

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 4.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-137-190

Об одном распределении, связанном с рядами Фарея¹

М. А. Королёв

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, профессор РАН, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

Аннотация

В настоящей работе методом, принадлежащим Ф. Бока, К. Кобели и А. Захареску (2001) исследуются некоторые арифметические свойства дробей Фарея. Пусть $D \geq 2$ - фиксированное целое число, Φ_Q - классический ряд Фарея порядка Q . Раскрасим в красный цвет те дроби ряда Φ_Q , знаменатели которых кратны D . Далее, выберем из промежутков с раскрашенными концами те, что содержат внутри себя лишь дроби, знаменатели которых не делятся на D . Каковы предельные (при $Q \rightarrow +\infty$) доли $\nu(r; D)$ таких промежутков, заключающих внутри ровно r дробей ряда Φ_Q , в общем числе рассматриваемых промежутков ($r = 1, 2, 3, \dots$)?

Формула для этой доли была найдена, по сути, К. Кобели, М. Выжийту и А. Захареску (2014), поскольку могла быть выведена как следствие полученного ими общего результата. Однако формула трёх авторов выражает искомую долю через сумму площадей фигур, связанных с некоторым геометрическим преобразованием треугольника Фарея - подобласти единичного квадрата вида $x + y > 1$, $0 < x, y \leq 1$. В настоящей работе даётся вывод явной формулы, выражающей доли $\nu(r; D)$ в случаях $D = 2, 3$ через величину r , $r = 1, 2, 3, \dots$.

Ключевые слова: ряд Фарея, дроби Фарея, треугольник Фарея, арифметические свойства, распределение, BCZ -преобразование

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

М. А. Королёв. Об одном распределении, связанном с рядами Фарея // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 137–190.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-137-190

A distribution related to Farey series

M. A. Korolev

Korolev Maxim Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

¹Исследование выполнено в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00001, <https://rscf.ru/project/19-11-00001/>.

Abstract

We study some arithmetical properties of Farey fractions by the method introduced by F. Boca, C. Cobeli and A. Zaharescu (2001). Suppose that $D \geq 2$ is a fixed integer and denote by Φ_Q the classical Farey series of order Q . Now let us colour to the red the fractions in Φ_Q with denominators divisible by D . Consider the gaps in Φ_Q with coloured endpoints, that do not contain the fractions a/q with $D|q$ inside. The question is to find the limit proportions $\nu(r; D)$ (as $Q \rightarrow +\infty$) of such gaps with precisely r fractions inside in the whole set of the gaps under considering ($r = 1, 2, 3, \dots$).

In fact, the expression for this proportion can be derived from the general result obtained by C. Cobeli, M. Văjăitu and A. Zaharescu (2014). However, such formula expresses $\nu(r; D)$ in the terms of areas of some polygons related to some geometrical transform of «Farey triangle», that is, the subdomain of unit square defined by $x + y > 1$, $0 < x, y \leq 1$. In the present paper, we obtain the precise formulas for $\nu(r; D)$ (in terms of the parameter r , $r = 1, 2, 3, \dots$) for the cases $D = 2, 3$.

Keywords: Farey series, Farey fractions, Farey triangle, arithmetical properties, distribution, BCZ-transform

Bibliography: 21 titles.

For citation:

М. А. Королёв, 2023, “A distribution related to Farey series”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 137–190.

Моим незабвенным учителям по СУНЦ МГУ (1993-1995)

1. Введение

Пусть $Q \geq 1$. Рядом Фарея Φ_Q порядка Q называется множество упорядоченных по возрастанию дробей вида a/q , где $0 \leq a \leq q \leq Q$, Н.О.Д. $(a, q) = 1$. Ряды Фарея возникают в самых разных задачах теории чисел и давно стали объектом всестороннего исследования. Литература, посвящённая рядам Фарея, весьма обширна. По этой причине мы ограничимся лишь указанием на обзор [1] (2003 г.). Работы, вышедшие после его публикации, частично отражены в библиографиях цитируемых ниже статей [2]–[12].

Большой интерес представляют статистические закономерности, связанные с этим рядом. Примером служат различные задачи о распределении в Φ_Q дробей, знаменатели которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям с разностью $D \geq 2$ (см. [2]–[13]). Одна из них состоит в следующем. Пусть $r \geq 1$ - фиксированное целое число, $\bar{c} = (c_1, \dots, c_r)$ - целочисленный набор с условиями $0 \leq c_1, \dots, c_r \leq D - 1$. Обозначим через $N(Q; r, D, \bar{c})$ количество кортежей из r последовательных дробей ряда Φ_Q вида

$$\frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2} < \dots < \frac{a_r}{q_r}$$

с условиями $q_s \equiv c_s \pmod{D}$, $s = 1, 2, \dots, r$, а через $N(Q)$ - число дробей в Φ_Q . В 2012 г. К. Кобели, М. Выжийту и А. Захареску [8] доказали, что при любых фиксированных r , D и $\bar{c}$ существует предел

$$\varrho(r, D, \bar{c}) = \lim_{Q \rightarrow +\infty} \frac{N(Q; r, D, \bar{c})}{N(Q)}$$

и указали общую формулу для него².

²Фактически этот результат был опубликован ещё в 2005 г.; см. [4]. Обозначения авторов отличаются от используемых здесь: $\# \mathfrak{F}_Q$ вместо $N(Q)$, $\mathbf{N}_Q^r(\mathbf{c}, \mathfrak{d})$ вместо $N(Q; r, D, \bar{c})$, $\rho^r(\mathbf{c}, \mathfrak{d})$ - вместо $\varrho(r, D, \bar{c})$.

Основным инструментом при выводе такой формулы стало преобразование T треугольника

$$\mathcal{T} = \{(x, y) : 0 < x, y \leq 1, x + y > 1\}$$

в себя, заданное формулой

$$T(x, y) = \left(y, \left[\frac{1+x}{y} \right] y - x \right).$$

Треугольник $\mathcal{T}$ иногда называют *треугольником Фарея*, а преобразование T - *BCZ-преобразованием* (по начальным буквам фамилий авторов, впервые его рассмотревших, см. [13]).

Задавшись целым $k \geq 1$, определим (следуя [13]) $\mathcal{T}(k)$ как множество точек (x, y) треугольника Фарея с условием $[(1+x)/y] = k$. Далее, имея целые числа $k_1, k_2, \dots, k_r \geq 1$, определим область

$$\mathcal{T}(k_1, k_2, \dots, k_r) = \mathcal{T}(k_1) \cap T^{-1}\mathcal{T}(k_2) \cap \dots \cap T^{-(r-1)}\mathcal{T}(k_r),$$

которая либо пуста, либо является выпуклым многоугольником. Упомянутая выше формула для величины $\varrho(r, D, \bar{c})$ содержит сумму (вообще говоря, бесконечную) площадей фигур $\mathcal{T}(k_1, k_2, \dots, k_r)$ по всем целочисленным наборам $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r)$, принадлежащим некоторому множеству. Использование такой формулы для вычисления доли $\varrho(r, D, \bar{c})$ при конкретных значениях $r, D, \bar{c}$, как правило, весьма затруднительно. Примеры таких вычислений для ряда частных случаев общей задачи содержатся в [8] (см. §8 настоящей работы).

Обозначим через $N(Q; r, D)$ число кортежей из $(r+2)$ последовательных дробей ряда Φ_Q вида

$$\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \dots < \frac{a_r}{q_r} < \frac{a_{r+1}}{q_{r+1}}, \quad (1)$$

таких, что $q_0, q_{r+1} \equiv 0 \pmod{D}$ и $q_i \not\equiv 0 \pmod{D}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Условимся всюду далее рассматривать ряд Φ_Q «по модулю 1», т.е. станем отождествлять дроби a/q и $n + a/q$, где n - произвольное целое число. Соответственно, в $N(Q; r, D)$ будем учитывать лишь те кортежи (1), для которых $a_0/q_0 > 0$, включая, однако, в их число и те, в которых одна из дробей a_i/q_i совпадает с единицей.

Положим, далее, $N(Q; D)$ равным числу всех дробей в Φ_Q , знаменатели которых кратны D , и рассмотрим отношение $\nu(Q; r, D) = N(Q; r, D)/N(Q; D)$. В силу результата Кобели, Выхийту и Захареску [8], величины $\nu(Q; r, D)$ стремятся с ростом Q к предельному значению $\nu(r, D)$, которое с точностью до зависящего от D множителя совпадает с суммой величин $\varrho(r+2, D, \bar{c})$ по всем наборам $\bar{c} = (c_0, \dots, c_{r+1})$ с условиями $c_0, c_{r+1} \equiv 0 \pmod{D}$, $c_s \not\equiv 0 \pmod{D}$, $s = 1, 2, \dots, r$ (см. §6).

Подсчёты, проведённые для $Q = 3 \cdot 10^5$ (что отвечает значению $N(Q; 3) = 68\,395\,970$), дают следующие приближённые значения долей $\nu(Q; r, 3)$ при небольших r :

r	$N(Q; r, 3)$	$\nu(Q; r, 3)$	r	$N(Q; r, 3)$	$\nu(Q; r, 3)$
1	11 982 989	0.17520 02201	8	390 976	0.00571 63602
2	25 653 970	0.37506 84726	9	347 028	0.00507 38077
3	14 259 027	0.20847 75901	10	236 232	0.00345 38877
4	6 293 540	0.09201 62401	11	171 556	0.00250 82764
5	4 843 722	0.07081 88216	12	127 068	0.00185 78288
6	2 482 708	0.03629 90393	13	82 264	0.00120 27609
7	953 418	0.01393 96810	14	83 750	0.00122 44874

Цель настоящей статьи - дать вывод явных формул для величин $\nu(r) = \nu(r; 3)$, $r = 1, 2, 3, \dots$. Именно, справедливы следующие утверждения:

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место равенства*

$$\nu(1; 3) = 6 - 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\right) = 0.17517\,66941\dots,$$

$$\nu(2; 3) = 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right) - \frac{87}{35} = 0.37503\,40165\dots,$$

$$\nu(3; 3) = 12 \ln 3 - \frac{53\,132}{4095} = 0.20850\,00891\dots,$$

$$\nu(4; 3) = \frac{528\,904}{45\,045} - 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\right) = 0.09203\,39300\dots,$$

$$\nu(5; 3) = 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right) - \frac{4\,164\,383}{3\,063\,060} = 0.07082\,42239\dots,$$

$$\nu(6; 3) = \frac{3\,089}{85\,085} = 0.0363048715989892\dots, \quad \nu(7; 3) = \frac{54\,097}{3\,879\,876} = 0.01394\,29713\dots$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $m \geq 1$, $0 \leq i \leq 4$ - целые числа, $r = 5m + i \geq 8$. Тогда справедливы равенства*

$$\nu(r; 3) = \sum_{j=1}^n P_{ij}(m), \quad \text{в которых} \quad n = n(i) = \begin{cases} 3, & \text{если } i = 3, \\ 2, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

а $P_{ij}(m)$ - рациональные функции из следующего списка:

$$P_{01}(m) = \frac{6(8m-1)}{(3m-1)(6m-1)(12m-1)(12m+1)}, \quad P_{02}(m) = \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m-1)},$$

$$P_{11}(m) = \frac{6(8m+1)}{(3m+1)(6m+1)(12m-1)(12m+1)}, \quad P_{12}(m) = \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m+1)},$$

$$P_{21}(m) = \frac{6(4m+1)}{(3m+1)(6m+1)(12m+1)(12m+5)},$$

$$P_{22}(m) = \frac{2(9m+4)}{3(2m+1)(3m+1)(6m+1)(12m+7)},$$

$$P_{31}(m) = \frac{6(2m+1)}{(3m+1)(3m+2)(12m+5)(12m+7)}, \quad P_{32}(m) = \frac{2}{3(2m+1)(6m+1)(12m+5)},$$

$$P_{33}(m) = \frac{2}{3(2m+1)(6m+5)(12m+7)},$$

$$P_{41}(m) = \frac{6(4m+3)}{(3m+2)(6m+5)(12m+7)(12m+11)},$$

$$P_{42}(m) = \frac{2(9m+5)}{3(2m+1)(3m+2)(6m+5)(12m+5)}.$$

В частности, имеют место равенства:

$$\nu(8; 3) = \frac{12\,797}{2\,238\,390} = 0.00571\,70555\dots \quad \nu(12; 3) = \frac{11\,402}{6\,135\,675} = 0.00185\,83122\dots$$

$$\nu(9; 3) = \frac{18\,662}{3\,677\,355} = 0.00507\,48431\dots \quad \nu(13; 3) = \frac{100\,349}{83\,445\,180} = 0.00120\,25739\dots$$

$$\begin{aligned}\nu(10; 3) &= \frac{284}{82\,225} = 0.00345\,39373\dots & \nu(14; 3) &= \frac{3\,931}{3\,209\,430} = 0.00122\,48280\dots \\ \nu(11; 3) &= \frac{1\,444}{575\,575} = 0.00250\,87955\dots & \nu(15; 3) &= \frac{1\,607}{1\,673\,140} = 0.00096\,04695\dots\end{aligned}$$

Следствиями этих теорем оказываются два неожиданных факта. Во-первых, все числа $\nu(r)$ при $r \geq 6$ оказываются рациональными, в то время как числа $\nu(r)$, $1 \leq r \leq 5$ - трансцендентны. Именно, при $r = 1, 2, 4, 5$ они являются линейными комбинациями с алгебраическими коэффициентами чисел 1 и πi и $\ln 3$, и их трансцендентность следует из результатов А. Бейкера (см. [14, теоремы 2.1, 2.2]). Трансцендентность $\nu(3)$ является следствием теоремы Ф. Линдемана (см. [15]).

Во-вторых, величина $\nu(r)$ как функция r не является монотонно убывающей. Например, оказывается, что

$$\nu(2) > \nu(3) > \nu(1), \quad \nu(14) > \nu(13), \quad \nu(19) > \nu(18), \quad \nu(29) > \nu(30) > \nu(28)$$

и т.д. Вместе с тем, монотонность $\nu(r)$ сохраняется внутри каждой из прогрессий $r \pmod{5}$.

2. Дроби Фарея и точки в многоугольных областях

Для удобства читателя приведём краткое изложение вывода формул для величин $\nu(r; D)$, следующее методу работы [8]. Необходимость такого изложения вызвана ещё и тем, что оно позволит сформулировать нужные нам результаты [8] и их следствия в виде, наиболее удобном для явного вычисления долей $\nu(r; D)$.

Пусть $Q \geq 2$ и $q/a < a'/q' < a''/q''$ - соседние дроби ряда Φ_Q . Вычитая равенство $a''q' - a'q'' = 1$ из равенства $a'q - aq' = 1$, получим: $(a + a'')q' = a'(q + q'')$, откуда, ввиду взаимной простоты a' и q' заключаем: $q + q'' = kq'$, где k - целое число. Поскольку $kq' - q = q'' \leq Q$, то $k \leq (q + Q)/q'$. Вместе с тем, для знаменателей соседних дробей Фарея имеем: $q + q'' > Q$ или, что то же, $(k + 1)q' - q > Q$, откуда $k + 1 > (q + Q)/q'$. Следовательно,

$$k = \left\lfloor \frac{q + Q}{q'} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1 + q/Q}{q'/Q} \right\rfloor. \quad (2)$$

Применяя к точке $(x, y) = (q/Q, q'/Q)$ треугольника Фарея BCZ -преобразование, получим:

$$T\left(\frac{q}{Q}, \frac{q'}{Q}\right) = \left(\frac{q'}{Q}, \left\lfloor \frac{1 + q/Q}{q'/Q} \right\rfloor \frac{q'}{Q} - \frac{q}{Q}\right) = \left(\frac{q'}{Q}, \frac{kq' - q}{Q}\right) = \left(\frac{q'}{Q}, \frac{q''}{Q}\right).$$

Следовательно, если

$$\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \dots < \frac{a_r}{q_r} < \frac{a_{r+1}}{q_{r+1}} \quad (3)$$

- произвольный набор соседних дробей ряда Фарея Φ_Q , то

$$T^2\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = \left(\frac{q_2}{Q}, \frac{q_3}{Q}\right), \quad T^3\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = \left(\frac{q_3}{Q}, \frac{q_4}{Q}\right), \dots, T^r\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = \left(\frac{q_r}{Q}, \frac{q_{r+1}}{Q}\right). \quad (4)$$

Полагая $k_i = [(q_{i-1} + Q)/q_i]$, получим цепочку равенств

$$\begin{cases} q_0 + q_2 = k_1 q_1, \\ q_1 + q_3 = k_2 q_2, \\ \dots \\ q_{r-1} + q_{r+1} = k_r q_r \end{cases} \quad \text{или, что то же,} \quad \begin{cases} k_1 q_1 - q_2 = q_0, \\ -q_1 + k_2 q_2 - q_3 = 0, \\ \dots \\ -q_{r-1} + k_r q_r = q_{r+1}, \end{cases} \quad (5)$$

которую можно рассматривать как систему уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} k_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & k_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k_3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & k_r \end{pmatrix}$$

и неизвестными $q_1, \dots, q_r$. Определитель такой матрицы станем обозначать через $\mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r)$ или, короче, через $\mathbb{K}(k_1, \dots, k_r)$. Несложно проверить следующие свойства этих определителей:

$$\mathbb{K}_1(k_1) = k_1, \quad \mathbb{K}_2(k_1, k_2) = k_1 k_2 - 1; \quad (6)$$

$$\mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) = k_r \mathbb{K}_{r-1}(k_1, \dots, k_{r-1}) - \mathbb{K}_{r-2}(k_1, \dots, k_{r-2}), \quad r \geq 3; \quad (7)$$

$$\mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r + 1) = \mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) + \mathbb{K}_{r-1}(k_1, \dots, k_{r-1}), \quad r \geq 1. \quad (8)$$

Величины $\mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r)$ являются т.н. *модифицированными континуантами* (см. [16, с. 133]). Для них, в частности, справедливы тождества

$$\mathbb{K}_r(k_r, \dots, k_1) = \mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r); \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{r+s}(k_1, \dots, k_{r+s}) &= \\ &= \mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) \mathbb{K}_s(k_{r+1}, \dots, k_{r+s}) - \mathbb{K}_{r-1}(k_1, \dots, k_{r-1}) \mathbb{K}_{s-1}(k_{r+2}, \dots, k_{r+s}), \end{aligned} \quad (10)$$

аналогичные тождествам (6.131), (6.133) из [17, Раздел 6.7], а также равенство

$$\mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) \mathbb{K}_r(k_2, \dots, k_{r+1}) - \mathbb{K}_{r-1}(k_2, \dots, k_r) \mathbb{K}_{r+1}(k_1, \dots, k_{r+1}) = 1, \quad (11)$$

которое доказывается индукцией по r с использованием (6) и (7) (также см., напр., [18, §§2.2, 2.3]).

Пользуясь формулами (6), (7), из системы (5) последовательно находим:

$$q_{i+1} = q_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) - q_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i). \quad (12)$$

Определим теперь $\mathcal{A}_r(D)$ как множество наборов $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ натуральных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) \not\equiv 0 \pmod{D}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1, \quad \mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) \equiv 0 \pmod{D}. \quad (13)$$

Если зафиксировать набор $\mathbf{k}$ из $\mathcal{A}_r(D)$ и числа q_0, q_1 с условиями

$$q_0 \equiv 0 \pmod{D}, \quad \text{Н.О.Д.}(q_0, q_1) = 1,$$

то для чисел q_i , удовлетворяющих системе (5), в силу (12) будем иметь:

$$q_i \not\equiv 0 \pmod{D}, \quad i = 2, 3, \dots, r, \quad q_{r+1} \equiv 0 \pmod{D}. \quad (14)$$

Верно и обратное: если дроби (3) отвечают набору $\mathbf{k}$ и при этом выполняются условия (14), то справедливы соотношения (13) или, что то же, $\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r(D)$.

Равенства (4) фактически означают, что параметр Q и пара знаменателей соседних дробей порождают цепочки знаменателей $q_2, q_3, \dots$ и целых чисел $k_1, k_2, \dots$. Приведём теперь условие, которому должны удовлетворять величины q_0 и q_1 , чтобы порождённый ими ряд знаменателей $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{r+1}$ отвечал условию (14).

ЛЕММА 1. Пусть $Q > r \geq 1$ и пусть $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathcal{A}_r(D)$. Для существования в ряде Фарей Φ_Q кортежа (3) из $(r+2)$ последовательных дробей, отвечающих набору $\mathbf{k}$, необходимо и достаточно существования пары натуральных чисел q_0 и q_1 с условиями

$$1 \leq q_0, q_1 \leq Q, \quad q_0 + q_1 > Q, \quad (q_0, q_1) = 1, \quad q_0 \equiv 0 \pmod{D}$$

таких, что для каждого i , $1 \leq i \leq r$, выполняются неравенства

$$\frac{Q + q_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_{i-1}, k_i + 1)}{\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1)} < q_1 \leq \frac{Q + q_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_{i-1}, k_i)}{\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i)}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть дроби (3) отвечают набору $\mathbf{k}$. Тогда числа $q_0, q_1, \dots, q_r, q_{r+1}$ удовлетворяют системе (5) и для них справедливы равенства (12). Условие $q_{i+1} \leq Q$ приводит к искомой верхней оценке q_1 . Аналогично, соотношение (8) наряду с (12) влечёт тождество

$$q_{i+1} + q_i = q_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i + 1) - q_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i + 1),$$

из которого с помощью неравенства $q_{i+1} + q_i > Q$, получается нижняя оценка q_1 .

