при $x\geqslant q^{\frac12+\delta+\frac{3}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$ и $q^{\theta}<N\leqslant x^{\frac23}$ справедлива оценка*

$$W=\sum_{M<m\leqslant 2M}a_m\sum_{\substack{N<n\leqslant\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1}}b_n\chi(mn-l)\ll x\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $x>x_0$ и $MN<x<0,1q$. Обозначая в W внутреннюю сумму через $B(m)$ преобразуем в другую так, чтобы интервал суммирования внутренней суммы не зависел от m. Имеем равенство

$$B(m)=\frac1q\sum_{k=0}^{q-1}B(k,m)\sum_{N<r\leqslant\min(xm^{-1},2N)}e\left(-\frac{kr}{q}\right),$$

$$B(k,m)=\sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\(n,q)=1}}b_n\chi_q(mn-l)e\left(\frac{kn}{q}\right).$$

Далее обозначая $N'=\min([xm^{-1}],2N)$, выделяя слагаемое с $k=0$ и суммируя затем по r, получаем:

$$B(m)=\frac{N'-N}{q}B(0,m)+\frac1q\sum_{k=1}^{q-1}B(k,m)\frac{\sin\frac{\pi k(N'-N)}{q}}{\sin\frac{\pi k}{q}}e\left(-\frac{k(N'+1+N)}{2q}\right).$$

Переходя к неравенствам, имеем:

$$|B(m)|\ll\frac{N}{q}\left|B(0,m)\right|+\sum_{k=1}^{q-1}\frac1k\left|B(k,m)\right|\ll\sum_{k=0}^{q-1}\frac{1}{k+1}\left|B(k,m)\right|.$$

Таким образом,

$$|W|=\left|\sum_{M<m\leqslant 2M}a_mB(m)\right|\ll\sum_{k=0}^{q-1}\frac{1}{k+1}\sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}}|a_m|\left|B(k,m)\right|. \qquad (8)$$

Возьмём $r=[(2\theta)^{-1}]+2$ и $H=q^{\frac{1}{2r}-\frac{\delta}{r}}$ и не ограничивая общности будем считать, что $|b_n|\ll\ll\tau^c(n)\ll q^{\frac{\delta}{r}}$. В $B(k,m)$ производя сдвиг интервала суммирования на h, $1\leqslant h\leqslant H$, получим

$$B(k,m)=\sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\(n,q)=1}}b_n\chi_q(mn-l+h)e\left(\frac{k(n+h)}{q}\right)+$$
$$+\sum_{\substack{N<n\leqslant N+h\\(n,q)=1}}b_n\chi_q(mn-l)e\left(\frac{kn}{q}\right)-\sum_{\substack{2N<n\leqslant 2N+h\\(n,q)=1}}b_n\chi_q(mn-l)e\left(\frac{kn}{q}\right).$$

Суммируя это равенство по всем $h\leqslant H$, а затем оценивая две последние суммы тривиально числом слагаемых, имеем

$$|B(k,m)|\ll H^{-1}\left|\sum_{h\leqslant H}\sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\(n,q)=1}}b_n\chi_q(mn-l+h)e\left(\frac{k(n+h)}{q}\right)\right|+Hq^{\frac{\delta}{r}}\ll$$
$$\ll H^{-1}\sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\(n,q)=1}}|b_n|\left|\sum_{h\leqslant H}\chi_q(mn-l+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|+Hq^{\frac{\delta}{r}}.$$

Умножая обе части этого неравенства на функцию a_m, затем суммируя по всем $M < m \leqslant 2M$ и $(m,q)=1$, находим

$$\sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}} |a_m|\,|B(k,m)| \ll W(k) + Hq^{\frac{\delta}{r}} \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}} |a_m|,$$

$$W(k) = H^{-1} \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}} |a_m| \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\(n,q)=1}} |b_n| \left| \sum_{h\leqslant H} \chi_q(mn-l+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|.$$

Подставляя полученную оценку в правую часть (8), найдем

$$|W| \ll \left(\max_{0\leqslant k<q} W(k) + Hq^{\frac{\delta}{r}} \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\(m,q)=1}} \tau^c(m)\right)\mathscr{L} \ll \mathscr{L} \max_{0\leqslant k<q} W(k) + \frac{xH\mathscr{L}^c}{N} q^{\frac{\delta}{r}}, \tag{9}$$

В сумме $W(k)$ делая замену переменного, вместо переменных m и n вводя переменную $\lambda = mn-l$, найдем

$$W(k) = H^{-1} \sum_{\lambda+l=MN}^{4MN} I(\lambda) \left|\sum_{h\leqslant H} \chi_q(\lambda+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|,$$