Достаточность. Пусть q_0, q_1 - числа с требуемыми свойствами. Определим величины $q_2, \dots, q_{r+1}$ из системы (5) (или, что то же, по формулам (12)). Тогда из условия леммы и тождества (8) для каждого i , $1 \leq i \leq r$, получим:

$$q_i \leq Q, \quad q_i + q_{i+1} > Q.$$

Далее, подберём числа a_0 и a_1 так, чтобы дроби a_0/q_0 и a_1/q_1 были соседними в Φ_Q и при этом выполнялись неравенства $0 < a_0/q_0 < 1$. Ввиду условия $q_0 \equiv 0 \pmod{D}$ имеем $q_0 \geq D > 1$. Тогда из равенства $a_1 q_0 - a_0 q_1 = 1$ заключаем: $a_0 \equiv -q_1^* \pmod{q_0}$. Последнее сравнение наряду с неравенствами $1 \leq a_0 \leq q_0 - 1$ определяет a_0 однозначно, так что остаётся лишь положить $a_1 = (a_0 q_1 + 1)/q_0$. Имея пару a_0, a_1 и набор $\mathbf{k}$, составим систему

$$\begin{cases} a_0 + a_2 = k_1 a_1, \\ a_1 + a_3 = k_2 a_2, \\ \dots \\ a_{r-1} + a_{r+1} = k_r a_r \end{cases}$$

с неизвестными $a_2, a_3, \dots, a_{r+1}$. Подобно (12), находим:

$$a_{i+1} = a_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) - a_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i). \quad (16)$$

Пользуясь (11), (12) и (16), убеждаемся, что

$$a_{i+1} q_i - a_i q_{i+1} = 1. \quad (17)$$

Составим теперь дроби a_i/q_i . В силу (17), они несократимы и $a_i/q_i < a_{i+1}/q_{i+1}$ для всех i . Ввиду неравенств $q_i \leq Q$ все эти дроби принадлежат ряду Φ_Q (по модулю 1). Наконец, ввиду неравенств $q_i + q_{i+1} > Q$ между a_i/q_i и a_{i+1}/q_{i+1} нет других дробей из Φ_Q . Поэтому построенные дроби действительно образуют кортеж из $(r+2)$ последовательных дробей ряда Φ_Q с требуемыми свойствами. Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть $r \geq 1$, $k_1, \dots, k_r \geq 1$ - произвольные целые числа. Тогда область $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ задаётся системой неравенств

$$0 < x, y \leq 1, \quad x + y > 1, \quad f_i(x; k_1, \dots, k_i) < y \leq g_i(x; k_1, \dots, k_i), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

где

$$f_i(x; k_1, \dots, k_r) = \frac{1 + \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i + 1)x}{\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i + 1)}, \quad g_i(x; k_1, \dots, k_r) = \frac{1 + \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i)x}{\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $r = 1$ область $\mathcal{T}(k_1)$ определяется условием

$$\left[\frac{1+x}{y} \right] = k_1, \quad \text{т.е. неравенствами} \quad k_1 \leq \frac{1+x}{y} < k_1 + 1.$$

Последние же приводятся к виду

$$\frac{1+x}{k_1+1} < y \leq \frac{1+x}{k_1}.$$

Замечая, что

$$f_1(x; k_1) = \frac{1+x}{k_1+1}, \quad g_1(x; k_1) = \frac{1+x}{k_1},$$

приходим к искомому утверждению.

Предположим, что утверждение леммы справедливо для всех r , $1 \leq r \leq m$, и докажем его для $r = m+1$. Пусть (x, y) - произвольная точка области

$$\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r) = \mathcal{T}(k_1) \cap T^{-1}\mathcal{T}(k_2) \cap \dots \cap T^{-(m-1)}\mathcal{T}(k_m) \cap T^{-m}\mathcal{T}(k_{m+1}).$$

Тогда $(x, y) \in T^{-i}\mathcal{T}(k_{i+1})$ и $T^i(x, y) \in \mathcal{T}(k_{i+1})$ для любого i , $0 \leq i \leq m$. Полагая $(x_i, y_i) = T^i(x, y)$ (так что $x_0 = x$, $y_0 = y$), выразим x_i и y_i через x и y . Поскольку $(x_{i-1}, y_{i-1}) \in \mathcal{T}(k_i)$, то $[(1+x_{i-1})/y_{i-1}] = k_i$, так что

$$(x_i, y_i) = T^i(x, y) = T \circ T^{i-1}(x, y) = T(x_{i-1}, y_{i-1}) = (y_{i-1}, k_i y_{i-1} - x_{i-1}),$$

откуда

$$\begin{cases} x_i = y_{i-1} \\ y_i = k_i y_{i-1} - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (18)$$

Соотношения (18) приводят к цепочке равенств

$$x_{i-1} + x_{i+1} = k_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

из которых последовательно находим:

$$\begin{aligned} x_i &= x_1 \mathbb{K}_{i-1}(k_1, \dots, k_{i-1}) - x_0 \mathbb{K}_{i-2}(k_2, \dots, k_{i-1}) = \\ &= y \mathbb{K}_{i-1}(k_1, \dots, k_{i-1}) - x \mathbb{K}_{i-2}(k_2, \dots, k_{i-1}) \\ y_i &= x_{i+1} = y \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) - x \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i). \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку $(x_m, y_m) \in \mathcal{T}(k_{m+1})$, то $[(1+x_m)/y_m] = k_{m+1}$ и, следовательно,

$$k_{m+1} \leq \frac{1+x_m}{y_m} < k_{m+1} + 1.$$

Заменяя x_m, y_m с помощью формул (18), получим:

$$k_{m+1} \leq \frac{1+y_{m-1}}{k_m y_{m-1} - x_{m-1}} < k_{m+1} + 1$$

или, что то же,

$$\begin{cases} k_{m+1}(k_m y_{m-1} - x_{m-1}) \leq 1 + y_{m-1} \\ 1 + y_{m-1} < (k_{m+1} + 1)(k_m y_{m-1} - x_{m-1}). \end{cases} \quad (20)$$

Выражая x_{m-1}, y_{m-1} через x, y по формулам (19) и пользуясь (10), после несложных преобразований приводим систему (20) к виду

$$\begin{cases} y\mathbb{K}_m(k_1, \dots, k_m) \leq 1 + x\mathbb{K}_m(k_2, \dots, k_{m+1}), \\ 1 + x\mathbb{K}_m(k_2, \dots, k_{m+1} + 1) < y\mathbb{K}_{m+1}(k_1, \dots, k_m, k_{m+1} + 1), \end{cases}$$

т.е.

$$f_{m+1}(x; k_1, \dots, k_{m+1}) < y \leq g_{m+1}(x; k_1, \dots, k_{m+1}).$$

Поскольку $(x, y) \in \mathcal{T}(k_1, \dots, k_m)$, в силу предположения индукции приходим к искомому утверждению. $\square$

Очевидным следствием Леммы 2 является упомянутый выше факт: при любых целых $k_1, \dots, k_r \geq 1$ область $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ либо пуста, либо является выпуклым многоугольником.

Леммы 1 и 2 позволяют свести вычисление $N(Q; r, D)$ к подсчёту числа целых точек в многоугольных областях.

ЛЕММА 3. Пусть $Q \geq r \geq 1$, и пусть $(k_1, \dots, k_r) \in \mathcal{A}_r(D)$ - произвольный набор. Тогда число появлений в ряде Фарей Φ_Q кортежа (1) из $(r+2)$ последовательных дробей с условиями $q_0, q_{r+1} \equiv 0 \pmod{D}$, $q_i \not\equiv 0 \pmod{D}$, $i = 1, 2, \dots, r$, которые отвечают набору $(k_1, \dots, k_r)$, совпадает с числом целых точек (q_0, q_1) с условиями $q_0 \equiv 0 \pmod{D}$, Н.О.Д. $(q_0, q_1) = 1$, лежащих в области $Q\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу Леммы 1 искомое число совпадает с количеством пар (q_0, q_1) с условиями

$$0 < q_0, q_1 \leq Q, \quad q_0 + q_1 > Q, \quad q_0 \equiv 0 \pmod{D}, \quad \text{Н.О.Д.}(q_0, q_1) = 1$$

и таких, что

$$\frac{Q + q_0\mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_{i-1}, k_i + 1)}{\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1)} < q_1 \leq \frac{Q + q_0\mathbb{K}_i(k_2, \dots, k_i)}{\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i)} \quad (21)$$

для каждого i , $1 \leq i \leq r$. Заменой $x = q_0/Q$, $y = q_1/Q$ неравенства (21) приводятся (в обозначениях Леммы 2) к виду

$$f_i(x; k_1, \dots, k_i) < y \leq g_i(x; k_1, \dots, k_i), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

(при этом, очевидно, $0 < x, y \leq 1$, $x + y > 1$). В силу Леммы 2, точка (x, y) принадлежит области $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$. Лемма доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. При любых $Q \geq r \geq 1$, $D \geq 2$ справедливо равенство:

$$N(Q; r, D) = \sum_{(k_1, \dots, k_r) \in \mathcal{A}_r(D)} \sum_{\substack{(q_0, q_1) \in Q\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r) \\ q_0 \equiv 0 \pmod{D}, \\ \text{Н.О.Д.}(q_0, q_1) = 1}} 1. \quad (22)$$

Зафиксируем набор $(k_1, \dots, k_r) \in \mathcal{A}_r(D)$ такой, что область $\omega = \mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ непуста. Внутреннюю сумму в (21) представим в виде

$$\sum_{\substack{e_1=1 \\ \text{Н.О.Д.}(e_1, D)=1}}^D N_{0, e_1}(Q\omega),$$

где $N_{\sigma_0, \sigma_1}(Q\omega)$ - число примитивных целых точек (q_0, q_1) области $Q\omega$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} q_0 \equiv \sigma_0 \pmod{D}, \\ q_1 \equiv \sigma_1 \pmod{D}. \end{cases} \quad (23)$$

Преобразование T , не являясь непрерывным, сохраняет площади (см. [13, лемма 3]). Очевидно также, что преобразование $QT(x, y)$ переводит целые точки треугольника QT в целые точки. Поэтому для подсчёта величины $N_{0, \varepsilon_1}(Q\omega)$ область $Q\omega$ можно подвергнуть многократной итерации преобразования T с тем, чтобы перевести её в другую область, подсчёт целых точек в которой представляет наименьшие затруднения. Имеет место

ЛЕММА 4. При любом j , $1 \leq j \leq r-1$, справедливо равенство $N_{\sigma_0, \sigma_1}(Q\omega) = N_{\varepsilon_0, \varepsilon_1}(QT^j(\omega))$, где

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \varepsilon_0(j) \equiv \mathbb{K}_{j-1}(k_1, \dots, k_{j-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{j-2}(k_2, \dots, k_{j-1})\sigma_0 & (\text{mod } D), \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_1(j) \equiv \mathbb{K}_j(k_1, \dots, k_j)\sigma_1 - \mathbb{K}_{j-1}(k_2, \dots, k_j)\sigma_0 & (\text{mod } D) \end{cases}$$

(в случае $j = 1$ слагаемое $\mathbb{K}_{j-2}(k_2, \dots, k_{j-1})\sigma_0$ отсутствует).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (индукция по j). Подвергнем ω преобразованию T . Поскольку $\omega \subseteq \mathcal{T}(k_1)$, то $[(1+x)/y] = k_1$ и $T(x, y) = (y, k_1y - x)$ для всякой точки (x, y) области ω . Пусть (q_0, q_1) - примитивная целая точка области $Q\omega$, удовлетворяющая, сверх того, условиям (23). Тогда

$$QT\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = (q_1, k_1q_1 - q_0) = (\ell, n)$$

- целая точка области $QT(\omega)$. Очевидно, что $\text{Н.О.Д.}(\ell, n) = \text{Н.О.Д.}(q_0, q_1) = 1$. Кроме того,

$$\begin{cases} \ell = q_1 \equiv \sigma_1 \equiv \mathbb{K}_0\sigma_1 \equiv \varepsilon_0(1) & (\text{mod } D), \\ n = k_1q_1 - q_0 \equiv k_1\sigma_1 - \sigma_0 \equiv \mathbb{K}_1(k_1)\sigma_1 - \mathbb{K}_0\sigma_0 \equiv \varepsilon_1(1) & (\text{mod } D). \end{cases}$$

Следовательно, (ℓ, n) - примитивная точка области $QT(\omega)$, входящая в подсчёт величины $N_{\varepsilon_0(1), \varepsilon_1(1)}(QT(\omega))$. Обратно, пусть (ℓ, n) - примитивная точка области $QT(\omega)$, такая, что

$$\begin{cases} \ell \equiv \mathbb{K}_0\sigma_1 & (\text{mod } D), \\ n \equiv \mathbb{K}_1(k_1)\sigma_1 - \mathbb{K}_0\sigma_0 & (\text{mod } D). \end{cases} \quad (24)$$

Тогда для некоторой точки $(x, y) \in \omega$ будем иметь:

$$\left(\frac{\ell}{Q}, \frac{n}{Q}\right) = T(x, y) = (y, k_1y - x).$$

Поэтому

$$x = \frac{k_1\ell - n}{Q}, \quad y = \frac{\ell}{Q}$$

и $(Qx, Qy) = (k_1\ell - n, \ell)$ - целая точка области $Q\omega$. Полагая $q_0 = k_1\ell - n$, $q_1 = \ell$, будем иметь: $\text{Н.О.Д.}(q_0, q_1) = \text{Н.О.Д.}(\ell, n) = 1$, и, кроме того,

$$\begin{cases} q_0 \equiv k_1\mathbb{K}_0\sigma_1 - (\mathbb{K}_1(k_1)\sigma_1 - \mathbb{K}_0\sigma_0) \equiv k_1\sigma_1 - k_1\sigma_1 + \sigma_0 \equiv \sigma_0 & (\text{mod } D), \\ q_1 \equiv \mathbb{K}_0\sigma_1 \equiv \sigma_1 & (\text{mod } D). \end{cases}$$

Следовательно (q_0, q_1) - примитивная точка области $Q\omega$, входящая в подсчёт величины $N_{0, \varepsilon_1}(Q\omega)$.

Таким образом, между примитивными точками области $Q\omega$ с условиями (23) и примитивными точками области $QT(\omega)$ с условиями (24) имеется взаимнооднозначное соответствие. В частности,

$$N_{\sigma_0, \sigma_1}(Q\omega) = N_{\varepsilon_0(1), \varepsilon_1(1)}(QT(\omega)),$$

что и доказывает утверждение в случае $j = 1$.

Пусть утверждение леммы верно для всех j , $1 \leq j \leq m-1$. Так как $T^{m-1}(\omega) \subset \mathcal{T}(k_m)$, то $[(1+x)/y] = k_m$ и $T(x, y) = (y, k_my - x)$ для всякой точки $(x, y) \in T^{m-1}(\omega)$. Если $(p_0, p_1) \in QT^{m-1}(\omega)$ - примитивная точка, для которой

$$\begin{cases} p_0 \equiv \mathbb{K}_{m-2}(k_1, \dots, k_{m-2})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-3}(k_2, \dots, k_{m-2})\sigma_0 & (\text{mod } D), \\ p_1 \equiv \mathbb{K}_{m-1}(k_1, \dots, k_{m-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-2}(k_2, \dots, k_{m-1})\sigma_0 & (\text{mod } D), \end{cases}$$

то

$$QT\left(\frac{p_0}{Q}, \frac{p_1}{Q}\right) = (p_1, k_mp_1 - p_0) = (\ell, n)$$

- целая точка области $QT^m(\omega)$. Очевидно, что $\text{Н.О.Д.}(\ell, n) = \text{Н.О.Д.}(p_0, p_1) = 1$. Кроме того, пользуясь (7), находим:

$$\begin{aligned} \ell = p_1 &\equiv \mathbb{K}_{m-1}(k_1, \dots, k_{m-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-2}(k_2, \dots, k_{m-1})\sigma_0 \equiv \varepsilon_0(m-1) \pmod{D}, \\ n = k_mp_1 - p_0 &\equiv k_m(\mathbb{K}_{m-1}(k_1, \dots, k_{m-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-2}(k_2, \dots, k_{m-1})\sigma_0) - \\ &\quad - (\mathbb{K}_{m-2}(k_1, \dots, k_{m-2})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-3}(k_2, \dots, k_{m-2})\sigma_0) \equiv \\ &\equiv \mathbb{K}_m(k_1, \dots, k_m)\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-1}(k_2, \dots, k_m)\sigma_0 \equiv \varepsilon_1(m) \pmod{D}. \end{aligned}$$

Следовательно, точка (ℓ, n) участвует в подсчёте величины $N_{\varepsilon_0(m), \varepsilon_1(m)}(QT^m(\omega))$. Обратно, пусть (ℓ, n) - примитивная точка области $QT^m(\omega)$, такая, что

$$\begin{cases} \ell \equiv \mathbb{K}_{m-1}(k_1, \dots, k_{m-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-2}(k_2, \dots, k_{m-1})\sigma_0 & (\text{mod } D), \\ n \equiv \mathbb{K}_m(k_1, \dots, k_m)\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-1}(k_2, \dots, k_m)\sigma_0 & (\text{mod } D). \end{cases}$$

Тогда для некоторой точки $(x, y) \in T^{m-1}(\omega)$ будем иметь:

$$\left(\frac{\ell}{Q}, \frac{n}{Q}\right) = T(x, y) = (y, k_my - x),$$

откуда

$$x = \frac{k_m\ell - n}{Q}, \quad y = \frac{\ell}{Q}.$$

Значит, $(Qx, Qy) = (k_m\ell - n, \ell) = (q_0, q_1)$ - примитивная точка области $QT^{m-1}(\omega)$, причём

$$\begin{aligned} q_0 &\equiv k_m(\mathbb{K}_{m-1}(k_1, \dots, k_{m-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-2}(k_2, \dots, k_{m-1})\sigma_0) - \\ &\quad - (\mathbb{K}_m(k_1, \dots, k_m)\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-1}(k_2, \dots, k_m)\sigma_0) \pmod{D} \equiv \\ &\equiv \mathbb{K}_{m-2}(k_1, \dots, k_{m-2})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-3}(k_2, \dots, k_{m-2})\sigma_0 \equiv \varepsilon_0(m-1) \pmod{D} \\ q_1 &\equiv \mathbb{K}_{m-1}(k_1, \dots, k_{m-1})\sigma_1 - \mathbb{K}_{m-2}(k_2, \dots, k_{m-1})\sigma_0 \equiv \varepsilon_1(m-1) \pmod{D}. \end{aligned}$$

Следовательно, точка (q_0, q_1) входит в подсчёт величины $N_{\varepsilon_0(m-1), \varepsilon_1(m-1)}(QT^{m-1}(\omega))$. Таким образом,

$$N_{\varepsilon_0(m), \varepsilon_1(m)}(QT^m(\omega)) = N_{\varepsilon_0(m-1), \varepsilon_1(m-1)}(QT^{m-1}(\omega)).$$

Отсюда в силу предположения индукции заключаем:

$$N_{\varepsilon_0(m), \varepsilon_1(m)}(QT^m(\omega)) = N_{\sigma_0, \sigma_1}(Q\omega). \quad \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если исходный набор $(k_1, \dots, k_r)$ содержится в $\mathcal{A}_r(D)$, то при любом j , $1 \leq j \leq r-1$, пара $(\varepsilon_0(j), \varepsilon_1(j)) \pmod{D}$ отлична от пары $(0, 0)$.

Вычисление величины $N_{0,e_1}(Q\omega)$ опирается на следующую версию неравенства Ярника (см. [16, лемма 1]): если Ω - плоская односвязная область со спрямляемой границей, $|\Omega|$ и $|\partial\Omega|$ - её площадь и периметр, а $N(\Omega)$ - количество целых точек, лежащих внутри Ω , то

$$|N(\Omega) - |\Omega|| \leq 4(|\partial\Omega| + 1).$$

В частности, если Ω - выпуклый многоугольник, $Q > 1$, то

$$N(Q\Omega) = Q^2|\Omega| + O(Q|\partial\Omega| + 1), \quad (25)$$

где постоянная в знаке O - абсолютная.

Для дальнейшего нам потребуется ряд свойств преобразования T и областей $\mathcal{T}(k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ (см. рис. 1).

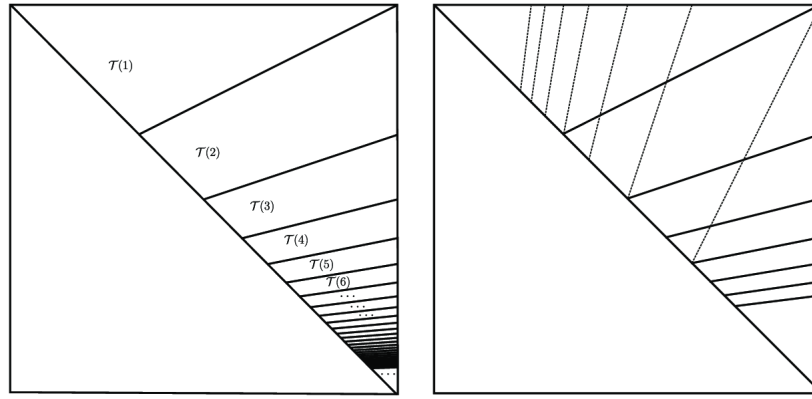


Рис. 1. Области $\mathcal{T}(k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ (слева);
взаимное расположение областей $\mathcal{T}(k)$ и $T(\mathcal{T}(k))$ (справа).

ЛЕММА 5. *Справедливы следующие утверждения:*

(а) область $\mathcal{T}(k)$ при $k = 1$ представляет собой треугольник с вершинами $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ и площадью $|\mathcal{T}(1)| = 1/6$, а при $k \geq 2$ - четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{k}{k+2}, \frac{2}{k+2}\right), \quad \left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{2}{k+1}\right), \quad \left(1, \frac{2}{k}\right), \quad \left(1, \frac{2}{k+1}\right) \quad (26)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}(k)| = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}; \quad (27)$$

(b) при любом $k \geq 1$ области $\mathcal{T}(k)$ и $T(\mathcal{T}(k))$ симметричны относительно прямой $y = x$;

(c) $\mathcal{T}(1) \cap T(\mathcal{T}(1)) = \emptyset$; $\mathcal{T}(2) \cap T(\mathcal{T}(k)) = \emptyset$ при любом $k \geq 5$; $\mathcal{T}(k) \cap T(\mathcal{T}(m)) = \emptyset$ при любых $k, m \geq 3$;

(d) $T^{-1}(\mathcal{T}(k)) \subset \mathcal{T}(1)$, $T(\mathcal{T}(k)) \subset \mathcal{T}(1)$ при любом $k \geq 5$;

(e) пусть $r \geq 1$, $k \geq 4r + 2$; тогда $T^{-j}(\mathcal{T}(k)) \subset \mathcal{T}(2)$, $T^j(\mathcal{T}(k)) \subset \mathcal{T}(2)$ для любого j , $2 \leq j \leq r$;

(f) пусть $r \geq 1$, $\max(k_1, \dots, k_r) = k_j \geq 4r + 2$, и пусть $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r) \neq \emptyset$; тогда набор $k_1, \dots, k_r$ удовлетворяет условиям

$$k_i = 1 \quad \text{при} \quad |i - j| = 1, \quad k_i = 2 \quad \text{при} \quad |i - j| \geq 2. \quad (28)$$

(h) пусть $r \geq 1$, $Q > 2(r + 1)$, и пусть $\max(k_1, \dots, k_r) = k_j \geq 4r + 2$, причём область $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ непуста; тогда $k_j \leq 2Q$.

Доказательства этих утверждений содержатся в [3], [13]. П.п. (а), (b) получаются из определения $\mathcal{T}(k)$ непосредственным вычислением; п.п. (с), (d) являются следствиями п. (b). Утверждения п. (е) представляют собой следствия п.п. (i), (ii) леммы 3.4 работы [3]. Утверждение п. (f) также следует из указанной леммы (см. [3, р. 570]). По поводу п. (h) см. [19, р. 384; Remark 2.3].

Из п. (с) следует, что при $r \geq 2$ в наборе $(k_1, \dots, k_r)$, отвечающем непустой области $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$, не может быть двух подряд идущих единиц и, таким образом,

$$\max(k_1, \dots, k_r) \geq 2. \quad (29)$$

Воспользуемся формулой (25) для вывода асимптотики величины $N_{0,e_1}(Q\omega)$.

ЛЕММА 6. Пусть $r \geq 1$, $k_1, \dots, k_r$ - целые числа, такие, что область $\omega = \mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ непуста, $\max(k_1, \dots, k_r) = k_j$. Пусть, далее, $Q > 2k_j$, $1 \leq e_1 \leq D$, $\text{Н.О.Д.}(e_1, D) = 1$. Тогда для числа $N_{0,e_1}(Q\omega)$ примитивных точек (q_0, q_1) области $Q\omega$ с условиями $q_0 \equiv 0 \pmod{D}$, $q_1 \equiv e_1 \pmod{D}$ справедлива формула:

$$N_{0,e_1}(Q\omega) = \frac{6Q^2}{(\pi D)^2} \prod_{p|D} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} |\omega| + O\left(\frac{Q}{k_j} \ln Q\right),$$

где постоянная в знаке O - абсолютная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для краткости область $T^{j-1}(\omega)$ через ω_j . В силу Леммы 4, $N_{0,e_1}(Q\omega) = N_{\varepsilon_0, \varepsilon_1}(Q\omega_j)$, где

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \equiv \mathbb{K}_{j-2}(k_1, \dots, k_{j-2})e_1 \pmod{D}, \\ \varepsilon_1 \equiv \mathbb{K}_{j-1}(k_1, \dots, k_{j-1})e_1 \pmod{D} \end{cases}$$

(в случае $j = 1$ считаем $(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = (0, e_1)$). Пусть, далее, Ω_j - область, состоящая из всех точек вида

$$\left(\frac{1}{D}\left(x - \frac{\varepsilon_0}{Q}\right), \frac{1}{D}\left(y - \frac{\varepsilon_1}{Q}\right)\right), \quad \text{где } (x, y) \in \omega_j.$$

Тогда величина $N_{\varepsilon_0, \varepsilon_1}(Q\omega_j)$ совпадает с числом целых точек (ℓ, n) области $Q\Omega_j$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\text{Н.О.Д.}(D\ell + \varepsilon_0, Dn + \varepsilon_1) = 1. \quad (30)$$

Действительно, пусть (q_0, q_1) - примитивная точка области $Q\omega_j$, входящая в подсчёт $N_{\varepsilon_0, \varepsilon_1}(Q\omega_j)$, т.е. такая, что

$$q_0 \equiv \varepsilon_0 \pmod{D}, \quad q_1 \equiv \varepsilon_1 \pmod{D}. \quad (31)$$

Тогда числа $\ell = (q_0 - \varepsilon_0)/D$, $n = (q_1 - \varepsilon_1)/D$, и $\text{Н.О.Д.}(D\ell + \varepsilon_0, Dn + \varepsilon_1) = \text{Н.О.Д.}(q_0, q_1) = 1$. Поскольку

$$\left(\frac{\ell}{Q}, \frac{n}{Q}\right) = \left(\frac{q_0 - \varepsilon_0}{DQ}, \frac{q_1 - \varepsilon_1}{DQ}\right) = \left(\frac{1}{D}\left(x - \frac{\varepsilon_0}{Q}\right), \frac{1}{D}\left(y - \frac{\varepsilon_1}{Q}\right)\right),$$

где $(x, y) = (q_0/Q, q_1/Q) \in \omega_j$, то точка (ℓ, n) лежит в области $Q\Omega_j$.

Обратно, если $(\ell, n) \in Q\Omega_j$ - целая точка с условиями (30), то для некоторой точки $(x, y) \in \omega_j$ будем иметь:

$$\left(\frac{\ell}{Q}, \frac{n}{Q}\right) = \left(\frac{1}{D}\left(x - \frac{\varepsilon_0}{Q}\right), \frac{1}{D}\left(y - \frac{\varepsilon_1}{Q}\right)\right),$$

откуда $(Qx, Qy) = (D\ell + \varepsilon_0, Dn + \varepsilon_1) = (q_0, q_1)$ - примитивная точка области $Q\omega_j$, координаты которой удовлетворяют (31). Следовательно,

$$N_{\varepsilon_0, \varepsilon_1}(Q\omega_j) = \sum_{\substack{(\ell, n) \in Q\Omega_j \\ \text{Н.О.Д.}(D\ell + \varepsilon_0, Dn + \varepsilon_1) = 1}} 1 = \sum_{(\ell, n) \in Q\Omega_j} \sum_{\delta | \text{Н.О.Д.}(D\ell + \varepsilon_0, Dn + \varepsilon_1)} \mu(\delta).$$

Чтобы оценить максимальное значение δ , заметим следующее. Так как

$$\omega = \mathcal{T}(k_1) \cap T^{-1}\mathcal{T}(k_2) \cap \dots \cap T^{-(r-1)}\mathcal{T}(k_r) \subseteq T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j),$$

то область $\omega_j = T^{j-1}(\omega)$ целиком лежит в $\mathcal{T}(k_j)$. Как отмечалось выше, $k_j \geq 2$. Значит, $\mathcal{T}(k_j)$ есть четырёхугольник с вершинами (26). Поэтому $Q\omega_j$ заведомо содержится в прямоугольнике

$$Q \frac{k_j - 1}{k_j + 1} \leq x \leq Q, \quad 0 < y \leq \frac{2Q}{k_j}. \quad (32)$$

Значит, для всякой целой точки $(q_0, q_1) \in Q\omega_j$ имеем: $1 \leq q_1 \leq 2Q/k_j$ или, что то же, $D\ell + \varepsilon_1 \leq 2Q/k_j$. Следовательно, $\delta \leq 2Q/k_j$.

Таким образом,

$$N_{\varepsilon_0, \varepsilon_1}(Q\omega_j) = \sum_{1 \leq \delta \leq 2Q/k_j} \mu(\delta) \sum_{\substack{(\ell, n) \in Q\Omega_j \\ D\ell + \varepsilon_0 \equiv 0 \pmod{\delta} \\ Dn + \varepsilon_1 \equiv 0 \pmod{\delta}}} 1 = \sum_{\substack{1 \leq \delta \leq 2Q/k_j \\ \text{Н.О.Д.}(\delta, D) = 1}} \mu(\delta) \sum_{\substack{(\ell, n) \in Q\Omega_j \\ \ell \equiv \sigma_0 \pmod{\delta} \\ n \equiv \sigma_1 \pmod{\delta}}} 1,$$

где $\sigma_0 \equiv -\varepsilon_0 D^* \pmod{\delta}$, $\sigma_1 \equiv -\varepsilon_1 D^* \pmod{\delta}$. Несложно видеть, что внутренняя сумма совпадает с числом целых точек в области $Q\Omega_j^*$, где Ω_j^* получается из Ω_j сдвигом на вектор $(-\sigma_1/Q, -\sigma_2/Q)$ и сжатием в δ раз по каждой из осей, и потому, в силу (25), равна

$$|Q\Omega_j^*| + O(|\partial(Q\Omega_j^*)| + 1) = \frac{Q^2}{\delta^2} |\Omega_j| + O\left(\frac{Q}{\delta} |\partial\Omega_j| + 1\right) = \frac{Q^2}{\delta^2} \frac{|\omega_j|}{D^2} + O\left(\frac{Q}{\delta D} |\partial\omega_j| + 1\right).$$

Так как преобразование T сохраняет площади, то $|\omega_j| = |\omega|$. Далее, если $k_j \geq 4r + 2$, то в силу Леммы 5 набор $(k_1, \dots, k_r)$ удовлетворяет (29). Покажем теперь, что область $\omega = \mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ совпадает с $T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j)$. Действительно, если $|i - j| = 1$, то $k_i = 1$. Рассмотрим область

$$\omega^{(1)} = T^{-(j-2)}\mathcal{T}(k_{j-1}) \cap T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j) = T^{-(j-2)}\mathcal{T}(1) \cap T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j).$$

Имеем тогда: $\omega^{(1)} = T^{-(j-2)}(\mathcal{T}(1) \cap T^{-1}\mathcal{T}(k_j))$. Согласно п. (d) Леммы 5, $T^{-1}\mathcal{T}(k_j)$ содержится в $\mathcal{T}(1)$, так что

$$\omega^{(1)} = T^{-(j-2)} \circ T^{-1}\mathcal{T}(k_j) = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j).$$

Аналогично проверяется равенство

$$\omega^{(2)} = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j) \cap T^{-j}\mathcal{T}(1) = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j).$$

Пусть, далее, $i \leq j - 2$. Полагая

$$\omega^{(3)} = T^{-(i-1)}\mathcal{T}(k_i) \cap T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j),$$

получим:

$$\omega^{(3)} = T^{-(i-1)}\mathcal{T}(2) \cap T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j) = T^{-(i-1)}(\mathcal{T}(2) \cap T^{-(j-i)}\mathcal{T}(k_j)).$$

Согласно п. (e) Леммы 5, $T^{-(j-i)}\mathcal{T}(k_j) \subset \mathcal{T}(2)$, так что

$$\omega^{(3)} = T^{-(i-1)} \circ T^{-(j-i)}\mathcal{T}(k_j) = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j).$$

Наконец, полагая

$$\omega^{(4)} = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j) \cap T^{-(i-1)}\mathcal{T}(k_i),$$

при $i \geq j + 2$ находим:

$$\omega^{(4)} = T^{-(i-1)}(T^{-(i-j)}\mathcal{T}(k_j) \cap \mathcal{T}(2)) = T^{-(i-1)} \circ T^{-(i-j)}\mathcal{T}(k_j) = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j).$$

Следовательно, $\omega = T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j)$ и $\omega_j = T^{j-1}(\omega) = \mathcal{T}(k_j)$. Таким образом,

$$|\partial\omega_j| = |\partial\mathcal{T}(k_j)| \ll \frac{1}{k_j}.$$

Если же $k_j \leq 4r + 2$, то

$$|\partial\omega_j| \ll 1 \ll_r \frac{1}{k_j}.$$

Итак, в каждом из случаев имеем равенство:

$$|Q\Omega_j^*| = \frac{Q^2}{(D\delta)^2} |\omega| + O\left(\frac{Q}{D\delta k_j} + 1\right).$$

Отсюда без труда находим:

$$\begin{aligned} N_{\varepsilon_0, \varepsilon_1}(Q\omega_j) &= \frac{Q^2}{D^2} |\omega| \left(\sum_{\text{н.о.д.}(D, \delta)=1} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} - \sum_{\substack{\text{н.о.д.}(D, \delta)=1 \\ \delta > 2Q/k_j}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \right) + O\left(\frac{Q \ln Q}{Dk_j}\right) + O\left(\frac{Q}{k_j}\right) = \\ &= \frac{6Q^2}{(\pi D)^2} \prod_{p|D} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} |\omega| + O\left(\frac{Q}{D^2} |\omega| k_j\right) + O\left(\frac{Q \ln Q}{k_j}\right). \end{aligned}$$

Замечая, что $|\omega| = |\omega_j| = |\mathcal{T}(k_j)| \ll k_j^{-3}$, приходим к искомой формуле. Лемма доказана. $\square$

Следующее утверждение устанавливает формулу для величины $N(Q; r, D)$, которая служит основой для вывода Теорем 1-2.

ЛЕММА 7. При фиксированных $r \geq 1$, $D \geq 2$ и $Q \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$N(Q; r, D) = \frac{6Q^2}{\pi^2} \frac{1}{D} \prod_{p|D} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r(D)} |\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)| + O_{r,D}(Q \ln^2 Q),$$

где $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$. Доказательство Леммы 7. Согласно следствию Леммы 3,

$$N(Q; r, D) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r(D)} \sum_{\substack{e_1=1 \\ \text{н.о.д.}(e_1, D)=1}}^D N_{0, e_1}(Q\omega), \quad (33)$$

где $\omega = \mathcal{T}(\mathbf{k}) = \mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$. Заменяя каждую из величин $N_{0, e_1}(Q\omega)$ выражением из Леммы 6, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{e_1=1 \\ \text{н.о.д.}(e_1, D)=1}}^D N_{0, e_1}(Q\omega) &= \frac{6Q^2}{(\pi D)^2} \varphi(D) \prod_{p|D} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} |\omega| + O\left(\frac{\varphi(D)}{k_j} Q \ln Q\right) = \\ &= \frac{6Q^2}{\pi^2 D} \prod_{p|D} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} |\omega| + O_D\left(\frac{Q}{k_j} \ln Q\right), \quad (34) \end{aligned}$$

где, как и выше, $k_j = \max(k_1, \dots, k_r)$.

Оценим вклад в (33) от остаточных членов формул (34). Вклад от наборов $\mathbf{k}$ с условием $k_j \leq 4r + 2$ не превосходит по порядку $O_r(Q \ln Q)$. Вклад от оставшихся наборов оценивается величиной $S_1 + \dots + S_r$, где S_j - сумма по наборам $\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r(D)$ с условиями $k_j > 4r + 2$, $\omega = \mathcal{T}(\mathbf{k}) \neq \emptyset$. В силу п. (h) Леммы 5, в этом случае $k_j \leq 2Q$. Кроме того, как отмечалось выше, непустота области ω влечёт равенства п. (f) той же леммы, которыми набор $\mathbf{k}$ определяется однозначно: $k_{j-1} = k_{j+1} = 1$, $k_1 = \dots = k_{j-2} = k_{j+2} = \dots = k_r = 2$.

Следовательно,

$$S_j \ll Q(\ln Q) \sum_{k_j \leq 2Q} \frac{1}{k_j} \ll Q \ln^2 Q.$$

Лемма доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. *Справедливо равенство:*

$$\nu(r; D) = 2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r(D)} |\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)|.$$

Искомую формулу для $\nu(r; D)$ получим, воспользовавшись Леммой 6 и равенством

$$N(Q, D) = \frac{3Q^2}{\pi^2 D} \prod_{p|D} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} + O_D(Q \ln Q),$$

доказательство которого можно найти, например, в [20, с. 262-263]. $\square$

Зафиксируем произвольное целое $D \geq 2$. Кортёжу (1) из $(r + 2)$ последовательных дробей Фарея поставим в соответствие кортеж

$$1 - \frac{a_{r+1}}{q_{r+1}} < 1 - \frac{a_r}{q_r} < \dots < 1 - \frac{a_1}{q_1} < 1 - \frac{a_0}{q_0}. \quad (35)$$

Несложно проверить, что дроби (35) также являются последовательными дробями ряда Φ_Q . Кроме того, если исходный кортеж (1) отвечал набору чисел $(k_1, \dots, k_r)$, то кортеж (35) будет отвечать набору $(k_r, \dots, k_1)$. Очевидно, между кортежами (1) и (35) имеется взаимно однозначное соответствие. В силу Леммы 3, совпадают и количества примитивных целых точек (q_0, q_1) с условием $q_0 \equiv 0 \pmod{D}$ в областях $Q\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ и $Q\mathcal{T}(k_r, \dots, k_1)$. Применяя Лемму 6, после суммирования по e_1 , Н.О.Д. $(e_1, D) = 1$, получим равенство

$$\frac{6Q^2}{(\pi D)^2} \prod_{p|D} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} |\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)| = \frac{6Q^2}{(\pi D)^2} \prod_{p|D} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} |\mathcal{T}(k_r, \dots, k_1)| + O\left(\frac{Q}{k_j} \ln Q\right),$$

в котором $k_j = \max(k_1, \dots, k_r)$. Устремляя Q к бесконечности, приходим к равенству

$$|\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)| = |\mathcal{T}(k_r, \dots, k_1)|, \quad (36)$$

ранее, по-видимому, в общем виде не отмеченному.

3. Доказательство Теоремы 1: значения величин $\nu(r; D)$, $1 \leq r \leq 6$

Если не оговорено противное, в §§3-5 предполагаем $D = 3$. При построении множества $\mathcal{A}_r = \mathcal{A}_r(3)$ будем пользоваться утверждением Леммы 5, а при подсчёте величин $|\mathcal{T}(k_r, \dots, k_1)|$ - формулами Леммы 2.

Пусть $r = 1$. В этом случае множество $\mathcal{A}_r$ состоит из наборов (k_1) длины 1 с условием $\mathbb{K}_1(k_1) = k_1 \equiv 0 \pmod{3}$. Пользуясь следствием Леммы 7 и п. (а) Леммы 5, находим:

$$\nu(1; 3) = 2 \sum_{\substack{k_1 \equiv 0 \pmod{3} \\ k_1 \geq 1}} |\mathcal{T}(k_1)| = 8\Sigma, \quad \Sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3k(3k+1)(3k+2)}.$$

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{3k+2} \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+2} \right) = \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{2}{3}} \right) - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k + \frac{1}{3}} - \frac{1}{k + \frac{2}{3}} \right) = \\ &= \frac{1}{6} \left(\psi\left(\frac{5}{3}\right) - \psi(1) \right) - \frac{1}{3} \left(\psi\left(\frac{2}{3}\right) - \psi\left(\frac{1}{3}\right) \right), \end{aligned}$$

где $\psi(x)$ - *дигамма-функция*. Пользуясь последовательно формулами

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}, \quad \psi(1-x) - \psi(x) = \pi \operatorname{ctg}(\pi x)$$

наряду с равенствами

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi\left(\frac{2}{3}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \ln 3$$

(γ - постоянная Эйлера; см. формулы 8.365.1, 8.365.8, 8.366.1 и 8.366.7 из [21]), находим:

$$\Sigma = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3 \right), \quad \nu(1; 3) = 6 - 2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3 \right).$$

В случае $r = 2$ условия включения в $\mathcal{A}_2$ набора (k_1, k_2) имеют вид:

$$\mathbb{K}_1(k_1) = k_1 \not\equiv 0 \pmod{3}, \quad \mathbb{K}_2(k_1, k_2) = k_1 k_2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Поэтому в $\mathcal{A}_2$ войдут наборы, для которых $k_1 \equiv k_2 \not\equiv 0 \pmod{3}$, так что $\nu(2; 3) = \sigma_1 + \sigma_2$, где

$$\sigma_j = \sum_{\substack{k_1 \equiv k_2 \equiv j \pmod{3} \\ k_1, k_2 \geq 1}} |\mathcal{T}(k_1, k_2)|, \quad j = 1, 2.$$

В силу п. (d) Леммы 5, вклад от $k_1 = 1$ в σ_1 имеет вид

$$\sigma_{11} = \sum_{\substack{k_2 \equiv 1 \pmod{3} \\ k_2 \geq 4}} |\mathcal{T}(1, k_2)| = |\mathcal{T}(1, 4)| + \sum_{\substack{k_2 \equiv 1 \pmod{3} \\ k_2 \geq 7}} |\mathcal{T}(k_2)|.$$

Подсчёт по формулам Леммы 2 даёт:

$$|\mathcal{T}(1, 4)| = \frac{1}{35}.$$

Пользуясь формулой п. (а) Леммы 5, находим:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{35} + 4 \left(\sigma - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} \right) = 4\sigma - \frac{1}{210}, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}.$$

Далее, в силу п. (с) Леммы 5, вклад в σ_1 от $k_1 = 4$ составит

$$\sigma_{12} = \sum_{\substack{k_2 \equiv 1 \pmod{3} \\ k_2 \geq 1}} |\mathcal{T}(4, k_2)| = |\mathcal{T}(4, 1)| = \frac{1}{35};$$

вклад же от $k_1 \geq 7$, $k_1 \equiv 1 \pmod{3}$ даётся выражением

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \sum_{\substack{k_1 \equiv 1 \pmod{3} \\ k_1 \geq 7}} \sum_{\substack{k_2 \equiv 1 \pmod{3} \\ k_2 \geq 1}} |\mathcal{T}(k_1, k_2)| = \sum_{\substack{k_1 \equiv 1 \pmod{3} \\ k_1 \geq 7}} |\mathcal{T}(k_1, 1)| = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \equiv 1 \pmod{3} \\ k_1 \geq 7}} |\mathcal{T}(k_1)| = 4 \left(\sigma - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} \right) = 4\sigma - \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} = \left(4\sigma - \frac{1}{210} \right) + \frac{1}{35} + \left(4\sigma - \frac{1}{30} \right) = 8\sigma - \frac{1}{105}.$$

Наконец, из п. (с) Леммы 5 следует, что в сумме σ_2 от нуля отлично единственное слагаемое (с $k_1 = k_2 = 2$), так что

$$\sigma_2 = |\mathcal{T}(2, 2)| = \frac{1}{10}.$$

Таким образом,

$$\nu(2; 3) = 2 \left(8\sigma - \frac{1}{105} + \frac{1}{10} \right) = 16\sigma + \frac{19}{105}.$$

Замечая, что

$$\sigma = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3 \right) - \frac{1}{6},$$

находим:

$$\nu(2; 3) = 4 \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3 \right) - \frac{87}{35}.$$

Вычисление величин $\nu(r; 3)$, $3 \leq r \leq 6$, удобно провести по следующей схеме.