где

$$I(\lambda) = \sum_{\substack{\lambda+l=mn,\,(mn,q)=1\\ M<m\leqslant 2M,\, N<n\leqslant 2N}} |a_m||b_n| \leqslant \sum_{\lambda+l=mn} |a_m||b_n| \ll \tau^c(\lambda+l).$$

Возведём $W(k)$ в степень r и воспользуемся неравенством Гёльдера и тем, что

$$\sum_{\lambda+l=MN}^{4MN} \tau^c(\lambda+l) = \sum_{n=MN}^{4MN} \tau^c(n) \ll MN\mathscr{L}^c,$$

будем иметь:

$$W^r(k) \leqslant H^{-r}\left(\sum_{\lambda+l=MN}^{4MN} I(\lambda)\right)^{r-1} \sum_{\lambda+l=MN}^{4MN} I(\lambda) \left|\sum_{h\leqslant H} \chi_q(\lambda+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|^r \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(MN\mathscr{L}^c)^{r-1}}{H^r} \sum_{\lambda+l=MN}^{4MN} \tau^c(\lambda+l) \left|\sum_{h\leqslant H} \chi_q(\lambda+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|^r.$$

Возведём обе части последнего неравенства в квадрат, применяя неравенство Коши, а затем воспользовавшись соотношением $4MN < q$, найдем

$$W^{2r}(k) \leqslant \frac{(MN\mathscr{L}^c)^{2r-2}}{H^{2r}} \sum_{\lambda+l=MN}^{4MN} \tau^c(\lambda+l) \sum_{\lambda+l=MN}^{4MN} \left|\sum_{h\leqslant H} \chi_q(\lambda+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|^{2r} \ll$$

$$\leqslant \frac{(MN\mathscr{L}^c)^{2r-1}}{H^{2r}} \sum_{\lambda=0}^{q-1} \left|\sum_{h\leqslant H} \chi_q(\lambda+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|^{2r}.$$

Пользуясь леммой 6 и явным значением параметра H, найдем

$$W^{2r}(k) \leqslant \frac{(MN\mathscr{L}^c)^{2r-1}}{H^{2r}} \cdot c_1\left(H^r q + H^{2r} q^{\frac{1}{2}+\delta}\right) = c_1(MN\mathscr{L}^c)^{2r-1}\left(\frac{q}{H^r} + q^{\frac{1}{2}+\delta}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c_1(x\mathscr{L}^c)^{2r-1}\left(\frac{q}{H^r} + q^{\frac{1}{2}+\delta}\right) = 2c_1 x^{2r-1} q^{\frac{1}{2}+\delta}\mathscr{L}^{(2r-1)c}.$$

Отсюда и из (9), получим

$$W \ll \mathscr{L}\max_{0\leqslant k<q} W(k) + \frac{xH\mathscr{L}^c}{N} q^{\frac{\delta}{r}} \ll x^{1-\frac{1}{2r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{\delta}{2r}}\mathscr{L}^{\left(1-\frac{1}{2r}\right)c+1} + q^{\frac{1}{2r}-\frac{\delta}{r}}\frac{x\mathscr{L}^c}{N} q^{\frac{\delta}{r}} \ll$$
$$\ll x\left(\left(\frac{q^{\frac{1}{2}+\delta}}{x}\right)^{\frac{1}{2r}} + \frac{q^{\frac{1}{2r}}}{N}\right)\mathscr{L}^c = x\left(\left(\frac{q^{\frac{1}{2}+\delta+æ}}{x}\right)^{\frac{1}{2r}} + \frac{q^{æ_1}}{N}\right)\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right),$$
$$æ = \frac{3r}{\sqrt{\mathscr{L}}} + \frac{2rc\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}, \qquad æ_1 = \frac{1}{2r} + \frac{3}{2\sqrt{\mathscr{L}}} + \frac{c\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}.$$

Из определения параметра r и условия $0 < \theta \leqslant \frac{1}{12}$ вытекает неравенства

$$r = [(2\theta)^{-1}] + 2 \leqslant \frac{1}{2\theta} + \frac{1}{6\theta} = \frac{2}{3\,\theta},$$
$$\frac{1}{2r} \leqslant \frac{1}{2(2\theta)^{-1}+2} = \frac{\theta}{1+2\theta} = \theta - \frac{2\theta^2}{1+2\theta} \leqslant \theta - \frac{2\theta^2}{1+2\cdot\frac{1}{6}} = \theta - 1,5\,\theta^2,$$

воспользовавшись которыми оценим сверху величины $æ$ и $æ_1$. Имеем

$$æ = \frac{3r}{\sqrt{\mathscr{L}}} + \frac{2rc\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}} \leqslant \frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}} + \frac{4c\ln\mathscr{L}}{3\theta\,\mathscr{L}} \leqslant \frac{3}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}},$$
$$æ_1 = \frac{1}{2r} + \frac{3}{2\sqrt{\mathscr{L}}} + \frac{c\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}} \leqslant \theta(1-1,5\theta) + \frac{3}{2\sqrt{\mathscr{L}}} + \frac{c\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}} \leqslant \theta.$$

Отсюда при $x \geqslant q^{\frac{1}{2}+\delta+\frac{3}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$ и $N \geqslant q^\theta$, найдем

$$W \ll x\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

5. Доказательство теоремы 1

Не ограничивая общности будем считать, что $x = q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $\varepsilon = \delta + \frac{36}{\sqrt{\mathscr{L}}}$. Поступая аналогично как в работе [12], имеем

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi_q(n-l)\right| \ll \mathscr{L}^6\sum_{k=1}^{3}\max|T_k(\chi_q,M,N)| + \mathscr{L}^2, \tag{10}$$
$$T_k(\chi_q,M,N) = \sum_{\substack{M_1<m_1\leqslant 2M_1\\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\leqslant x,}}\mu(m_1)\cdots\sum_{M_k<m_k\leqslant 2M_k}\mu(m_k)\sum_{\substack{U_1<n_1\leqslant 2N_1\\ (m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k,q)=1}}\cdots\sum_{U_k<n_k\leqslant 2N_k}\chi_q(m_1n_1\cdots m_kn_k-l),$$
$$M_1 \geqslant M_2 \geqslant \cdots \geqslant M_k, \quad N_1 \geqslant N_2 \geqslant \cdots \geqslant N_k \quad N_j \leqslant U_j < 2N_j. \tag{11}$$

Вводим следующие обозначения:

$$\prod_{j=1}^{k} M_jN_j = Y, \qquad \prod_{j=1}^{k} M_jU_j = X, \qquad Y < X \leqslant x, \qquad M_j \leqslant x^{\frac{1}{3}}$$

и будем предполагать далее, что

$$Y \geqslant x \exp\left(-1,2\sqrt{\mathscr{L}}\right), \tag{12}$$

так как в противном случае, оценивая $T_k(\chi_q, M, N)$ тривиально, будем иметь

$$T_k(\chi_q, M, N) \ll \sum_{X<n\leqslant 2^k Y} \tau_{2k}(n) \ll \mathscr{L}^{2k-1} \exp\left(-1,2\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll x\mathscr{L}^{-6} \exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Суммы $T_k(\chi_q, M, N)$, $k = 1, 2, 3$ оцениваются почти одинаково. Остановимся на оценке суммы $T_3(\chi_q, M, N)$ и рассмотрим следующие возможные случаи значений параметра N_1:

1. $N_1 > q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$;
2. $q^{\frac{1}{12}} < N_1 \leqslant q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$;
3. $N_1 \leqslant q^{\frac{1}{12}}$.

Для рассмотрений случаев 1 и 2 сумму $T_3(\chi_q, M, N)$ несколько преобразуем и запишем её в виде

$$T_3(\chi_q, M, N) = \sum_{XU_1^{-1}<h\leqslant 2^5 YN_1^{-1}} a_h \sum_{\substack{U_1<n\leqslant 2N_1 \\ hn\leqslant x,\, (hn,q)=1}} \chi_q(hn-l), \quad |a_h| \leqslant \tau_5(h), \quad XU_1^{-1} \geqslant YN_1^{-1},$$

и интервал суммирования $XU_1^{-1} < h \leqslant 2^5 YN_1^{-1}$ разобьём на интервалы вида $H < h \leqslant 2H$. Получим не более пяти сумм вида

$$T_3(\chi_q, M, N, H) = \sum_{H<h\leqslant 2H} a_h \sum_{\substack{U_1<n\leqslant \min(xh^{-1}, 2N_1) \\ (hn,q)=1}} \chi_q(hn-l). \tag{13}$$

Случай 1. $N_1 > q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$**.** Определяя h_q^{-1} из сравнения $hh_q^{-1} \equiv 1 \pmod q$, найдём

$$T_3(\chi_q, M, N, H) = \sum_{H<h\leqslant 2H} a_h \chi_q(h) \sum_{\substack{U_1<n\leqslant \min(xh^{-1}, 2N_1) \\ (n,q)=1}} \chi_q(n - lh_q^{-1}).$$