Для каждого из значений r , $1 \leq r \leq 5$, последовательно составляются перечни $\mathcal{A}_r^*$ тех наборов $\mathbf{k}_r = (k_1, \dots, k_r)$, которые, во-первых, отвечают непустым областям $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r)$ и, во-вторых, удовлетворяют дополнительным условиям $\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) \not\equiv 0 \pmod{3}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Построение перечня $\mathcal{A}_1^*$ не представляет затруднений: он состоит из наборов (k_1) длины 1 с условием $k_1 \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Случай $r = 2$. Выше мы нашли, что $\mathcal{A}_2$ состоит из наборов

$$(k_1, 1), \quad k_1 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_1 \geq 4; \quad (1, k_2), \quad k_2 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 4; \quad (2, 2).$$

Пользуясь п.п. (с), (d) Леммы 5, убеждаемся, что в $\mathcal{A}_2^*$ входят наборы

$$\begin{aligned} &(k_1, 1), \quad k_1 \equiv 2 \pmod{3}, \quad k_1 \geq 2; \\ &(1, k_2), \quad k_2 \not\equiv 1 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 2; \\ &(2, 3), (2, 4), (4, 2). \end{aligned}$$

Если перечень $\mathcal{A}_{r-1}^*$ уже построен, то для всякого набора $\mathbf{k}_{r-1} = (k_1, \dots, k_{r-1}) \in \mathcal{A}_{r-1}^*$ проводится перебор всех наборов вида $\mathbf{k}_r = (\mathbf{k}_{r-1}, k) = (k_1, \dots, k_{r-1}, k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, с проверкой соответствующих условий. Перебор можно сократить, пользуясь п. (с) Леммы 5.

Поскольку для каждого из наборов $\mathbf{k}_r$ условия $\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) \not\equiv 0 \pmod{3}$ выполнены для $1 \leq i \leq r-1$ автоматически, то остаётся лишь проверить делимость на 3 определителя $\mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_{r-1}, k) = \mathbb{K}_r$. Если при заданном k оказалось, что $\mathbb{K}_r \not\equiv 0 \pmod{3}$ и при этом $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r) \neq \emptyset$, то набор $\mathbf{k}_r$ включается в $\mathcal{A}_r^*$. В противном случае для этого набора выполняются условия (13). Он включается во множество $\mathcal{A}_r$ и, следовательно, участвует в вычислении $\nu(r; 3)$.

Поиск наборов и вычисление площадей (проверка непустоты) областей $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r)$, $\mathbf{k}_r = (k_1, \dots, k_r)$, производился с помощью программной системы Wolfram Mathematica. В частности, в ней в явном виде вычислялись функции

$$f_i(x) = f_i(x; \mathbf{k}_r), \quad g_i(x) = g_i(x; \mathbf{k}_r), \quad i = 1, 2, \dots$$

из Леммы 2, а также функции

$$F_r(x) = F_r(x; \mathbf{k}_r) = \max(1 - x, f_1(x), \dots, f_r(x)),$$

$$G_r(x) = G_r(x; \mathbf{k}_r) = \min(1, g_1(x), \dots, g_r(x)).$$

Площадь области $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r)$ вычислялась как интеграл от функции

$$H(x) = H(x; \mathbf{k}_r) = \max(0, G_r(x) - F_r(x)).$$

Перебор можно сократить, пользуясь п. (с) Леммы 5. Ниже приводятся результаты вычислений.

Случай $r = 3$. Множество $\mathcal{A}_3^*$ состоит из наборов

$$(2, 1, k_3), \quad k_3 \not\equiv 2 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 6;$$

$$(1, k_2, 1), \quad k_2 \equiv 0 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 3;$$

$$(1, 2, 2), (1, 2, 3), (2, 3, 2), (2, 4, 1), (5, 1, 3), (5, 1, 4), (8, 1, 3),$$

а множество $\mathcal{A}_3$ – из наборов

$$(k_1, 1, 2), \quad k_1 \equiv 2 \pmod{3}, \quad k_1 \geq 8;$$

$$(1, k_2, 1), \quad k_2 \equiv 2 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 5;$$

$$(2, 1, k_3), \quad k_3 \equiv 2 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 8;$$

$$(1, 2, 4), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (4, 2, 1).$$

Таким образом, в подсчёте $\nu(3; 3)$ участвуют величины

$$|\mathcal{T}(1, 2, 4)| = |\mathcal{T}(4, 2, 1)| = \frac{1}{210}; \quad |\mathcal{T}(1, 3, 2)| = |\mathcal{T}(2, 3, 1)| = \frac{3}{140},$$

$$|\mathcal{T}(k, 1, 2)| = |\mathcal{T}(2, 1, k)| = \begin{cases} 11/2340, & k = 8, \\ |\mathcal{T}(k)|, & k \equiv 2 \pmod{3}, \quad k \geq 11, \end{cases}$$

$$|\mathcal{T}(1, k, 1)| = |\mathcal{T}(k)|, \quad k \equiv 2 \pmod{3}, \quad k \geq 5.$$

Итак,

$$\nu(3; 3) = 2 \left(\frac{2}{210} + \frac{2 \cdot 3}{140} + \frac{2 \cdot 11}{2340} + 2 \sum_{\substack{k \equiv 2 \pmod{3} \\ k \geq 11}} |\mathcal{T}(k)| + \sum_{\substack{k \equiv 2 \pmod{3} \\ k \geq 5}} |\mathcal{T}(k)| \right) =$$

$$= \frac{103}{4095} + 24 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} = 12 \ln 3 - \frac{53132}{4095}.$$

Случай $r = 4$. Множество $\mathcal{A}_4^*$ состоит из наборов

$$\begin{array}{lll} (1, 2, 2, 2) & (1, 3, 1, 7) & (2, 4, 1, 4) \\ (1, 2, 2, 3) & (1, 6, 1, 3) & (5, 1, 3, 2) \\ (1, 2, 3, 1) & (2, 3, 2, 2) & (5, 1, 4, 1) \\ (1, 3, 1, 6) & (2, 4, 1, 3) & (2, 1, k_3, 1), \quad k_3 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 7, \end{array}$$

а множество $\mathcal{A}_4$ – из наборов

$$\begin{array}{lll} (1, k_2, 1, 2), & k_2 \equiv 0 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 6, & \\ (2, 1, k_3, 1), & k_3 \equiv 0 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 6, & \\ (1, 2, 3, 2) & (1, 3, 1, 5) & (1, 3, 1, 8) \\ (2, 3, 2, 1) & (5, 1, 3, 1) & (8, 1, 3, 1). \end{array}$$

Соответственно, в подсчёте $\nu(4; 3)$ участвуют величины

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(1, k, 1, 2)| &= |\mathcal{T}(2, 1, k, 1)| = \begin{cases} 1/462, & k = 6, \\ |\mathcal{T}(k)|, & k \equiv 0 \pmod{3}, \quad k \geq 9, \end{cases} \\ |\mathcal{T}(1, 2, 3, 2)| &= |\mathcal{T}(2, 3, 2, 1)| = \frac{9}{1540}, \\ |\mathcal{T}(1, 3, 1, 8)| &= |\mathcal{T}(8, 1, 3, 1)| = \frac{1}{1170}, \\ |\mathcal{T}(1, 3, 1, 5)| &= |\mathcal{T}(5, 1, 3, 1)| = \frac{1}{195}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\nu(4; 3) = 2 \left(\frac{2}{195} + \frac{2}{1170} + \frac{2 \cdot 9}{1540} + \frac{2}{462} + 2 \sum_{\substack{k \equiv 0 \pmod{3} \\ k \geq 9}} |\mathcal{T}(k)| \right) = \frac{528904}{45045} - 4 \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3 \right).$$

Случай $r = 5$. Множество $\mathcal{A}_5^*$ состоит из наборов

$$\begin{array}{lll} (1, 2, 2, 2, 2) & (1, 3, 1, 7, 1) & (5, 1, 4, 1, 3) \\ (1, 2, 2, 2, 3) & (1, 6, 1, 3, 2) & (5, 1, 4, 1, 4) \\ (1, 2, 2, 3, 1) & (2, 4, 1, 3, 2) & (2, 1, 7, 1, 3) \\ (1, 2, 3, 1, 4) & (2, 4, 1, 4, 1) & \\ (1, 2, 3, 1, 6) & (5, 1, 3, 2, 2), & \end{array}$$

а множество $\mathcal{A}_5$ – из наборов

$$\begin{array}{ll} (2, 1, k_3, 1, 2), & k_3 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 7, \\ (1, 2, 2, 3, 2) & (2, 3, 2, 2, 1) \\ (1, 2, 3, 1, 5) & (5, 1, 3, 2, 1) \\ (1, 3, 1, 6, 1) & (1, 6, 1, 3, 1). \end{array}$$

Поэтому в подсчёте $\nu(5; 3)$ участвуют величины

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(1, 2, 2, 3, 2)| &= |\mathcal{T}(2, 3, 2, 2, 1)| = \frac{1}{770}, \quad |\mathcal{T}(1, 2, 3, 1, 5)| = |\mathcal{T}(5, 1, 3, 2, 1)| = \frac{11}{2210} \\ |\mathcal{T}(1, 3, 1, 6, 1)| &= |\mathcal{T}(1, 6, 1, 3, 1)| = \frac{1}{143}, \quad |\mathcal{T}(2, 1, k, 1, 2)| = \begin{cases} 1/616, & k = 7, \\ |\mathcal{T}(k)|, & k \equiv 1 \pmod{3}, \quad k \geq 10. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак,

$$\nu(5; 3) = 2 \left(\frac{2}{770} + \frac{2 \cdot 11}{2 \cdot 210} + \frac{2}{143} + \frac{1}{616} + \sum_{\substack{k \equiv 1 \pmod{3} \\ k \geq 10}} |\mathcal{T}(k)| \right) = 2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3 \right) - \frac{4 \, 164 \, 383}{3 \, 063 \, 060}.$$

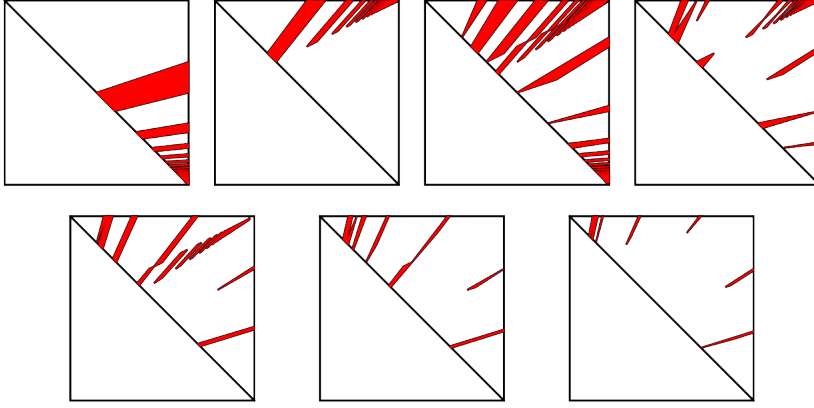


Рис. 2. Многоугольники,

площади которых входят в подсчёт долей $\nu(r; 3)$, $1 \leq r \leq 7$.

Случай $r = 6$. Множество $\mathcal{A}_6^*$ состоит из наборов

$$\begin{array}{llll} (1, 2, 2, 2, 2, 2) & (1, 2, 2, 3, 1, 6) & (2, 4, 1, 4, 1, 3) & (5, 1, 4, 1, 4, 1) \\ (1, 2, 2, 2, 2, 3) & (1, 3, 1, 7, 1, 3) & (2, 4, 1, 4, 1, 4) & \\ (1, 2, 2, 2, 3, 1) & (1, 6, 1, 3, 2, 2) & (5, 1, 3, 2, 2, 2) & \\ (1, 2, 2, 3, 1, 4) & (2, 4, 1, 3, 2, 2) & (5, 1, 4, 1, 3, 2) & \end{array}$$

а множество $\mathcal{A}_6$ - из наборов

$$\begin{array}{llll} (1, 2, 2, 3, 1, 5) & (5, 1, 3, 2, 2, 1) & (1, 2, 3, 1, 6, 1) & (1, 6, 1, 3, 2, 1) \\ (1, 2, 3, 1, 4, 2) & (2, 4, 1, 3, 2, 1) & (1, 3, 1, 7, 1, 2) & (2, 1, 7, 1, 3, 1). \end{array}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu(6; 3) &= 2(|\mathcal{T}(1, 2, 2, 3, 1, 5)| + |\mathcal{T}(5, 1, 3, 2, 2, 1)| + |\mathcal{T}(1, 2, 3, 1, 4, 2)| + |\mathcal{T}(2, 4, 1, 3, 2, 1)| + \\ &+ |\mathcal{T}(1, 2, 3, 1, 6, 1)| + |\mathcal{T}(1, 6, 1, 3, 2, 1)| + |\mathcal{T}(1, 3, 1, 7, 1, 2)| + |\mathcal{T}(2, 1, 7, 1, 3, 1)|) = \\ &= 4 \left(\frac{37}{12 \, 376} + \frac{1}{910} + \frac{23}{9 \, 724} + \frac{3}{1 \, 144} \right) = \frac{3 \, 089}{85 \, 085}. \end{aligned}$$

Случай $r = 7$. Множество $\mathcal{A}_7$ состоит из наборов

$$\begin{array}{llll} (1, 2, 2, 2, 3, 1, 5) & (5, 1, 3, 2, 2, 2, 1) & (1, 2, 2, 3, 1, 6, 1) & (1, 6, 1, 3, 2, 2, 1) \\ (1, 2, 2, 3, 1, 4, 2) & (2, 4, 1, 3, 2, 2, 1) & (1, 3, 1, 7, 1, 3, 1), & \end{array}$$

так что

$$\begin{aligned} \nu(7; 3) &= \\ &= 2(|\mathcal{T}(1, 2, 2, 2, 3, 1, 5)| + |\mathcal{T}(5, 1, 3, 2, 2, 2, 1)| + |\mathcal{T}(1, 2, 2, 3, 1, 4, 2)| + |\mathcal{T}(2, 4, 1, 3, 2, 2, 1)| + \\ &+ |\mathcal{T}(1, 2, 2, 3, 1, 6, 1)| + |\mathcal{T}(1, 6, 1, 3, 2, 2, 1)| + |\mathcal{T}(1, 3, 1, 7, 1, 3, 1)|) = \\ &= 2 \left(\frac{2 \cdot 13}{9 \, 576} + \frac{2 \cdot 15}{12 \, 376} + \frac{2}{2 \, 618} + \frac{1}{936} \right) = \frac{54 \, 097}{3 \, 879 \, 876}. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана. $\square$

4. Точные формулы для континуантов и явный вид некоторых областей $\mathcal{T}(\mathbf{k})$.

Выводу формул для величин $\nu(r; 3)$, отвечающих $r \geq 8$, мы предпошлим ряд вспомогательных утверждений, необходимых для описания перечней наборов $\mathcal{A}_r^*$, $\mathcal{A}_r$. Всюду далее вместо $\mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r)$ условимся писать $\mathbb{K}(k_1, \dots, k_r)$. Кроме того, при работе с наборами, содержащими повторяющиеся компоненты, вместо последовательности символов вида $\underbrace{a, a, \dots, a}_n$ будем писать a^n (при этом a может быть как числом, так и последовательностью чисел), например: $(1, 2, 2, 2, 2) = (1, 2^4)$, $(2, 1, 4, 1, 4, 3) = (2, (1, 4)^2, 3)$ и т.д.

ЛЕММА 8. Пусть $n \geq 1$. Тогда, полагая

$$A_n = \mathbb{K}((4, 1)^n), \quad B_n = \mathbb{K}((4, 1)^n, 4), \quad C_n = \mathbb{K}(1, (4, 1)^n), \quad D_n = \mathbb{K}(2^n),$$

будем иметь: $A_n = 2n + 1$, $B_n = 4(n + 1)$, $C_n = D_n = n + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формул (7), (10) имеем:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \mathbb{K}((4, 1)^n, 4, 1) = \mathbb{K}((4, 1)^n, 4) - \mathbb{K}((4, 1)^n) = B_n - A_n, \\ B_{n+1} &= \mathbb{K}((4, 1)^{n+1}, 4) = \mathbb{K}((4, 1)^n, 4, 1, 4) = \mathbb{K}(4, 1)\mathbb{K}((4, 1)^n, 4) - \mathbb{K}(4)\mathbb{K}((4, 1)^n) = \\ &= 3B_n - 4A_n. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь (9), находим:

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \mathbb{K}(1, (4, 1)^n, 4, 1) = \mathbb{K}(1, 4)\mathbb{K}(1, (4, 1)^n) - \mathbb{K}(1)\mathbb{K}(1, (4, 1)^{n-1}, 4) = 3C_n - A_n, \\ D_{n+1} &= 2\mathbb{K}(2^n) - \mathbb{K}(2^{n-1}) = 2D_n - D_{n-1}. \end{aligned}$$

Замечая, что $A_1 = 3$, $B_1 = 8$, $C_1 = D_1 = 2$, искомое утверждение без труда устанавливаем индукцией по n . $\square$

ЛЕММА 9. Пусть a, b, c и d - произвольные числа, $m, n \geq 0$ - целые. Тогда справедливы следующие тождества:

$$\begin{cases} \mathbb{K}(a, 2^n) = \mathbb{K}(2^n, a) = (a - 1)n + a; \\ \mathbb{K}(a, 2^n, b) = (a - 1)(b - 1)n + ab - 1; \\ \mathbb{K}(2^n, b, c) = (bc - c - 1)n + bc - 1; \\ \mathbb{K}(a, 2^n, b, c) = (a - 1)(bc - c - 1)n + abc - a - c; \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} \mathbb{K}(a, (4, 1)^n) = (2a - 1)n + a; \\ \mathbb{K}((4, 1)^n, b) = 2(b - 2)n + b; \\ \mathbb{K}(a, (4, 1)^n, b) = (2a - 1)(b - 2)n + ab - 1; \\ \mathbb{K}((4, 1)^n, b, c) = 2(bc - 2c - 1)n + bc - 1; \\ \mathbb{K}(a, (4, 1)^n, b, c) = (2a - 1)(bc - 2c - 1)n + abc - a - c; \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} \mathbb{K}(a, (1, 4)^n) = 2(a - 2)n + a; \\ \mathbb{K}((1, 4)^n, b) = (2b - 1)n + b; \\ \mathbb{K}(a, (1, 4)^n, b) = (a - 2)(2b - 1)n + ab - 1; \end{cases} \quad (39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}((4, 1)^n, 3, 2^m) = 2(m + n + 1) + 1; \\ \mathbb{K}(a, (4, 1)^n, 3, 2^m) = (2a - 1)(m + n + 1) + a; \\ \mathbb{K}((4, 1)^n, 3, 2^m, c) = 2(c - 1)(m + n + 1) + c + 1; \\ \mathbb{K}(a, (4, 1)^n, 3, 2^m, c) = (2a - 1)(c - 1)(m + n + 1) + ac + a - 1; \end{array} \right. \quad (40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}((1, 4)^n, 1, 3, 2^m) = m + n + 2; \\ \mathbb{K}((1, 4)^n, 1, 3, 2^m, b) = (b - 1)(m + n + 1) + b; \\ \mathbb{K}(a, (1, 4)^n, 1, 3) = (a - 2)n + 2a - 3; \\ \mathbb{K}(a, (1, 4)^n, 1, 3, 2^m, b) = (a - 2)(b - 1)(m + n + 1) + ab - b - 1. \end{array} \right. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все эти тождества доказываются с помощью равенств (6)-(11) и предыдущей леммы. Например, в силу формулы (9) и Леммы 8 имеем:

$$\mathbb{K}(a, 2^n) = \mathbb{K}(2^n, a) = a\mathbb{K}(2^n) - \mathbb{K}(2^{n-1}) = aD_n - D_{n-1} = (a - 1)n + a,$$

откуда, пользуясь (7), находим:

$$\mathbb{K}(a, 2^n, b) = b\mathbb{K}(a, 2^n) - \mathbb{K}(a, 2^{n-1}) = b((a - 1)n + a) - (a - 1)(n - 1) - a = (a - 1)(b - 1)n + ab - 1.$$

Далее,

$$\mathbb{K}(2^n, b, c) = \mathbb{K}(b, c)\mathbb{K}(2^n) - \mathbb{K}(c)\mathbb{K}(2^{n-1}) = (bc - 1)(n + 1) - cn = (bc - c - 1)n + bc - 1$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(a, 2^n, b, c) &= \mathbb{K}(b, c)\mathbb{K}(a, 2^n) - \mathbb{K}(c)\mathbb{K}(a, 2^{n-1}) = (bc - 1)((a - 1)n + a) - c(a - 1)(n - 1) - ac = \\ &= (a - 1)(bc - c - 1)n + abc - a - c, \end{aligned}$$

чем и завершается доказательство формул группы (37). Оставшиеся формулы доказываются аналогично. $\square$

При вычислении величин $\nu(r; 3)$, $r \geq 8$, важную роль играют области $\mathcal{T}(\mathbf{k})$, отвечающие наборам $\mathbf{k}$ вида $(2, (4, 1)^n)$, $(5, (1, 4)^n)$ и $(1, 2^n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Следующие три леммы дают явное описание этих областей.

ЛЕММА 10. Пусть $n \geq 1$ - целое число. Тогда область $\mathcal{T}(2, (4, 1)^n)$ задаётся неравенствами

$$\frac{6n - 2}{6n - 1} < x \leq 1, \quad \frac{1}{3}(1 + x) < y \leq \frac{1 + 4nx}{6n + 1}$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n - 2}{6n - 1}, \frac{4n - 1}{6n - 1} \right), \quad \left(1, \frac{4n + 1}{6n + 1} \right), \quad \left(1, \frac{2}{3} \right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{1}{6(6n - 1)(6n + 1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (индукция по n). Пусть $n = 1$. Тогда искомая область $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}(2, 4, 1)$ (нижний индекс здесь и далее равен числу компонент набора) задаётся неравенствами

$$\max(1 - x, f_1(x), f_2(x), f_3(x)) < y \leq \min(1, g_1(x), g_2(x), g_3(x)), \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(x; 2) = \frac{1}{3}(1 + x), & g_1(x) &= g_1(x; 2) = \frac{1}{2}(1 + x), \\ f_2(x) &= f_2(x; 2, 4) = \frac{1}{9}(1 + 5x), & g_2(x) &= g_2(x; 2, 4) = \frac{1}{7}(1 + 4x), \\ f_3(x) &= f_3(x; 2, 4, 1) = \frac{1}{12}(1 + 7x), & g_3(x) &= g_3(x; 2, 4, 1) = \frac{1}{5}(1 + 3x). \end{aligned}$$

Поскольку $f_2(x), f_3(x) \leq f_1(x)$ и $g_2(x) \leq g_1(x), g_3(x)$ при $0 \leq x \leq 1$, то неравенства (40) принимают вид:

$$\max \left\{ 1 - x, \frac{1}{3}(1 + x) \right\} < y \leq \frac{1}{7}(1 + 4x)$$

или, что то же,

$$\frac{4}{5} < x \leq 1, \quad \frac{1}{3}(1 + x) < y \leq \frac{1}{7}(1 + 4x).$$

Такая область, как несложно проверить, представляет собой треугольник с вершинами в точках $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, $(1, \frac{5}{7})$, $(1, \frac{2}{3})$ и площадью $1/210 = 1/(6 \cdot 5 \cdot 7)$.