Переходя к оценке, находим

$$|T_3(\chi_q, M, N, H)| \leqslant \sum_{\substack{H<h\leqslant 2H \\ (h,q)=1}} \tau_5(h) \left| \sum_{\substack{U_1<n\leqslant \min(xh^{-1}, 2N_1) \\ (n,q)=1}} \chi_q(n - lh_q^{-1}) \right|.$$

Применяя к сумме по n следствие 1 при $\eta = lh_q^{-1}$, $x = \min(xh^{-1}, 2N_1)$, $y = \min(xh^{-1}, 2N_1) - U_1 \leqslant N_1$, имеем

$$T_3(\chi_q, M, N) \ll \sum_{\substack{H<h\leqslant 2H \\ (h,q)=1}} \tau_5(h)\ N_1 \exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll H\mathscr{L}^4\ N_1 \exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll$$
$$\ll YN_1^{-1}\mathscr{L}^4\ N_1 \exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll x\mathscr{L}^4 \exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll x \exp\left(-1,4\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Случай 2. $q^{\frac{1}{12}} < N_1 \leqslant q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$**.** Полагая в сумме $T_3(\chi_q, M, N, H)$ $b_n = 0$ при $N_1 < n \leqslant U_1$ а $b_n = 1$ при $U_1 < n \leqslant \min(xh^{-1}, 2N_1)$, представим её в виде

$$T_3(\chi_q, M, N, H) = \sum_{H<h\leqslant 2H} a_h \sum_{\substack{N_1<n\leqslant\min(xh^{-1},2N_1)\\(hn,q)=1}} b_n\chi_q(hn-l)$$

и воспользуемся леммой 9 при $M = H$, $N = N_1$ и $\theta = \frac{1}{12}$. Тогда при $x \geqslant q^{\frac{1}{2}+\delta+\frac{36}{\sqrt{\mathscr{L}}}}$ имеем

$$T_3(\chi_q, M, N, H) \ll x \exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Случай 3. $N_1 \leqslant q^{\frac{1}{12}}$. Сумму $T_3(\chi_q, M, N)$ преобразуем и запишем её в виде:

$$T_3(\chi_q, M, N) = \sum_{XM_1^{-1}<h\leqslant 2^5YM_1^{-1}} a_h \sum_{\substack{M_1<m\leqslant 2M_1\\hm\leqslant x,\ (hm,q)=1}} \mu(m_1)\chi_q(hm-l) \quad |a_h| \leqslant \tau_5(h).$$

Разобьём интервал суммирования $XM_1^{-1} < h \leqslant 2^5YM_1^{-1}$ на интервалы вида $H < h \leqslant 2H$. Получим не более пяти сумм вида

$$T_3(\chi_q, M, N, H) = \sum_{H<h\leqslant 2H} a_h \sum_{\substack{M_1<n\leqslant\min(xh^{-1},2M_1)\\(hm,q)=1}} \mu(m)\chi_q(hm-l).$$

Воспользовавшись соотношениями (11), (12) и условиями рассматриваемого случая, имеем

$$M_1 \geqslant (M_1M_2M_3)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{Y}{N_1N_2N_3}\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant \frac{Y^{\frac{1}{3}}}{N_1} \geqslant \frac{\left(x\exp\left(-1,2\sqrt{\mathscr{L}}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{N_1} =$$
$$= \frac{1}{N_1}\cdot q^{\frac{1}{6}+\frac{\delta}{3}+\frac{11,6}{\sqrt{\mathscr{L}}}} > q^{\frac{1}{6}+\frac{\delta}{3}+\frac{11,6}{\sqrt{\mathscr{L}}}-\frac{1}{12}} = q^{\frac{1}{12}+\frac{\delta}{3}+\frac{11,6}{\sqrt{\mathscr{L}}}}, \qquad M_1 \leqslant x^{\frac{1}{3}} = q^{\frac{1}{6}+\frac{\delta}{3}+\frac{8}{\sqrt{\mathscr{L}}}}.$$

Отсюда следует, что при $M = H$, $N = M_1$, $\theta = \frac{1}{12}$ для суммы $T_3(\chi_q, M, N, H)$ выполняются условия леммы 9. Согласно этой теоремы, при $x \geqslant q^{\frac{1}{2}+\delta+\frac{36}{\sqrt{\mathscr{L}}}}$ получим

$$T_3(\chi_q, M, N, H) \ll x \exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Из полученных оценок $T_k(\chi_q, M, N)$, $k = 1, 2, 3$, ввиду (10), получим утверждение теоремы.