Пусть утверждение доказано для всех $n \leq m - 1$. Тогда при переходе от области $\mathcal{T}_{2m-1} = \mathcal{T}(2, (4, 1)^{m-1})$, задаваемой неравенствами

$$\frac{6m-8}{6m-7} < x \leq 1, \quad \frac{1}{3}(1+x) < y \leq \frac{1+4(m-1)x}{6m-5}, \quad (43)$$

к области $\mathcal{T}_{2m+1} = \mathcal{T}(2, (4, 1)^m)$ к (43) добавятся условия

$$\begin{cases} f_{2m}(x) = f_{2m}(x; 2, (4, 1)^{m-1}, 4) < y \leq g_{2m}(x) = g_{2m}(x; 2, (4, 1)^{m-1}, 4), \\ f_{2m+1}(x) = f_{2m+1}(x; 2, (4, 1)^m) < y \leq g_{2m+1}(x) = g_{2m+1}(x; 2, (4, 1)^m). \end{cases} \quad (44)$$

С помощью Лемм 8, 9 находим:

$$\begin{aligned} f_{2m}(x) &= \frac{1 + x\mathbb{K}((4, 1)^{m-1}, 5)}{\mathbb{K}(2, (4, 1)^{m-1}, 5)} = \frac{1 + (6m-1)x}{9m}, \\ g_{2m}(x) &= \frac{1 + x\mathbb{K}((4, 1)^{m-1}, 4)}{\mathbb{K}(2, (4, 1)^{m-1}, 4)} = \frac{1 + 4mx}{6m+1}, \\ f_{2m+1}(x) &= \frac{1 + x\mathbb{K}((4, 1)^{m-1}, 4, 2)}{\mathbb{K}(2, (4, 1)^{m-1}, 4, 2)} = \frac{1 + (6m+1)x}{9m+3}, \\ g_{2m+1}(x) &= \frac{1 + x\mathbb{K}((4, 1)^m)}{\mathbb{K}(2, (4, 1)^m)} = \frac{1 + (2m+1)x}{3m+2}. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что $f_{2m+1}(x) \leq f_{2m}(x)$ и $g_{2m}(x) < g_{2m+1}(x)$ при всех x , $0 \leq x \leq 1$. Поэтому условия (44) принимают вид:

$$\frac{1 + (6m-1)x}{9m} < y \leq \frac{1 + 4mx}{6m+1}, \quad (45)$$

так что область $\mathcal{T}_{2m+1}$ описывается системой неравенств (43), (45). Так как

$$\frac{1 + (6m-1)x}{9m} \leq \frac{1}{3}(1+x), \quad \frac{1 + 4mx}{6m+1} \leq \frac{1 + 4(m-1)x}{6m-5}$$

при всех x , $0 \leq x \leq 1$, то неравенства (43), (45) заменяются системой

$$\frac{6m-2}{6m-1} < x \leq 1, \quad \frac{1}{3}(1+x) < y \leq \frac{1 + 4mx}{6m+1}.$$

Следовательно, $\mathcal{T}_{2m+1}$ - треугольник, вершины которого - точки пересечения прямых

$$y = \frac{1}{3}(1+x) \quad \text{и} \quad y = \frac{1 + 4mx}{6m+1}, \quad y = \frac{1 + 4mx}{6m+1} \quad \text{и} \quad x = 1, \quad y = \frac{1}{3}(1+x) \quad \text{и} \quad x = 1,$$

т.е. точки

$$\left(\frac{6m-2}{6m-1}, \frac{4m-1}{6m-1} \right), \quad \left(1, \frac{4m+1}{6m+1} \right), \quad \left(1, \frac{2}{3} \right).$$

Далее, если $\mathcal{M}$ - плоский k -угольник, вершины которого имеют координаты (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, k$, то его площадь $|\mathcal{M}|$ вычисляется по формуле

$$|\mathcal{M}| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^k \Delta_i \right|, \quad \text{где} \quad \Delta_i = \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{pmatrix} \quad (46)$$

(при условии, что $x_{k+1} = x_1, y_{k+1} = y_1$).

Применяя (46) к треугольнику $\mathcal{T}_{2m+1}$, находим:

$$-\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{6m-2}{6m-1} & \frac{4m-1}{6m-1} \\ 1 & \frac{4m+1}{6m+1} \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \frac{4m+1}{6m+1} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{6m-2}{6m-1} & \frac{4m-1}{6m-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{6(6m-1)(6m+1)}.$$

Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 11. Пусть $n \geq 1$ - целое число. Тогда область $\mathcal{T}(5, (1, 4)^n)$ задаётся неравенствами

$$\frac{6n-1}{6n+1} < x \leq 1, \quad \frac{1}{6}(1+x) < y \leq \frac{1+(2n+1)x}{6n+5}$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n-1}{6n+1}, \frac{2n}{6n+1} \right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5} \right), \quad \left(1, \frac{1}{3} \right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{1}{3(6n+1)(6n+5)}.$$

ЛЕММА 12. Пусть $n \geq 1$ - целое число. Тогда область $\mathcal{T}(1, 2^n)$ задаётся неравенствами

$$0 < x \leq \frac{1}{2n+3}, \quad 1-x < y \leq 1, \quad \frac{1}{2n+3} < x \leq \frac{1}{2n+1}, \quad \frac{1}{2}(1+(2n+1)x) < y \leq 1$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$(0, 1), \quad \left(\frac{1}{2n+1}, 1 \right), \quad \left(\frac{1}{2n+3}, \frac{2n+2}{2n+3} \right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{1}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

Доказательства Лемм 11 и 12 проводятся аналогично доказательству Леммы 10 и опираются на формулы Лемм 8, 9. $\square$

Будем говорить, что невырожденный набор $\mathbf{k}_r = (k_1, \dots, k_r) \in \mathcal{A}_r^*$ порождает набор $\mathbf{k}_{r+1} = (\mathbf{k}_r, k_{r+1}) = (k_1, \dots, k_r, k_{r+1})$, если области $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r)$ и $\mathcal{T}(\mathbf{k}_{r+1})$ непусты. Набор $\mathbf{k}_{r+1}$ будем называть в этом случае *потомком* набора $\mathbf{k}_r$. Например, набор (2) порождает наборы (2, 1), (2, 3) и (2, 4), набор (5, 1) - наборы (5, 1, 3) и (5, 1, 4) и т. д. Вырожденный набор $\mathbf{k}_r \in \mathcal{A}_r^\circ$ ничего не порождает (не имеет потомков).

Будем говорить также, что набор $\mathbf{k}_{r+\ell} = (\mathbf{k}_r, k_{r+1}, \dots, k_{r+\ell})$ порождается набором $\mathbf{k}_r \in \mathcal{A}_r^*$ (является его потомком), если при любом i , $1 \leq i \leq \ell-1$, набор $\mathbf{k}_{r+i} = (\mathbf{k}_r, k_{r+1}, \dots, k_{r+i})$ невырожден и порождает набор $\mathbf{k}_{r+i+1} = (\mathbf{k}_r, k_{r+i}, \dots, k_{r+i+1})$. Так, в цепочке (1), (1, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 1, 6), (1, 3, 1, 6, 1) каждый следующий набор является потомком предыдущего, а все они, начиная со второго, являются потомками набора (1).

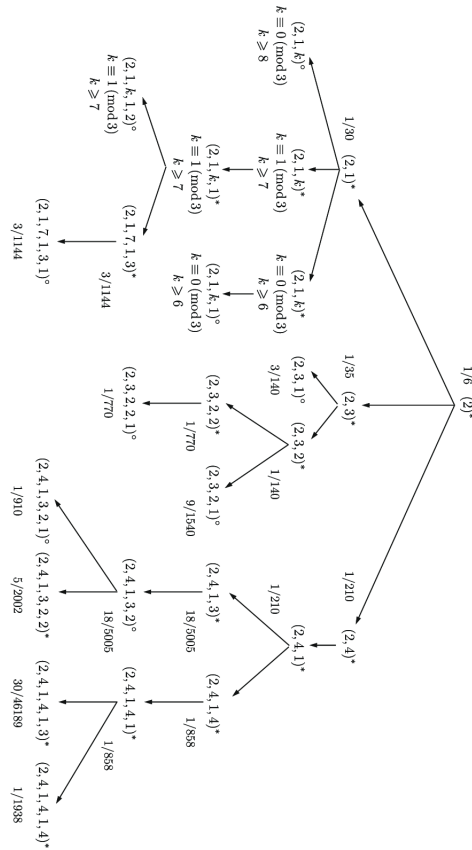


Рис. 3. Набор (2) и его «потомки» до пятого «поколения». Дроби выражают площади соответствующих многоугольников.

Потомков заданного набора естественно изображать в виде ориентированного дерева. Вырожденные наборы, как не имеющие потомков, являются *листьями* (*концевыми узлами*) такого дерева. На рис. 3 показаны все потомки набора (2) в первых пяти «поколениях». Для наглядности в дереве на рис. 3 (как и во всех деревьях, возникающих далее) вырожденные и невырожденные наборы помечены знаками «о» и «*» соответственно.

Оказывается, что любой набор $\mathbf{k}_r$, входящий в формулу следствия Леммы 7 для вычисления $\nu(r; 3)$, $r \geq 8$, является потомком одного из трёх наборов: (2, 4), (5, 1) и (1, 2). Деревья, образованные их потомками, условимся обозначать далее через $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Наборы, участвующие в подсчёте $\nu(r; 3)$, отвечают вершинам со знаком «о», находящимся на r -м «этаже» каждого из этих деревьев. Следующие три леммы посвящены описанию структуры деревьев $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$.

ЛЕММА 13. *Дерево $\mathbb{A}$ имеет вид, изображённый на рис. 4 (слева). Там же (справа) приведена структура поддерева $\mathbb{A}_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. При этом справедливы следующие формулы для площадей многоугольников, отвечающих вырожденным наборам поддерева $\mathbb{A}_n$:*

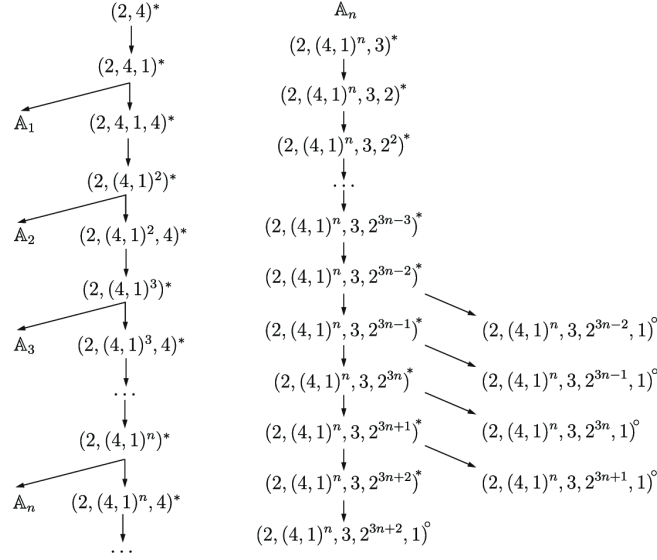


Рис. 4. Схематический вид дерева $\mathbb{A}$ (слева) и его поддерева $\mathbb{A}_n$ (справа).

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{T}_{5n+1}^\circ| &= |\mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n-2}, 1)| = \frac{1}{2(6n-1)(6n+1)(12n+1)}; \\
 |\mathcal{T}_{5n+2}^\circ| &= |\mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n-1}, 1)| = \frac{3(4n+1)}{2(3n+1)(6n+1)(12n+1)(12n+5)}; \\
 |\mathcal{T}_{5n+3}^\circ| &= |\mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n}, 1)| = \frac{3(2n+1)}{2(3n+1)(3n+2)(12n+5)(12n+7)}; \\
 |\mathcal{T}_{5n+4}^\circ| &= |\mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+1}, 1)| = \frac{3(4n+3)}{2(3n+2)(6n+5)(12n+7)(12n+11)}; \\
 |\mathcal{T}_{5n+5}^\circ| &= |\mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+2}, 1)| = \frac{1}{2(6n+5)(6n+7)(12n+11)}.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала проверим вырожденность (невырожденность) наборов, фигурирующих в метках вершин поддерева $\mathbb{A}_n$. Воспользовавшись формулами (38), (40), получим:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{K}(2, (4, 1)^{n-1}, 4) &= 6n+1 \not\equiv 0 \pmod{3}, \\
 \mathbb{K}(2, (4, 1)^n) &= 3n+2 \not\equiv 0 \pmod{3}, \\
 \mathbb{K}(2, (4, 1)^n, 3, 2^m) &= 3(m+n+1)+2 \not\equiv 0 \pmod{3}, \\
 \mathbb{K}(2, (4, 1)^n, 3, 2^m, 1) &= 3 \equiv 0 \pmod{3}.
 \end{aligned}$$

В силу Леммы 10, при переходе от области $\mathcal{T}_{2n+1}^* = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n)$ к области $\mathcal{T}_{2n+2}^* = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3)$ к системе неравенств

$$\frac{6n-2}{6n-1} < x \leq 1, \quad \frac{1}{3}(1+x) < y \leq g_{2n}(x) = g_{2n}(x; 2, (4, 1)^{n-1}, 4) = \frac{1+4nx}{6n+1}$$

добавятся дополнительные условия

$$\begin{aligned} f_{2n+2}(x) = f_{2n+2}(x; 2, (4, 1)^n, 3) &= \frac{1 + (4n + 4)x}{6n + 7} < y \leq \\ &\leq g_{2n+2}(x) = g_{2n+2}(x; 2, (4, 1)^n, 3) = \frac{1 + (2n + 3)x}{3n + 5}. \end{aligned} \quad (47)$$

Несложно проверить, что

$$g_{2n}(x) \leq g_{2n+2}(x) \quad (48)$$

при всех x , $0 \leq x \leq 1$, в случае $n \geq 2$ и при $1/3 \leq x \leq 1$ в случае $n = 1$. Тем более неравенство (48) имеет место при всех x , $(6n - 2)/(6n - 1) \leq x \leq 1$. Следовательно, треугольник $\mathcal{T}_{2n+1}^*$ целиком лежит под отрезком прямой $y = g_{2n+2}(x)$, $0 \leq x \leq 1$, и потому верхняя граница для y в (47) не меняет области $\mathcal{T}_{2n+1}^*$.

Далее, прямая $y = f_{2n+2}(x)$ пересекает вертикаль $x = 1$ в точке $(1, \frac{4n+5}{6n+7})$, прямую $y = (1 + x)/3$ в точке $(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5})$. Из неравенств

$$\frac{6n - 2}{6n - 1} < \frac{6n + 4}{6n + 5} < 1, \quad \frac{2}{3} < \frac{4n + 5}{6n + 7} < \frac{4n + 1}{6n + 1}$$

следует, что прямая $y = f_{2n+2}(x)$ делит треугольник $\mathcal{T}_{2n+1}^*$ на две части (рис. 5). Та из них, что лежит выше этой прямой, есть область $\mathcal{T}_{2n+2}^*$. Она задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{6n - 2}{6n - 1} < x \leq \frac{6n + 4}{6n + 5}, & \frac{1}{3}(1 + x) < y \leq \frac{1 + 4nx}{6n + 1}, \\ \frac{6n + 4}{6n + 5} < x \leq 1, & \frac{1 + (4n + 4)x}{6n + 7} < y \leq \frac{1 + 4nx}{6n + 1} \end{cases}$$

и потому представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n - 2}{6n - 1}, \frac{4n - 1}{6n - 1}\right), \quad \left(1, \frac{4n + 1}{6n + 1}\right), \quad \left(1, \frac{4n + 5}{6n + 7}\right), \quad \left(\frac{6n + 4}{6n + 5}, \frac{4n + 3}{6n + 5}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{2n+2}^*| = \frac{6(2n + 1)}{(6n - 1)(6n + 1)(6n + 5)(6n + 7)}.$$

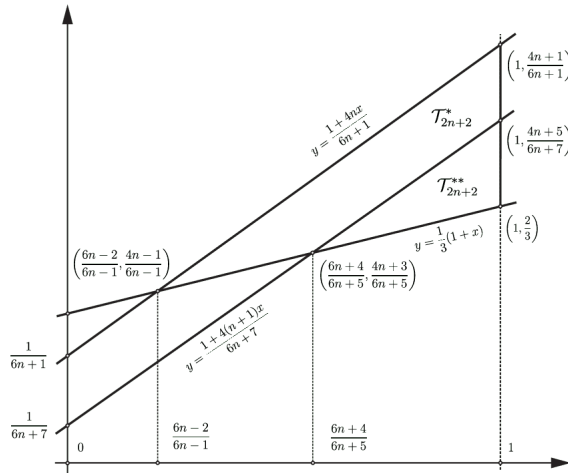


Рис. 5. Области $\mathcal{T}_{2n+2}^*$ и $\mathcal{T}_{2n+2}^{**}$.

Аналогично, при переходе $\mathcal{T}_{2n+1}^* \rightarrow \mathcal{T}_{2n+2}^{**} = \mathcal{T}_{2n+2}(2, (4, 1)^n, 4)$ (знак «**» употреблён здесь вместо знака «*» исключительно по той причине, что обозначение $\mathcal{T}_{2n+2}^*$ уже было использовано выше для соседней области $\mathcal{T}_{2n+2}(2, (4, 1)^n, 3)$) возникают дополнительные условия

$$f_{2n+2}(x; 2, (4, 1)^n, 4) = \frac{1 + (6n + 5)x}{9n + 9} < y \leq g_{2n+2}(x; 2, (4, 1)^n, 4) = \frac{1 + (4n + 4)x}{6n + 7}. \quad (49)$$

Как и выше, можно проверить, что нижняя граница для y в (49) не меняет области $\mathcal{T}_{2n+1}^*$, а верхняя граница совпадает с нижней границей y в (47). Следовательно, область $\mathcal{T}_{2n+2}^{**}$ совпадает с той частью $\mathcal{T}_{2n+1}^*$, что лежит под прямой $y = g_{2n+2}(x)$, и задаётся неравенствами

$$\frac{6n + 4}{6n + 5} < y \leq 1, \quad \frac{1}{3}(1 + x) < y \leq \frac{1 + (4n + 4)x}{6n + 7}.$$

Она является треугольником с вершинами

$$\left(\frac{6n + 4}{6n + 5}, \frac{4n + 3}{6n + 5}\right), \quad \left(1, \frac{4n + 5}{6n + 7}\right), \quad \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{2n+2}^{**}| = \frac{1}{6(6n + 5)(6n + 7)}.$$

Из приведённых выше рассуждений следует, что все области $\mathcal{T}(2, (4, 1)^n, k)$ при $k \neq 3, 4$ пусты. Это обстоятельство выражается и равенством площадей:

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{2n+1}^*| &= \frac{1}{6(6n - 1)(6n + 1)} = \\ &= \frac{6(2n + 1)}{(6n - 1)(6n + 1)(6n + 5)(6n + 7)} + \frac{1}{6(6n + 5)(6n + 7)} = |\mathcal{T}_{2n+2}^*| + |\mathcal{T}_{2n+2}^{**}|. \end{aligned}$$

Возникающее при переходе $\mathcal{T}_{2n+2}^{**} \rightarrow \mathcal{T}_{2n+3}^* = \mathcal{T}(2, (4, 1)^{n+1})$ дополнительное условие

$$f_{2n+3}(x; 2, (4, 1)^{n+1}) = \frac{1 + (6n + 7)x}{9n + 12} < y \leq g_{2n+3}(x; 2, (4, 1)^{n+1}) = \frac{1 + (2n + 3)x}{3n + 5}.$$

ввиду легко проверяемых неравенств

$$\frac{1 + (6n + 7)x}{9n + 12} \leq \frac{1}{3}(1 + x), \quad \frac{1 + (4n + 4)x}{6n + 7} \leq \frac{1 + (2n + 3)x}{3n + 5}$$

(справедливых на всём отрезке $0 \leq x \leq 1$) не меняет области $\mathcal{T}_{2n+2}^{**}$.

Покажем теперь, что и каждая из областей $\mathcal{T}_{2n+2+m}^* = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^m)$ при $0 \leq m \leq 3n - 2$ совпадает с четырёхугольником $\mathcal{T}_{2n+2}^*$. В случае $m = 0$ это очевидно. Пусть это утверждение проверено для всех m , $0 \leq m \leq \ell - 1$ (где $\ell \leq 3n - 2$), и докажем его при $m = \ell$.

При переходе $\mathcal{T}_{2n+2+(\ell-1)}^* \rightarrow \mathcal{T}_{2n+2+\ell}^*$ (или, что то же в силу предположения индукции, при переходе $\mathcal{T}_{2n+2}^* \rightarrow \mathcal{T}_{2n+2+\ell}^*$) возникает дополнительное условие

$$f(x) = f(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^\ell) < y \leq g(x) = g(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^\ell). \quad (50)$$

С помощью Леммы 9 находим явный вид обеих частей неравенства (50):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 + x \cdot \mathbb{K}((4, 1)^n, 3, 2^{\ell-1}, 3)}{\mathbb{K}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{\ell-1}, 3)} = \frac{1 + 4(n + \ell + 1)x}{6(n + \ell + 1) + 1}, \\ g(x) &= \frac{1 + x \cdot \mathbb{K}((4, 1)^n, 3, 2^\ell)}{\mathbb{K}(2, (4, 1)^n, 3, 2^\ell)} = \frac{1 + (2(n + \ell) + 3)x}{3(n + \ell) + 5}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что неравенство $f(x) \leq (1+x)/3$ равносильно неравенству

$$x \leq \frac{6n+4+6\ell}{6n+5+6\ell},$$

которому при любом $\ell \geq 0$ удовлетворяют все $x \leq (6n+4)/(6n+5)$. Аналогично, неравенство $f(x) \leq (1+(4n+4)x)/(6n+7)$ равносильно неравенству $2\ell x \leq 6\ell$, которое справедливо при всех x , $0 \leq x \leq 1$, и любом $\ell \geq 0$. Следовательно, условие $y > f(x)$ в (50) не меняет области $\mathcal{T}_{2n+2}^*$ при любом $\ell \geq 0$.

Далее, неравенство $g(x) > (1+4nx)/(6n+1)$ приводится к виду $3(\ell-n)+4 \leq (2\ell+3)x$. Если $0 \leq \ell \leq n-2$, то $3(\ell-n)+4 \leq -2 < 0 \leq (2\ell+3)x$ при всех x , $0 \leq x \leq 1$. Если же $\ell \geq n-1$, то оно равносильно неравенству

$$x \geq \frac{3(\ell-n)+4}{2\ell+3}.$$

Но при $\ell \leq 3n-2$ этому неравенству удовлетворяет всякое x с условием

$$\frac{6n-2}{6n-1} \leq x \leq 1,$$

что следует из соотношений

$$\frac{6n-2}{6n-1} - \frac{3(\ell-n)+4}{2\ell+3} = \frac{(6n+1)(3n-2-\ell)}{(6n-1)(2\ell+3)} \geq 0.$$

Итак, условие $y \leq g(x)$ в (50) при $0 \leq \ell \leq 3n-2$ действительно не меняет области $\mathcal{T}_{2n+2}^*$ и мы имеем следующую цепочку переходов:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{2n+2}^* \rightarrow \mathcal{T}_{2n+3}^* = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2) \rightarrow \mathcal{T}_{2n+4}^* = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^2) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \mathcal{T}_{5n}^* = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n-2}). \end{aligned}$$

При переходе $\mathcal{T}_{5n}^* \rightarrow \mathcal{T}_{5n+1}^\circ = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n-2}, 1)$ возникают дополнительные условия

$$f(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n-2}, 1) = \frac{1+(8n+1)x}{12n+2} < y \leq g(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n-2}, 1) = \frac{1}{3}(1+2x),$$

а при переходе $\mathcal{T}_{5n}^* \rightarrow \mathcal{T}_{5n+1}^* = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n-1})$ - условия

$$f(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n-1}) = \frac{1+16nx}{24n+1} < y \leq g(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n-1}) = \frac{1+(8n+1)x}{12n+2}.$$

Несложно проверить, что условия

$$y \leq \frac{1}{3}(1+x) \quad \text{и} \quad y > \frac{1+16nx}{24n+1}$$

не меняют области $\mathcal{T}_{5n}^*$. Далее, прямая $y = (1+(8n+1)x)/(12n+2)$ проходит через вершину $(1, \frac{4n+1}{6n+1})$ четырёхугольника $\mathcal{T}_{5n}^*$ и пересекается с прямой $y = (1+x)/3$ в точке $(\frac{12n-1}{12n+1}, \frac{8n}{12n+1})$. Из неравенств

$$\frac{6n-2}{6n-1} < \frac{12n-1}{12n+1} < \frac{6n+4}{6n+5}$$

заключаем, что прямая $y = (1+(8n+1)x)/(12n+2)$ делит $\mathcal{T}_{5n}^*$ на две части - $\mathcal{T}_{5n+1}^\circ$ (лежащую выше этой прямой) и $\mathcal{T}_{5n+1}^*$ (лежащую ниже этой прямой; см. рис. 6). Следовательно, $\mathcal{T}_{5n+1}^\circ$ - треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n-2}{6n-1}, \frac{4n-1}{6n-1}\right), \quad \left(1, \frac{4n+1}{6n+1}\right), \quad \left(\frac{12n-1}{12n+1}, \frac{8n}{12n+1}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+1}^\circ| = \frac{1}{2(6n-1)(6n+1)(12n+1)}.$$

Соответственно, $\mathcal{T}_{5n+1}^*$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{12n-1}{12n+1} < x \leq \frac{6n+4}{6n+5}, & \frac{1}{3}(1+x) < y \leq \frac{1+(8n+1)x}{12n+2}, \\ \frac{6n+4}{6n+5} < x \leq 1, & \frac{1+(4n+4)x}{6n+7} < y \leq \frac{1+(8n+1)x}{12n+2} \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{12n-1}{12n+1}, \frac{8n}{12n+1}\right), \quad \left(1, \frac{4n+1}{6n+1}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{6n+7}\right), \quad \left(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+1}^*| = \frac{42n+23}{2(6n+1)(6n+5)(6n+7)(12n+1)}.$$

При этом имеет место равенство площадей:

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{5n+1}^\circ| + |\mathcal{T}_{5n+1}^*| &= \frac{1}{2(6n-1)(6n+1)(12n+1)} + \frac{42n+23}{2(6n+1)(6n+5)(6n+7)(12n+1)} = \\ &= \frac{6(2n+1)}{(6n-1)(6n+1)(6n+5)(6n+7)} = |\mathcal{T}_{5n}^*| = |\mathcal{T}_{2n+2}^*|. \end{aligned}$$

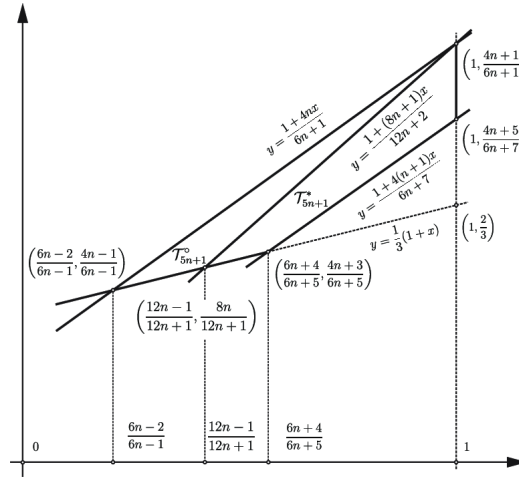


Рис. 6. Области $\mathcal{T}_{5n+1}^*$ и $\mathcal{T}_{5n+1}^\circ$.

При переходе $\mathcal{T}_{5n+1}^* \rightarrow \mathcal{T}_{5n+2}^\circ = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n-1}, 1)$ возникает дополнительное условие

$$f(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n-1}, 1) < y \leq g(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n-1}, 1),$$

которое с помощью Леммы 9 приводится к виду

$$\frac{1+(8n+3)x}{12n+5} < y \leq \frac{1}{3}(1+2x),$$

а при переходе $\mathcal{T}_{5n+1}^* \rightarrow \mathcal{T}_{5n+2}^* = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n})$ - условие

$$f(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n}) < y \leq g(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n})$$

или, что то же,

$$\frac{1 + (16n + 4)x}{24n + 7} < y \leq \frac{1 + (8n + 3)x}{12n + 5}.$$

Несложно проверить, что

$$\frac{1 + (8n + 1)x}{12n + 2} < \frac{1}{3}(1 + 2x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

что

$$\frac{1 + (16n + 4)x}{24n + 7} \leq \frac{1}{3}(1 + x) \quad \text{при} \quad x \leq \frac{24n + 4}{24n + 5}$$

(а значит, и при $(12n - 1)/(12n + 1) \leq x \leq (6n + 4)/(6n + 5)$) и что

$$\frac{1 + (16n + 4)x}{24n + 7} \leq \frac{1 + (4n + 4)x}{6n + 7} \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1$$

(а значит, и при $(6n + 4)/(6n + 5) \leq x \leq 1$). Следовательно, условия

$$y \leq \frac{1}{3}(1 + 2x), \quad y > \frac{1 + (16n + 4)x}{24n + 7}$$

не меняют вида области $\mathcal{T}_{5n+1}^*$. Далее, прямая $y = (1 + (8n + 3)x)/(12n + 5)$ пересекает прямые $y = (1 + x)/3$ и $x = 1$ в точках

$$\left(\frac{6n + 1}{6n + 2}, \frac{4n + 1}{6n + 2}\right) \quad \text{и} \quad \left(1, \frac{8n + 4}{12n + 5}\right)$$

соответственно, и потому делит $\mathcal{T}_{5n+1}^*$ на два четырёхугольника: $\mathcal{T}_{5n+2}^\circ$ и $\mathcal{T}_{5n+2}^*$ (рис. 7). Первый имеет вершинами точки

$$\left(\frac{12n - 1}{12n + 1}, \frac{8n}{12n + 1}\right), \quad \left(1, \frac{4n + 1}{6n + 1}\right), \quad \left(1, \frac{8n + 4}{12n + 5}\right), \quad \left(\frac{6n + 1}{6n + 2}, \frac{4n + 1}{6n + 2}\right);$$

его площадь равна

$$|\mathcal{T}_{5n+2}^\circ| = \frac{3(4n + 1)}{2(3n + 1)(6n + 1)(12n + 1)(12n + 5)}.$$

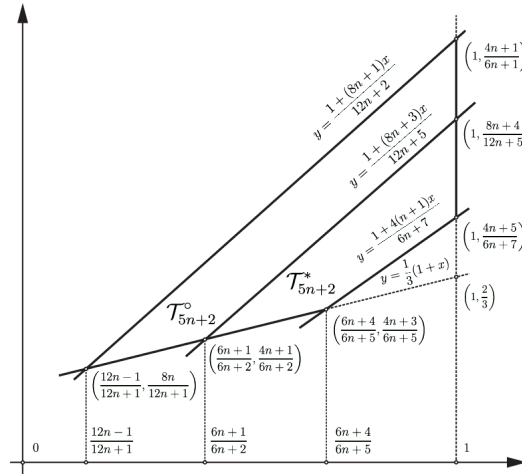


Рис. 7. Области $\mathcal{T}_{5n+2}^*$ и $\mathcal{T}_{5n+2}^\circ$.

Второй четырёхугольник $-\mathcal{T}_{5n+2}^*$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{6n+1}{6n+2} < x \leq \frac{6n+4}{6n+5}, & \frac{1}{3}(1+x) < y \leq \frac{1+(8n+3)x}{12n+5}, \\ \frac{6n+4}{6n+5} < x \leq 1, & \frac{1+(4n+4)x}{6n+7} < y \leq \frac{1+(8n+3)x}{12n+3}, \end{cases}$$

имеет вершинами точки

$$\left(\frac{6n+1}{6n+2}, \frac{4n+1}{6n+2}\right), \quad \left(1, \frac{8n+4}{12n+5}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{6n+7}\right), \quad \left(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5}\right),$$

а площадь его равна

$$|\mathcal{T}_{5n+2}^*| = \frac{5(3n+2)}{2(3n+1)(6n+5)(6n+7)(12n+5)}.$$

При этом

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{5n+2}^*| + |\mathcal{T}_{5n+2}^\circ| &= \\ &= \frac{3(4n+1)}{2(3n+1)(6n+1)(12n+1)(12n+5)} + \frac{5(3n+2)}{2(3n+1)(6n+5)(6n+7)(12n+5)} = \\ &= \frac{42n+23}{2(6n+1)(6n+5)(6n+7)(12n+1)} = |\mathcal{T}_{5n+1}^*|. \end{aligned}$$

Далее, при переходе $\mathcal{T}_{5n+2}^* \rightarrow \mathcal{T}_{5n+3}^\circ = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n}, 1)$ возникает дополнительное условие

$$f(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n}, 1) < y \leq g(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n}, 1),$$

которое с помощью Леммы 9 приводится к виду

$$\frac{1+(8n+5)x}{12n+8} < y \leq \frac{1}{3}(1+2x),$$

а при переходе $\mathcal{T}_{5n+2}^* \rightarrow \mathcal{T}_{5n+3}^* = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+1})$ - условие

$$f(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+1}) < y \leq g(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+1})$$

или, что то же, условие

$$\frac{1+(16n+8)x}{24n+13} < y \leq \frac{1+(8n+5)x}{12n+8}.$$

Несложно проверить, что

$$\frac{1+(8n+3)x}{12n+5} \leq \frac{1}{3}(1+2x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

так что условие $y \leq (1+2x)/3$ не меняет области $\mathcal{T}_{5n+2}^*$. Легко убедиться, что

$$\frac{1+(16n+8)x}{24n+13} \leq \frac{1+(4n+4)x}{6n+7} \quad \text{при всех} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

так что и условие $y > (1+(16n+8)x)/(24n+13)$ не меняет области $\mathcal{T}_{5n+2}^*$. Наконец, прямая $y = (1+(8n+5)x)/(12n+8)$ пересекает прямые $x = 1$ и $y = (1+x)/3$ в точках

$$\left(1, \frac{4n+3}{6n+4}\right), \quad \left(\frac{12n+5}{12n+7}, \frac{8n+4}{12n+7}\right).$$

Сравнивая их координаты с координатами вершин четырёхугольника $\mathcal{T}_{5n+2}^*$, находим:

$$\frac{6n+1}{6n+2} < \frac{12n+5}{12n+7} < \frac{6n+4}{6n+5}, \quad \frac{4n+5}{6n+7} < \frac{4n+3}{6n+7} < \frac{8n+4}{12n+5}.$$

Следовательно, прямая $y = (1 + (8n+5)x)/(12n+8)$ делит $\mathcal{T}_{5n+2}^*$ на два четырёхугольника: $|\mathcal{T}_{5n+3}^\circ|$ и $|\mathcal{T}_{5n+3}^*|$ (рис. 8). Первый имеет вершинами точки

$$\left(\frac{6n+1}{6n+2}, \frac{4n+1}{6n+2}\right), \quad \left(1, \frac{8n+4}{12n+5}\right), \quad \left(1, \frac{4n+3}{6n+4}\right), \quad \left(\frac{12n+5}{12n+7}, \frac{8n+4}{12n+7}\right)$$

и площадь, равную

$$|\mathcal{T}_{5n+3}^\circ| = \frac{3(2n+1)}{2(3n+1)(3n+2)(12n+5)(12n+7)}.$$

Второй имеет вершинами точки

$$\left(\frac{12n+5}{12n+7}, \frac{8n+4}{12n+7}\right), \quad \left(1, \frac{4n+3}{6n+4}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{6n+7}\right), \quad \left(\frac{6n+4}{6n+5}, \frac{4n+3}{6n+5}\right),$$

площадь, равную

$$|\mathcal{T}_{5n+3}^*| = \frac{9n+7}{2(3n+2)(6n+5)(6n+7)(12n+7)},$$

и задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{12n+5}{12n+7} < x \leq \frac{6n+4}{6n+5}, & \frac{1}{3}(1+x) < y \leq \frac{1+(8n+5)x}{12n+8}, \\ \frac{6n+4}{6n+5} < x \leq 1, & \frac{1+(4n+4)x}{6n+7} < y \leq \frac{1+(8n+5)x}{12n+8}. \end{cases}$$

При этом

$$\begin{aligned} & |\mathcal{T}_{5n+3}^\circ| + |\mathcal{T}_{5n+3}^*| = \\ &= \frac{3(2n+1)}{2(3n+1)(3n+2)(12n+5)(12n+7)} + \frac{9n+7}{2(3n+2)(6n+5)(6n+7)(12n+7)} = \\ &= \frac{5(3n+2)}{2(3n+1)(6n+5)(6n+7)(12n+5)} = |\mathcal{T}_{5n+2}^*|. \end{aligned}$$

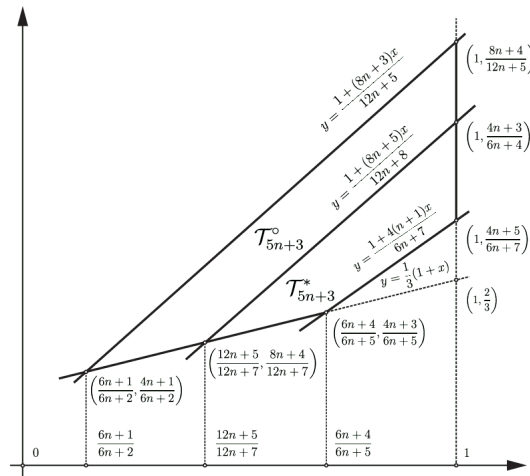


Рис. 8. Области $\mathcal{T}_{5n+3}^*$ и $\mathcal{T}_{5n+3}^\circ$.

При переходе $\mathcal{T}_{5n+3}^* \rightarrow \mathcal{T}_{5n+4}^\circ = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+1}, 1)$ возникает дополнительное условие

$$f(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+1}, 1) < y \leq g(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+1}, 1),$$

которое с помощью Леммы 9 приводится к виду

$$\frac{1 + (8n + 7)x}{12n + 11} < y \leq \frac{1}{3}(1 + 2x),$$

а при переходе $\mathcal{T}_{5n+3}^* \rightarrow \mathcal{T}_{5n+4}^* = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+2})$ - условие

$$f(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+2}) < y \leq g(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+2}),$$

т.е. условие

$$\frac{1 + (16n + 12)x}{24n + 19} < y \leq \frac{1 + (8n + 7)x}{12n + 11}.$$

Замечая, что

$$\frac{1 + (16n + 12)x}{24n + 19} \leq \frac{1 + (4n + 4)x}{6n + 7} \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

убеждаемся, что условие $y > (1 + (16n + 12)x)/(24n + 19)$ не меняет области $\mathcal{T}_{5n+3}^*$. Далее,

$$\frac{1 + (8n + 5)x}{12n + 8} \leq \frac{1}{3}(1 + 2x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

так что условие $y \leq (1 + 2x)/3$ также не меняет области $\mathcal{T}_{5n+3}^*$. Наконец, прямая $y = (1 + (8n + 7)x)/(12n + 11)$ пересекает прямые $x = 1$ и $y = (1 + x)/3$ в точках

$$\left(1, \frac{8n + 8}{12n + 11}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{6n + 4}{6n + 5}, \frac{4n + 3}{6n + 5}\right),$$

из которых последняя является вершиной четырёхугольника $\mathcal{T}_{5n+3}^*$. В силу неравенств для ординат точек, лежащих на прямой $x = 1$, а именно

$$\frac{4n + 5}{6n + 7} < \frac{8n + 8}{12n + 11} < \frac{4n + 3}{6n + 4},$$

заключаем, что прямая $y = (1 + (8n + 7)x)/(12n + 11)$ делит $\mathcal{T}_{5n+3}^*$ на две части: $\mathcal{T}_{5n+4}^\circ$ и $\mathcal{T}_{5n+4}^*$ (рис. 9). Первая из них - четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{12n + 5}{12n + 7}, \frac{8n + 4}{12n + 7}\right), \quad \left(1, \frac{4n + 3}{6n + 4}\right), \quad \left(1, \frac{8n + 8}{12n + 11}\right), \quad \left(\frac{6n + 4}{6n + 5}, \frac{4n + 3}{6n + 5}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+4}^\circ| = \frac{3(4n + 3)}{2(3n + 2)(6n + 5)(12n + 7)(12n + 11)}.$$

Вторая - треугольник, заданный неравенствами

$$\frac{6n + 4}{6n + 5} < x \leq 1, \quad \frac{1 + (4n + 4)x}{6n + 7} < y \leq \frac{1 + (8n + 7)x}{12n + 11}.$$

Он имеет вершинами точки

$$\left(\frac{6n + 4}{6n + 5}, \frac{4n + 3}{6n + 5}\right), \quad \left(1, \frac{8n + 8}{12n + 11}\right), \quad \left(1, \frac{4n + 5}{6n + 7}\right)$$

и площадь, равную

$$|\mathcal{T}_{5n+4}^*| = \frac{1}{2(6n+5)(6n+7)(12n+11)}.$$

При этом имеет место равенство площадей:

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{5n+4}^\circ| + |\mathcal{T}_{5n+4}^*| &= \\ &= \frac{3(4n+3)}{2(3n+2)(6n+5)(12n+7)(12n+11)} + \frac{1}{2(6n+5)(6n+7)(12n+11)} = \\ &= \frac{9n+7}{2(3n+2)(6n+5)(6n+7)(12n+7)} = |\mathcal{T}_{5n+3}^*|. \end{aligned}$$

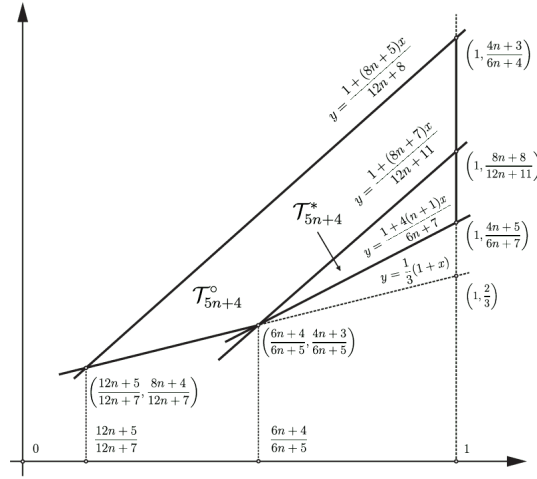


Рис. 9. Области $\mathcal{T}_{5n+4}^*$ и $\mathcal{T}_{5n+4}^\circ$.