6. Заключение

Работа посвящена выводу нетривиальной оценки модуля суммы значений примитивного характера Дирихле χ по модулю свободного от кубов q на последовательности сдвинутых простых чисел $p - l$, $(l, q) = 1$, $p \leqslant x$, при $x \geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Полученная оценка обобщает известную оценку А.А. Карацубы, для случая, когда модуль характера является простым числом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР. 1952.

2. Виноградов И. М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ // Известия АН СССР, сер. матем. 1952. Т. 16. С. 197–210.

3. Виноградов И. М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ // Известия АН СССР, сер. матем. 1953. Т. 17, С. 285–290.

4. Карацуба А. А. О суммах характеров с простыми числами // ДАН СССР. 1970. Т. 190. №3. С. 517–518.

5. Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами // Известия АН СССР, сер. матем. 1970. Т. 34. С. 299–321.

6. Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле // УМН. 1986. Т. 41. №1. С. 201–202.

7. Рахмонов З. Х. Об опенке суммы характеров с простыми числами // ДАН Таджикский ССР. 1986. Т. 29. №1. С. 16–20.

8. Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды Математического института РАН. 1994. Т. 207. С. 286–296.

9. Дж. Б. Фридландера, К. Гонг, И. Е. Шпарлинский Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Матем. заметки. 2010. Т. 88. В. 4. С. 605–619.

10. Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. №1. С. 5–9.

11. Рахмонов З. Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика 2013. Т. 13. Вып. 4(2). С. 113-–117.

12. Рахмонов З. Х. Суммы характеров с простыми числами // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15 . В. 2(50). С. 73–100.

13. Burgess D, A. On character sums and L — series // Proc. London Math. Soc. 1962, v. 12, no 3, pp. 193–206.

14. Burgess D, A. On character sums and L — series. II // Proc. London Math. Soc. 1963, v. 13, no 3, pp. 524–536.

15. Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. 1939. Т. 22, №7. 391–393.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. 1985, “Selected work”, *Berlin-New York: Springer-Verlag*, 401 p.

2. Vinogradov I. M. 1952, , “New approach to the estimation of a sum of values of $\chi(p + k)$”, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 16, no 3, pp. 197—210

3. Vinogradov I. M. 1953, “Improvement of an estimate for the sum of the values $\chi(p+k)$”, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.,* vol. 17, no 4, pp. 285—290.

4. Karatsuba A. A. 1970, “On sums of characters with primes”, *Sov. Math. Dokl.,* vol. 11, pp. 135–137.

5. Karatsuba A. A. 1970, “Sums of characters over prime numbers” *Math. USSR-Izv.,* vol. 4, no 2, pp. 303–326. doi.org/10.1070/IM1970v004n02ABEH000907.

6. Rakhmonov Z. Kh. 1986, "On the distribution of values of Dirichlet characters", *Russian Math. Surveys,* vol. 41, no 1, pp. 237–238. doi:10.1070/RM1986v041n01ABEH0032.

7. Rakhmonov Z. Kh. 1986, "Estimation of the sum of characters with primes" *Dokl. Akad. Nauk Tadzhik. SSR,* vol 29, no. 1, pp. 16–20 (in Russian).

8. Rakhmonov Z. Kh., 1995, "On the distribution of the values of Dirichlet characters and their applications", *Proc. Steklov Inst. Math.,* vol. 207, no. 6, pp. 263–272.

9. Fridlander Dzh. B., Gong K., & Shparlinskii I. E., 2010, "Character sums over shifted primes", *Math. Notes,* vol. 88, no 3–4, pp. 585–598. doi:10.1134/S0001434610090312.

10. Rakhmonov Z. Kh., 2013, "Distribution of values of Dirichlet characters in the sequence of shifted primes", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, no. 1, pp. 5–9.

11. Rakhmonov Z. Kh., 2013, "Distribution of values of Dirichlet characters in the sequence of shifted primes", *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, no 4(2), pp. 113–117.

12. Rakhmonov Z. Kh., 2014, "Sums of characters over prime numbers", *Chebyshevskii Sb.* vol. 15, no 2, pp. 73–100.

13. Burgess D. A. 1962, "On character sums and L — series", *Proc. London Math. Soc.*, vol. s3-12, no 1, pp. 193–206. doi:10.1112/plms/s3-12.1.193.

14. Burgess D. A. 1963, "On character sums and L — series. II", *Proc. London Math. Soc.*, vol. s3-13, no. 1, pp. 524–536. doi:10.1112/plms/s3-13.1.524.

15. Mardjhanashvili K. K. 1939, "An estimate for an arithmetic sum", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 22, no 7, pp. 391–393.

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан.
Получено 09.12.2015 г.
Принято в печать 10.03.2016 г.