Наконец, область $\mathcal{T}_{5n+5}^\circ = \mathcal{T}(2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+2}, 1)$ совпадает с областью $\mathcal{T}_{5n+4}^*$. Действительно, при переходе $\mathcal{T}_{5n+4}^* \rightarrow \mathcal{T}_{5n+5}^\circ$ возникает дополнительное условие

$$f(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+2}, 1) < y \leq g(x; 2, (4, 1)^n, 3, 2^{3n+2}, 1),$$

которое с помощью Леммы 9 принимает вид

$$\frac{1 + (8n+9)x}{12n+14} < y \leq \frac{1}{3}(1+2x).$$

Проверка показывает, что

$$\frac{1 + (8n+7)x}{12n+11} \leq \frac{1}{3}(1+2x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

так что условие $y \leq (1+2x)/3$ не меняет области $\mathcal{T}_{5n+4}^*$. Аналогично,

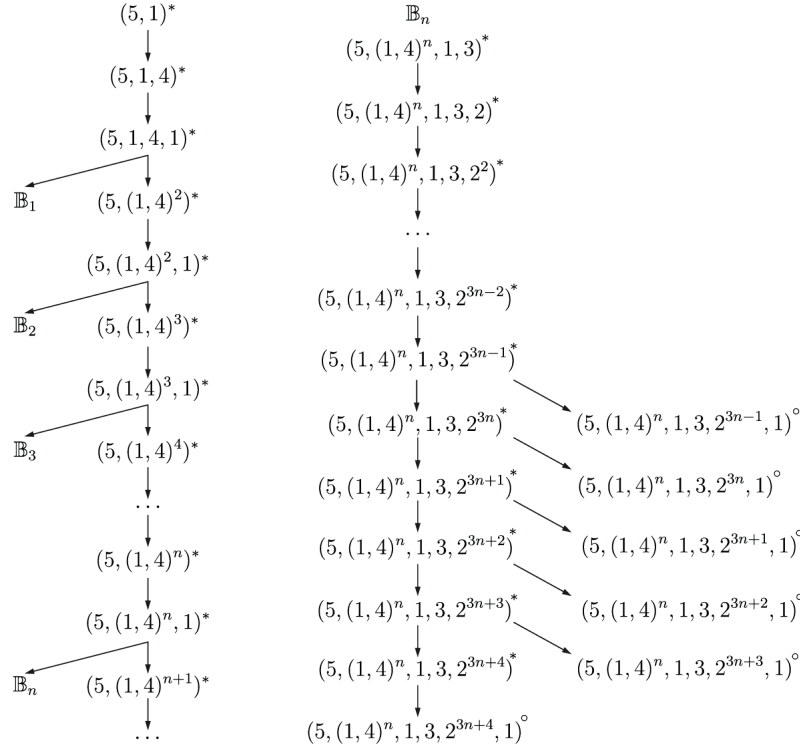
$$\frac{1 + (8n+9)x}{12n+14} \leq \frac{1 + (4n+4)x}{6n+7} \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Значит, и условие $y > (1 + (8n+9)x)/(12n+14)$ не меняет области $\mathcal{T}_{5n+4}^*$. Итак,

$$|\mathcal{T}_{5n+5}^\circ| = |\mathcal{T}_{5n+4}^*| = \frac{1}{2(6n+5)(6n+7)(12n+11)}.$$

Лемма 13 доказана. $\square$

ЛЕММА 14. Дерево $\mathbb{B}$ имеет вид, изображённый на рис. 10 (слева). Там же (справа) изображено поддереву $\mathbb{B}_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. При этом справедливы следующие формулы для площадей многоугольников, отвечающих вырожденным наборам поддереву $\mathbb{B}_n$:

Рис. 10. Схематический вид дерева $\mathbb{B}$ (слева) и его поддеревы $\mathbb{B}_n$ (справа).

$$|\mathcal{T}_{5n+3}^\circ| = |\mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n-1}, 1)| = \frac{1}{6(2n+1)(6n+1)(12n+5)};$$

$$|\mathcal{T}_{5n+4}^\circ| = |\mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n}, 1)| = \frac{9n+5}{6(2n+1)(3n+2)(6n+5)(12n+5)};$$

$$|\mathcal{T}_{5n+5}^\circ| = |\mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n+1}, 1)| = \frac{3(8n+7)}{2(3n+2)(6n+5)(12n+11)(12n+13)};$$

$$|\mathcal{T}_{5n+6}^\circ| = |\mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n+2}, 1)| = \frac{3(8n+9)}{2(3n+4)(6n+7)(12n+11)(12n+13)};$$

$$|\mathcal{T}_{5n+7}^\circ| = |\mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n+3}, 1)| = \frac{9n+13}{6(2n+3)(3n+4)(6n+7)(12n+19)};$$

$$|\mathcal{T}_{5n+8}^\circ| = |\mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n+4}, 1)| = \frac{1}{6(2n+3)(6n+11)(12n+19)}.$$

Доказательство Леммы 14 подобно доказательству предыдущего утверждения и опирается на формулы (40) и (42) Леммы 9. По этой причине для каждой из вершин поддерева $\mathbb{B}_n$ мы приведём лишь системы неравенств, задающих соответствующие многоугольные области, координаты вершин последних и формулы для их площадей. Пусть $\mathcal{T}(5, (1, 4)^n) = \mathcal{T}_{2n+1}^*$.

Переход $\mathcal{T}_{2n+1}^* \rightarrow \mathcal{T}_{2n+2}^* = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1)$ не меняет исходной области, так что $\mathcal{T}_{2n+2}^*$ есть треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n-1}{6n+1}, \frac{2n}{6n+1}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right), \quad \left(1, \frac{1}{3}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{2n+2}^*| = \frac{1}{3(6n+1)(6n+5)},$$

заданный системой неравенств

$$\frac{6n-1}{6n+1} < x \leq 1, \quad \frac{1}{6}(1+x) < y \leq \frac{1+(2n+1)x}{6n+5}.$$

Область $\mathcal{T}_{2n+3}^* = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3)$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{6n-1}{6n+1} < x \leq \frac{6n+5}{6n+7}, & \frac{1}{6}(1+x) < y \leq \frac{1+(2n+1)x}{6n+5}, \\ \frac{6n+5}{6n+7} < x \leq 1, & \frac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leq \frac{1+(2n+1)x}{6n+5} \end{cases}$$

и является четырёхугольником с вершинами

$$\left(\frac{6n-1}{6n+1}, \frac{2n}{6n+1}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right), \quad \left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{2n+3}^*| = \frac{24(n+1)}{(6n+1)(6n+5)(6n+7)(6n+11)}.$$

Область $\mathcal{T}_{2n+3}^{**} = \mathcal{T}(5, (1, 4)^{n+1})$ задаётся неравенствами

$$\frac{6n+5}{6n+7} < x \leq 1, \quad \frac{1}{6}(1+x) < y \leq \frac{1+(2n+3)x}{6n+11},$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right), \quad \left(1, \frac{1}{3}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{2n+3}^{**}| = \frac{1}{3(6n+7)(6n+11)}.$$

При этом $|\mathcal{T}_{2n+3}^*| + |\mathcal{T}_{2n+3}^{**}| = |\mathcal{T}_{2n+2}^*|$.

Каждая из областей $\mathcal{T}_{2n+3+m}^* = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^m)$, $0 \leq m \leq 3n-1$, совпадает с областью $\mathcal{T}_{2n+3}^*$.

Область $\mathcal{T}_{5n+3}^* = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n})$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{12n+1}{12n+5} < x \leq \frac{6n+5}{6n+7}, & \frac{1}{6}(1+x) < y \leq \frac{1+(4n+2)x}{12n+7}, \\ \frac{6n+5}{6n+7} < x \leq \frac{6n+2}{6n+3}, & \frac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leq \frac{1+(4n+2)x}{12n+7}, \\ \frac{6n+2}{6n+3} < x \leq 1, & \frac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leq \frac{1+(2n+1)x}{6n+5} \end{cases}$$

и представляет собой пятиугольник с вершинами³

$$\left(\frac{12n+1}{12n+5}, \frac{4n+1}{12n+5}\right), \quad \left(\frac{6n+2}{6n+3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right), \quad \left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right)$$

³Отметим, что области $\mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n})$, наряду с областями $\mathcal{T}(2^{3n}, 3, 1, (4, 1)^n, 5)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, отвечающие наборам, получающимся друг из друга симметричным отражением, – единственные из обнаруженных пятиугольников среди непустых областей $\mathcal{T}(\mathbf{k})$: все прочие являются треугольниками или четырёхугольниками. Есть ли среди областей $\mathcal{T}(\mathbf{k})$ многоугольники с шестью и более вершинами – неизвестно.

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+3}^*| = \frac{1}{6(2n+1)(6n+5)(12n+5)} + \frac{42n+43}{(6n+5)(6n+7)(6n+11)(12n+5)}.$$

Область $\mathcal{T}_{5n+3}^\circ = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n-1}, 1)$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{6n-1}{6n+1} < x \leq \frac{12n+1}{12n+5}, & \frac{1}{6}(1+x) < y \leq \frac{1+(2n+1)x}{6n+5}, \\ \frac{12n+1}{12n+5} < x \leq \frac{6n+2}{6n+3}, & \frac{1+(4n+2)x}{12n+7} < y \leq \frac{1+(2n+1)x}{6n+5} \end{cases}$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n-1}{6n+1}, \frac{2n}{6n+1}\right), \quad \left(\frac{6n+2}{6n+3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{12n+1}{12n+5}, \frac{4n+1}{12n+5}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+3}^\circ| = \frac{1}{6(2n+1)(6n+1)(12n+5)}.$$

При этом $|\mathcal{T}_{5n+3}^*| + |\mathcal{T}_{5n+3}^\circ| = |\mathcal{T}_{5n+2}^*| = |\mathcal{T}_{2n+3}^*|$.

Область $\mathcal{T}_{5n+4}^* = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n+1})$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{3n+1}{3n+2} < x \leq \frac{6n+5}{6n+7}, & \frac{1}{6}(1+x) < y \leq \frac{1+(4n+3)x}{12n+10}, \\ \frac{6n+5}{6n+7} < x \leq 1, & \frac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leq \frac{1+(4n+3)x}{12n+10} \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{3n+1}{3n+2}, \frac{2n+1}{6n+4}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right), \quad \left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+4}^*| = \frac{18n+19}{2(3n+2)(6n+5)(6n+7)(6n+11)}.$$

Область $\mathcal{T}_{5n+4}^\circ = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n}, 1)$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{12n+1}{12n+5} < x \leq \frac{3n+1}{3n+2}, & \frac{1}{6}(1+x) < y \leq \frac{1+(4n+2)x}{12n+7}, \\ \frac{3n+1}{3n+2} < x \leq \frac{6n+2}{6n+3}, & \frac{1+(4n+3)x}{12n+10} < y \leq \frac{1+(4n+2)x}{12n+7}, \\ \frac{6n+2}{6n+3} < x \leq 1, & \frac{1+(4n+3)x}{12n+10} < y \leq \frac{1+(2n+1)x}{6n+5} \end{cases}$$

и является четырёхугольником с вершинами

$$\left(\frac{12n+1}{12n+5}, \frac{4n+1}{12n+5}\right), \quad \left(\frac{6n+2}{6n+3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right), \quad \left(\frac{3n+1}{3n+2}, \frac{2n+1}{6n+4}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+4}^\circ| = \frac{9n+5}{6(2n+1)(3n+2)(6n+5)(12n+5)}.$$

При этом $|\mathcal{T}_{5n+4}^*| + |\mathcal{T}_{5n+4}^\circ| = |\mathcal{T}_{5n+3}^*|$

Область $\mathcal{T}_{5n+5}^* = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n+2})$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{12n+7}{12n+11} < x \leq \frac{6n+5}{6n+7}, & \frac{1}{6}(1+x) < y \leq \frac{1+(4n+4)x}{12n+13}, \\ \frac{6n+5}{6n+7} < x \leq 1, & \frac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leq \frac{1+(4n+4)x}{12n+13} \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{12n+7}{12n+11}, \frac{4n+3}{12n+11}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{12n+13}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right), \quad \left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+5}^*| = \frac{48n+55}{(6n+7)(6n+11)(12n+11)(12n+13)}.$$

Область $\mathcal{T}_{5n+5}^\circ = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n+1}, 1)$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{3n+1}{3n+2} < x \leq \frac{12n+7}{12n+11}, & \frac{1}{6}(1+x) < y \leq \frac{1+(4n+3)x}{12n+10}, \\ \frac{12n+7}{12n+11} < x \leq 1, & \frac{1+(4n+4)x}{12n+13} < y \leq \frac{1+(4n+3)x}{12n+10} \end{cases}$$

и является четырёхугольником с вершинами

$$\left(\frac{3n+1}{3n+2}, \frac{2n+1}{6n+4}\right), \quad \left(1, \frac{2n+2}{6n+5}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{12n+13}\right), \quad \left(\frac{12n+7}{12n+11}, \frac{4n+3}{12n+11}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+5}^\circ| = \frac{3(8n+7)}{2(3n+2)(6n+5)(12n+11)(12n+13)}.$$

При этом $|\mathcal{T}_{5n+5}^*| + |\mathcal{T}_{5n+5}^\circ| = |\mathcal{T}_{5n+4}^*|$.

Область $\mathcal{T}_{5n+6}^* = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n+3})$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{6n+5}{6n+7} < x \leq 1, & \frac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leq \frac{1+(4n+5)x}{12n+16} \end{cases}$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$\left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right), \quad \left(1, \frac{2n+3}{6n+8}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+6}^*| = \frac{1}{2(3n+4)(6n+7)(6n+11)}.$$

Область $\mathcal{T}_{5n+6}^\circ = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n+2}, 1)$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{12n+7}{12n+11} < x \leq \frac{6n+5}{6n+7}, & \frac{1}{6}(1+x) < y \leq \frac{1+(4n+3)x}{12n+10}, \\ \frac{6n+5}{6n+7} < x \leq 1, & \frac{1+(4n+5)x}{12n+6} < y \leq \frac{1+(4n+3)x}{12n+10} \end{cases}$$

и является четырёхугольником с вершинами

$$\left(\frac{12n+7}{12n+11}, \frac{4n+3}{12n+11}\right), \quad \left(1, \frac{4n+5}{12n+13}\right), \quad \left(1, \frac{2n+3}{6n+8}\right), \quad \left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+6}^\circ| = \frac{3(8n+9)}{2(3n+4)(6n+7)(12n+11)(12n+13)}.$$

При этом $|\mathcal{T}_{5n+6}^*| + |\mathcal{T}_{5n+6}^\circ| = |\mathcal{T}_{5n+5}^*|$.

Область $\mathcal{T}_{5n+7}^\circ = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n+3}, 1)$ задаётся неравенствами

$$\begin{cases} \frac{6n+5}{6n+7} < x \leq \frac{6n+8}{6n+9}, & \frac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leq \frac{1+(4n+5)x}{12n+16}, \\ \frac{6n+8}{6n+9} < x \leq 1, & \frac{1+(4n+6)x}{12n+19} < y \leq \frac{1+(4n+5)x}{12n+16} \end{cases}$$

и является четырёхугольником с вершинами

$$\left(\frac{6n+5}{6n+7}, \frac{2n+2}{6n+7}\right), \quad \left(1, \frac{2n+3}{6n+8}\right), \quad \left(1, \frac{4n+7}{12n+19}\right), \quad \left(\frac{6n+8}{6n+9}, \frac{1}{3}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+7}^\circ| = \frac{9n+13}{6(2n+3)(3n+4)(6n+7)(12n+19)}.$$

Область $\mathcal{T}_{5n+7}^* = \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n+4})$ задаётся неравенствами

$$\frac{6n+8}{6n+9} < x \leq 1, \quad \frac{1+(2n+3)x}{6n+11} < y \leq \frac{1+(4n+6)x}{12n+19},$$

и является треугольником с вершинами

$$\left(\frac{6n+8}{6n+9}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(1, \frac{4n+7}{12n+19}\right), \quad \left(1, \frac{2n+4}{6n+11}\right)$$

и площадью

$$|\mathcal{T}_{5n+7}^*| = \frac{1}{6(2n+3)(6n+11)(12n+19)}.$$

Наконец, при переходе $\mathcal{T}_{5n+7}^* \rightarrow \mathcal{T}(5, (1, 4)^n, 1, 3, 2^{3n+4}, 1) = \mathcal{T}_{5n+8}^\circ$ возникает дополнительное условие

$$\frac{1+(4n+7)x}{12n+22} < y \leq \frac{1}{3}(1+x),$$

которое не меняет вида области $\mathcal{T}_{5n+7}^*$. Следовательно, $\mathcal{T}_{5n+8}^\circ$ совпадает с $\mathcal{T}_{5n+7}^*$. В частности,

$$|\mathcal{T}_{5n+8}^\circ| = \frac{1}{6(2n+3)(6n+11)(12n+19)}.$$

Лемма 14 доказана. $\square$

ЛЕММА 15. *Дерево $\mathbb{C}$ имеет вид, изображённый на рис. 11 (слева). Если $n = 3t$, то поддереву $\mathbb{C}_n$ имеет вид, изображённый на рис. 11 (справа), причём справедливы следующие формулы для площадей многоугольников, отвечающих вырожденным наборам поддереву $\mathbb{C}_n$:*

$$|\mathcal{T}_{5m+2}^\circ| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m}, 3, (1, 4)^{m-1}, 1, 5)| = \frac{9m+4}{6(2m+1)(3m+1)(6m+1)(12m+7)};$$

$$|\mathcal{T}_{5m+3}^\circ| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m}, 3, (1, 4)^m, 2)| = \frac{3(2m+1)}{2(3m+1)(3m+2)(12m+5)(12m+7)};$$

$$|\mathcal{T}_{5m+4}^\circ| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m}, 3, (1, 4)^m, 1, 5)| = \frac{9m+5}{6(2m+1)(3m+2)(6m+5)(12m+5)}.$$

Если $n = 3t + 1$, то поддерево $\mathbb{C}_n$ имеет вид, изображённый на рис. 12 (вверху), причём справедливы следующие формулы для площадей многоугольников, отвечающих вырожденным наборам поддерева $\mathbb{C}_n$:

$$|\mathcal{T}_{5m+3}^\circ| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+1}, 3, (1, 4)^{m-1}, 1, 5)| = \frac{1}{6(2m+1)(6m+5)(12m+7)};$$

$$|\mathcal{T}_{5m+4}^\circ| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+1}, 3, (1, 4)^m, 2)| = \frac{3(4m+3)}{2(3m+2)(6m+5)(12m+7)(12m+11)};$$

$$|\mathcal{T}_{5m+5}^\circ| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+1}, 3, (1, 4)^m, 1, 5)| = \frac{3(8m+7)}{2(3m+2)(6m+5)(12m+11)(12m+13)};$$

$$|\mathcal{T}_{5m+6}^\circ| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+1}, 3, (1, 4)^{m+1}, 2)| = \frac{1}{2(6m+5)(6m+7)(12m+13)}.$$

Если, наконец, $n = 3t + 2$, то поддерево $\mathbb{C}_n$ имеет вид, изображённый на рис. 12 (внизу), причём справедливы следующие формулы для площадей многоугольников, отвечающих вырожденным наборам поддерева $\mathbb{C}_n$:

$$|\mathcal{T}_{5m+5}^\circ| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+2}, 3, (1, 4)^m, 2)| = \frac{1}{2(6m+5)(6m+7)(12m+11)};$$

$$|\mathcal{T}_{5m+6}^\circ| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+2}, 3, (1, 4)^m, 1, 5)| = \frac{3(8m+9)}{2(3m+4)(6m+7)(12m+11)(12m+13)};$$

$$|\mathcal{T}_{5m+7}^\circ| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+2}, 3, (1, 4)^{m+1}, 2)| = \frac{3(4m+5)}{2(3m+4)(6m+7)(12m+13)(12m+17)};$$

$$|\mathcal{T}_{5m+8}^\circ| = |\mathcal{T}(1, 2^{3m+2}, 3, (1, 4)^{m+1}, 1, 5)| = \frac{1}{6(2m+3)(6m+7)(12m+17)}.$$

Доказательство Леммы 15 проводится подобно доказательству Леммы 13, с использованием формул (9), (40) и (42).

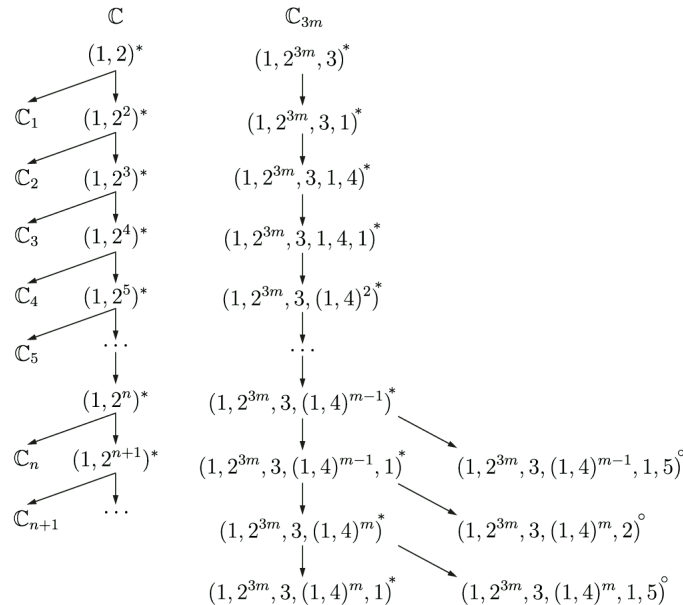


Рис. 11. Схематический вид дерева $\mathbb{C}$ (слева) и его поддерева $\mathbb{C}_n$ в случае $n = 3t$ (справа).

5. Доказательство Теоремы 2

Отправляясь от построенного при доказательстве Теоремы 1 перечня наборов $\mathcal{A}_6^*$, построим указанным там способом и перечень $\mathcal{A}_7^*$. В него войдут наборы

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} (2, (4, 1)^3), \\ (2, (4, 1)^2, 3, 2), \\ (2, 4, 1, 3, 2^3), \end{array} \right. \quad (b) \left\{ \begin{array}{l} (5, (1, 4)^3), \\ (5, (1, 4)^2, 1, 3), \\ (5, 1, 4, 1, 3, 2^2), \\ (5, 1, 3, 2^4), \end{array} \right. \quad (c) \left\{ \begin{array}{l} (1, 2^6), \\ (1, 2^5, 3), \\ (1, 2^4, 3, 1), \\ (1, 2^3, 3, 1, 4), \\ (1, 2^2, 3, 1, 4, 1). \end{array} \right. \quad (51)$$

Условимся называть наборы, отвечающие вершинам деревьев $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, и $\mathbb{C}$, наборами A -, B - и C -типов соответственно. Тогда несложно видеть, что наборы (51 а) - это наборы A -типа, наборы (51 б) - наборы B -типа, а наборы (51 с) - наборы C -типа. Те же типы будут иметь и все наборы, порождённые множеством (51 а-с).

Таким образом, для нахождения величины $\nu(r; 3)$, $r \geq 8$, достаточно сложить площади всех областей $\mathcal{T}(\mathbf{k})$, отвечающих всем листьям деревьев $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, и $\mathbb{C}$, которые находятся на r -м ярусе. Все вырожденные наборы помечены в деревьях знаком « $\circ$ ». Поэтому вычисление $\nu(r; 3)$ проводится по следующей схеме. Задавшись числом r , в каждом из перечней вырожденных наборов из Лемм 13-15 отыскиваем те, что имеют длину r , и суммируем их площади.

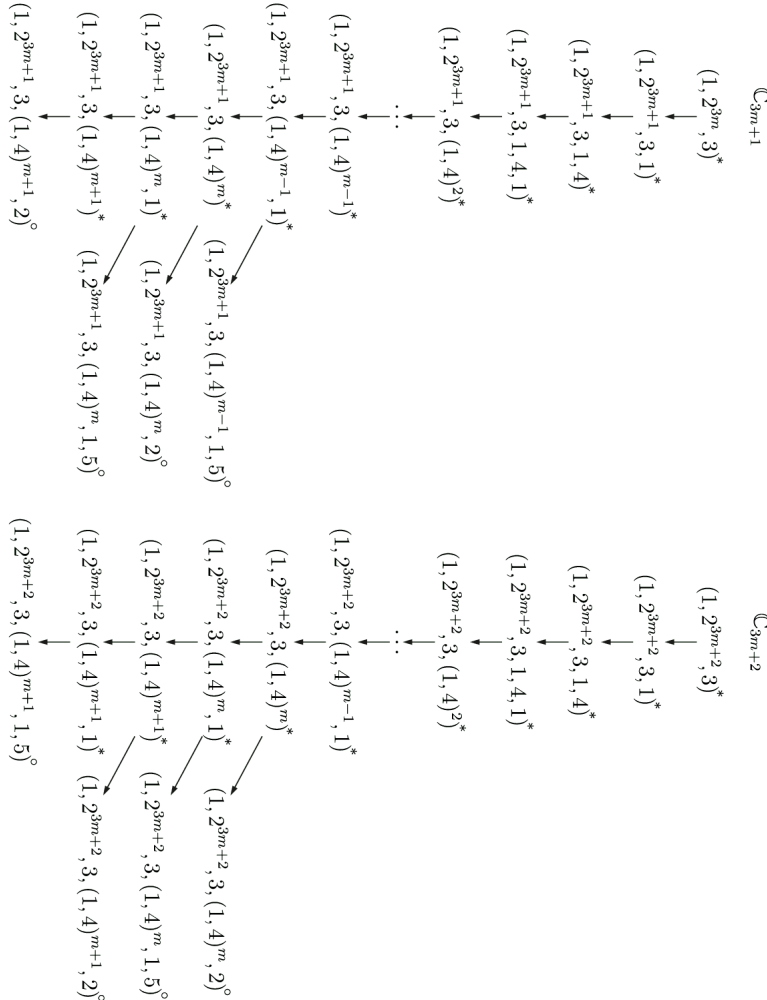


Рис. 12. Схематический вид поддеревьев $\mathbb{C}_n$ в случаях $n = 3m + 1$ (вверху) и $n = 3m + 2$ (внизу).

Пусть, например, $r = 5m$, где $m \geq 2$. Тогда имеется единственный вырожденный набор A -типа длины r , а именно набор $(2, (4, 1)^{m-1}, 3, 2^{3(m-1)+2}, 1)$, причём площадь соответствующей области $\mathcal{T}_{5m}^\circ = \mathcal{T}_{5(m-1)+5}^\circ$ составляет по Лемме 13

$$\frac{1}{2(6(m-1)+5)(6(m-1)+7)(12(m-1)+11)} = \frac{1}{2(6m-1)(6m+1)(12m-1)}.$$

Аналогично, единственным вырожденным набором B -типа длины r является набор

$$(5, (1, 4)^{m-1}, 1, 3, 2^{3(m-1)+1}, 1),$$

причём

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{5m}^\circ| = |\mathcal{T}_{5(m-1)+5}^\circ| &= \frac{3(8(m-1)+7)}{2(3(m-1)+2)(6(m-1)+5)(12(m-1)+11)(12(m-1)+13)} = \\ &= \frac{3(8m-1)}{2(3m-1)(6m-1)(12m-1)(12m+1)}. \end{aligned}$$

Далее, вырожденными наборами C -типа длины r будут наборы

$$(1, 2^{3(m-1)+1}, 3, (1, 4)^{m-1}, 1, 5), \quad (1, 2^{3(m-1)+2}, 3, (1, 4)^{m-1}, 2),$$

которым отвечают области с площадями

$$\frac{3(8m-1)}{2(3m-1)(6m-1)(12m-1)(12m+1)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2(6m-1)(6m+1)(12m-1)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu(5m; 3) &= \frac{6(8m-1)}{2(3m-1)(6m-1)(12m-1)(12m+1)} + \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m-1)} = \\ &= P_{01}(m) + P_{02}(m). \end{aligned}$$

Далее, если $r = 5m + 1$, где $m \geq 1$, то вырожденными наборами длины r будут

$$\begin{aligned} (2, (4, 1)^m, 3, 2^{3m-2}, 1) \quad (A\text{-тип}), \quad (5, (1, 4)^{m-1}, 1, 3, 2^{3(m-1)+2}, 1) \quad (B\text{-тип}), \\ (1, 2^{3(m-1)+1}, 3, (1, 4)^m, 2) \quad (C\text{-тип}), \quad (1, 2^{3(m-1)+2}, 3, (1, 4)^{m-1}, 1, 5) \quad (C\text{-тип}). \end{aligned}$$

Отвечающие им площади равны, соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(6m-1)(6m+1)(12m+1)}, \quad \frac{3(8m+1)}{2(3m+1)(6m+1)(12m-1)(12m+1)}, \\ \frac{1}{2(6m-1)(6m+1)(12m+1)}, \quad \frac{3(8m+1)}{2(3m+1)(6m+1)(12m-1)(12m+1)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu(5m+1; 3) &= \frac{6(8m+1)}{2(3m+1)(6m+1)(12m-1)(12m+1)} + \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m+1)} = \\ &= P_{11}(m) + P_{12}(m). \end{aligned}$$

Если $r = 5m + 2$, $m \geq 2$, то вырожденными наборами длины r будут

$$(2, (4, 1)^m, 3, 2^{3m-1}, 1) \quad (A - \text{тип}), \quad (5, (1, 4)^{m-1}, 1, 3, 2^{3(m-1)+3}, 1) \quad (B - \text{тип}), \\ (1, 2^{3m}, 3, (1, 4)^{m-1}, 1, 5) \quad (C - \text{тип}), \quad (1, 2^{3(m-1)+2}, 3, (1, 4)^m, 2) \quad (C - \text{тип}).$$

Отвечающие им площади равны, соответственно,

$$\frac{3(4m+1)}{2(3m+1)(6m+1)(12m+1)(12m+5)}, \quad \frac{9m+4}{6(2m+1)(3m+1)(6m+1)(12m+7)}, \\ \frac{9m+4}{6(2m+1)(3m+1)(6m+1)(12m+7)}, \quad \frac{3(4m+1)}{2(3m+1)(6m+1)(12m+1)(12m+5)}.$$

Следовательно,

$$\nu(5m+2; 3) = \frac{6(4m+1)}{2(3m+1)(6m+1)(12m+1)(12m+5)} + \\ + \frac{2(9m+4)}{6(2m+1)(3m+1)(6m+1)(12m+7)} = P_{21}(m) + P_{22}(m)$$

Если $r = 5m + 3$, $m \geq 1$, то вырожденными наборами длины r будут

$$(2, (4, 1)^m, 3, 2^{3m}, 1) \quad (A - \text{тип}), \quad (5, (1, 4)^m, 1, 3, 2^{3m-1}, 1) \quad (B - \text{тип}), \\ (5, (1, 4)^{m-1}, 1, 3, 2^{3(m-1)+4}, 1) \quad (B - \text{тип}), \quad (1, 2^{3m}, 3, (1, 4)^m, 2) \quad (C - \text{тип}), \\ (1, 2^{3m+1}, 3, (1, 4)^{m-1}, 1, 5) \quad (C - \text{тип}), \quad (1, 2^{3(m-1)+2}, 3, (1, 4)^m, 1, 5) \quad (C - \text{тип}).$$

Отвечающие им площади равны, соответственно,

$$\frac{3(2m+1)}{2(3m+1)(3m+2)(12m+5)(12m+7)}, \quad \frac{1}{6(2m+1)(6m+1)(12m+5)}, \\ \frac{1}{6(2m+1)(6m+5)(12m+7)}, \quad \frac{3(2m+1)}{2(3m+1)(3m+2)(12m+5)(12m+7)}, \\ \frac{1}{6(2m+1)(6m+5)(12m+7)}, \quad \frac{1}{6(2m+1)(6m+1)(12m+5)},$$

так что

$$\nu(5m+3; 3) = \frac{6(2m+1)}{2(3m+1)(3m+2)(12m+5)(12m+7)} + \frac{2}{3(2m+1)(6m+1)(12m+5)} + \\ + \frac{2}{3(2m+1)(6m+5)(12m+7)} = P_{31}(m) + P_{32}(m) + P_{33}(m).$$

Наконец, если $r = 5m + 4$, $m \geq 1$, то вырожденными наборами длины r будут

$$(2, (4, 1)^m, 3, 2^{3m+1}, 1) \quad (A - \text{тип}), \quad (5, (1, 4)^m, 1, 3, 2^{3m}, 1) \quad (B - \text{тип}), \\ (1, 2^{3m}, 3, (1, 4)^m, 1, 5) \quad (C - \text{тип}), \quad (1, 2^{3m+1}, 3, (1, 4)^m, 2) \quad (C - \text{тип}).$$

Отвечающие им площади равны, соответственно,

$$\frac{3(4m+3)}{2(3m+2)(6m+5)(12m+7)(12m+11)}, \quad \frac{9m+5}{6(2m+1)(3m+2)(6m+5)(12m+5)}, \\ \frac{9m+5}{6(2m+1)(3m+2)(6m+5)(12m+5)}, \quad \frac{3(4m+3)}{2(3m+2)(6m+5)(12m+7)(12m+11)},$$

так что

$$\begin{aligned} \nu(5m+4; 3) &= \\ &= \frac{6(4m+3)}{2(3m+2)(6m+5)(12m+7)(12m+11)} + \frac{2(9m+5)}{(6m+3)(6m+4)(6m+5)(12m+5)} = \\ &= P_{41}(m) + P_{42}(m). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана. $\square$

6. Формула трёх авторов

Установим соответствие между основным результатом работы [8] и полученной выше формулой для доли $\nu(r; D)$ (следствие Леммы 7). Для этого нам потребуется следующее определение.

Пусть заданы число $Q \geq 2$ и примитивная точка (q_0, q_1) из «раздутого» треугольника Фарея QT . Определим последовательно числа $k_1, \dots, k_\ell$ и $q_2, \dots, q_{\ell+1}$ по формулам

$$k_i = \left[\frac{q_{i-1} + Q}{q_i} \right], \quad q_{i+1} = k_i q_i - q_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \ell.$$

Тогда величины k_i, q_i будут связаны друг с другом системой (5) (с $r = \ell$). Будем говорить в этом случае, что наборы $\mathbf{k}_\ell = (k_1, \dots, k_\ell)$ и $\mathbf{q}_{\ell+2} = (q_0, \dots, q_{\ell+1})$ порождены тройкой Q, q_0, q_1 .

Если при этом примитивная точка лежит в области $QT(\mathbf{k}_\ell)$, то в силу Леммы 1 в ряду Φ_Q найдётся кортеж из $(\ell + 2)$ последовательных дробей Фарея со знаменателями $q_0, \dots, q_{\ell+1}$.

Для определённой выше величины $\varrho(r, D, \bar{\mathbf{c}})$ в [8, следствие теоремы 2] получена формула вида

$$\varrho(r, D, \bar{\mathbf{c}}) = \frac{2}{D^2} \prod_{p|D} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \sum_{\mathbf{k}_{r-2} \in \mathcal{K}^{r-2}(\bar{\mathbf{c}}, D)} |\mathcal{T}(\mathbf{k}_{r-2})|. \quad (52)$$

В ней $\bar{\mathbf{c}} = (c_0, \dots, c_{r-1})$ - заданный вектор вычетов по модулю D , а $\mathcal{K}^{r-2}(\bar{\mathbf{c}}, D)$ - множество наборов $\mathbf{k}_{r-2} = (k_1, \dots, k_{r-2})$, которые порождаются некоторой тройкой Q, q_0, q_1 , причём набор $\mathbf{q} = (q_0, \dots, q_{r-1})$, порождённой той же тройкой, составлен из знаменателей некоторых r последовательных дробей ряда Φ_Q и удовлетворяет при этом условиям $q_i \equiv c_i \pmod{D}$, $i = 0, 1, \dots, r-1$.

Замечая, что

$$\lim_{Q \rightarrow +\infty} \frac{N(Q)}{N(Q, D)} = D \prod_{p|D} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

и вспоминая определение $\varrho(\cdot)$, заключаем, что $\nu(r; D)$ допускает следующее выражение:

$$\nu(r; D) = D \prod_{p|D} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \sum'_{\bar{\mathbf{c}}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}^r(\bar{\mathbf{c}}, D)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})|, \quad (53)$$

где $\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{c}}_{r+2} = (c_0, \dots, c_{r+1})$, а штрих означает суммирование по всем таким наборам с условиями

$$c_0 \equiv c_{r+1} \equiv 0 \pmod{D}, \quad c_i \not\equiv 0 \pmod{D}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Так из (52) и (53) находим:

$$\nu(r; D) = \frac{2}{\varphi(D)} \sum'_{\bar{\mathbf{c}}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}^r(\bar{\mathbf{c}}, D)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})|. \quad (54)$$

Покажем, что формула из следствия Леммы 7 и формула (54) эквивалентны или, что то же,

$$\frac{1}{\varphi(D)} \sum'_{\bar{c}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}^r(\bar{c}, D)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})| = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^0(D)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})|.$$

Докажем сначала, что всякий набор $\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^0(D)$ встретится в двойной сумме в левой части (52) ровно $\varphi(D)$ раз. Заметим сперва, что если $\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^0(D)$ и область $\mathcal{T}(\mathbf{k})$ непуста, то при достаточно большом Q в «раздутой» области $Q\mathcal{T}(\mathbf{k})$ найдётся примитивная точка (q_0, q_1) с условием $q_0 \equiv 0 \pmod{D}$, $q_1 \equiv c_1 \pmod{D}$, где c_1 - произвольное число из приведённой системы вычетов по модулю D .

Действительно, если $|\mathcal{T}(\mathbf{k})| > 0$, то внутри $\mathcal{T}(\mathbf{k})$ найдётся квадрат со стороной ε , где $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{k}) > 0$ - достаточно малая постоянная. Соответственно, в «раздутой» области $Q\mathcal{T}(\mathbf{k})$ найдётся квадрат со стороной $Q\varepsilon$. В нём при любом c_1 с условием Н.О.Д. $(c_1, D) = 1$ можно указать по крайней мере одну примитивную точку (q_0, q_1) с требуемым свойством. Действительно, если $H = Q\varepsilon$ и $X < q_0 \leq X + H$, $Y < q_1 \leq Y + H$ - такой квадрат, то для числа n искомым примитивных точек справедлива формула:

$$n = \sum_{\substack{X < q_0 \leq X+H \\ q_0 \equiv 0 \pmod{D}}} \sum_{\substack{Y < q_1 \leq Y+H \\ q_1 \equiv c_1 \pmod{D}}} \sum_{\delta | \text{Н.О.Д.}(q_0, q_1)} \mu(\delta) = \sum_{\delta \leq \Delta} \mu(\delta) \sum_{\substack{X < q_0 \leq X+H \\ q_0 \equiv 0 \pmod{D} \\ q_0 \equiv 0 \pmod{\delta}}} 1 \sum_{\substack{Y < q_1 \leq Y+H \\ q_1 \equiv c_1 \pmod{D} \\ q_1 \equiv 0 \pmod{\delta}}} 1,$$

где $\Delta = \min(X, Y) + H$. Ввиду условия Н.О.Д. $(c_1, D) = 1$ имеем: Н.О.Д. $(\delta, D) = 1$. Заменяя суммы по q_0 и q_1 на величины

$$\frac{H}{\delta D} + \theta_0, \quad \frac{H}{\delta D} + \theta_1, \quad |\theta_0|, |\theta_1| \leq 1,$$

после несложных преобразований получим:

$$n = \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{H}{D} \right)^2 \prod_{p|D} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} + O\left(\frac{H^2}{D^2 \Delta} \right) + O(\Delta) + O\left(\frac{H}{D} \ln \Delta \right).$$

Правая часть этого равенства положительна, если только H удовлетворяет неравенству $H > cD\sqrt{Q}$, где c - достаточно большая абсолютная постоянная. Это условие, очевидно, выполнено при всех $Q \geq Q_0(\mathbf{k}, D)$.

Итак, пусть $(q_0, q_1) \in Q\mathcal{T}(\mathbf{k})$ - примитивная точка с требуемыми свойствами. В силу Леммы 1, пара q_0, q_1 порождает в Φ_Q кортеж из $(r+2)$ последовательных дробей со знаменателями $q_0, \dots, q_{r+1}$ такими, что справедливы равенства (5) и, следовательно, формулы (12), т.е.

$$q_{i+1} = q_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) - q_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i), \quad i = 1, \dots, r.$$

Определяя вычеты $c_2, \dots, c_{r+1}$ из сравнений

$$c_{i+1} \equiv q_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) - q_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i) \equiv c_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) \pmod{D},$$

будем иметь: $q_{i+1} \equiv c_{i+1} \pmod{D}$, $i = 1, \dots, r$. В частности,

$$c_i \not\equiv 0 \pmod{D} \quad \text{для каждого } i, \quad 1 \leq i \leq r, \quad \text{и} \quad c_{r+1} \equiv 0 \pmod{D}.$$

Таким образом, исходный набор $\mathbf{k}$ встретится во внутренней сумме в (54), отвечающей вектору $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{r+2} = (c_0, \dots, c_{r+1})$. Однако этот вектор при фиксированном $\mathbf{k}$ полностью определяется заданием единственной компоненты c_1 , которая может быть выбрана $\varphi(D)$ способами. Значит, набор $\mathbf{k}$ встретится в левой части (54) ровно $\varphi(D)$ раз.

Обратно, покажем, что всякий набор $\mathbf{k}$ в двойной сумме принадлежит множеству $\mathcal{A}_r^0(D)$. Действительно, для такого набора найдётся вектор $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_{r+1})$ условиями $c_0 \equiv c_{r+1} \equiv 0 \pmod{D}$, $c_i \not\equiv 0 \pmod{D}$, $i = 1, \dots, r$, найдутся число Q и примитивная точка (q_0, q_1) области $QT(\mathbf{k})$ такие, что $q_0 \equiv c_0 \equiv 0 \pmod{D}$, $q_1 \equiv c_1 \pmod{D}$ и набор $q_0, \dots, q_{r+1}$, порождённый с помощью $\mathbf{k}$ тройкой Q, q_0, q_1 , будет удовлетворять сравнениям $q_{i+1} \equiv c_{i+1} \pmod{D}$, $i = 1, \dots, r$ и вместе с тем будет набором из знаменателей некоторого кортежа из $(r+2)$ оседних дробей Φ_Q . Но тогда

$$q_{i+1} = q_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) - q_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i) \equiv c_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) \equiv c_{i+1} \pmod{D},$$

откуда, ввиду взаимной простоты c_1 и D , будем иметь:

$$\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) \equiv c_{i+1} c_1^* \pmod{D}.$$

Следовательно, $\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) \not\equiv 0 \pmod{D}$ при $i = 1, \dots, r-1$, и $\mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) \equiv 0 \pmod{D}$, так что $\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^0(D)$.

7. Случай $D = 2$

Последний раздел работы [8] содержит примеры вычисления величин $\varrho(r, D, \bar{\mathbf{c}})$ для некоторых векторов $\mathbf{c}$ в случае $D = 2$. В частности, авторами [8] найдены явные значения величин $\varrho(r, 2, \bar{\mathbf{c}}_r)$ для $r = 3, 4, 5$ и $\bar{\mathbf{c}}_r = (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{r-2}, 0)$, а именно:

$$\varrho(3, 2, \bar{\mathbf{c}}_3) = 2 - \frac{8}{3} \ln 2, \quad \varrho(4, 2, \bar{\mathbf{c}}_4) = \frac{16}{3} \ln 2 - \frac{1132}{315}, \quad \varrho(5, 2, \bar{\mathbf{c}}_5) = \frac{599}{315} - \frac{8}{3} \ln 2.$$

Домножением на коэффициент

$$D \prod_{p|D} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = 3$$

из них получаются значения для долей $\nu(r; 2)$:

$$\nu(1; 2) = 6 - 8 \ln 2 = 0.45482\,25555 \dots,$$

$$\nu(2; 2) = 16 \ln 2 - \frac{1132}{105} = 0.30940\,25080 \dots,$$

$$\nu(3; 2) = \frac{599}{105} - 8 \ln 2 = 0.15958\,44603 \dots$$

Эти вычисления могут быть продолжены и далее по способу, предложенному выше при нахождении долей $\nu(r; 3)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы равенства:*

$$\nu(4; 2) = \frac{2}{45}, \quad \nu(r; 2) = \frac{8}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}, \quad \text{если } r \geq 5.$$

В частности,

$$\begin{aligned}
 \nu(5; 2) &= \frac{8}{693} = 0.01154\,40115\dots & \nu(11; 2) &= \frac{8}{9\,177} = 0.00087\,17445\dots \\
 \nu(6; 2) &= \frac{8}{1\,287} = 0.00621\,60062\dots & \nu(12; 2) &= \frac{8}{12\,075} = 0.00066\,25258\dots \\
 \nu(7; 2) &= \frac{8}{2\,145} = 0.00372\,96037\dots & \nu(13; 2) &= \frac{8}{15\,525} = 0.00051\,52979\dots \\
 \nu(8; 2) &= \frac{8}{3\,315} = 0.00241\,32730\dots & \nu(14; 2) &= \frac{8}{19\,575} = 0.00040\,86845\dots \\
 \nu(9; 2) &= \frac{8}{4\,845} = 0.00165\,11868\dots & \nu(15; 2) &= \frac{8}{24\,273} = 0.00032\,95843\dots \\
 \nu(10; 2) &= \frac{8}{6\,783} = 0.00117\,94191\dots & \nu(16; 2) &= \frac{8}{29\,667} = 0.00026\,96598\dots
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся лишь кратким изложением, поскольку вывод формул для $\nu(r; 2)$ следует, с одной стороны, тому же порядку, что и вывод формул для $\nu(r; 3)$ при $r \geq 8$ (Теорема 2). С другой стороны, объём вычислений при $D = 2$ оказывается существенно меньше, чем в случае $D = 3$.

Как и выше, будем последовательно строить множества $\mathcal{A}_r^0 = \mathcal{A}_r^0(2)$ и $\mathcal{A}_r^* = \mathcal{A}_r^*(2)$, $r \geq 1$.

Случай $r = 1$. $\mathcal{A}_r^*$ состоит из наборов вида (k_1) , $k_1 \equiv 1 \pmod{2}$, а множество $\mathcal{A}_r^0$ - из наборов вида (k_1) , $k_1 \equiv 0 \pmod{2}$.

Случай $r = 2$. Множество $\mathcal{A}_r^*$ состоит из наборов вида (k_1, k_2) , где $k_1 \equiv 1 \pmod{2}$, $k_2 \equiv 0 \pmod{2}$. Из них непустым областям $\mathcal{T}(k_1, k_2)$ отвечают лишь набор $(3, 2)$ и наборы $(1, k_2)$, $k_2 \equiv 0 \pmod{2}$, $k_2 \geq 2$. Множество $\mathcal{A}_r^0$ состоит из наборов вида (k_1, k_2) , где $k_1, k_2 \equiv 1 \pmod{2}$. Из них непустым областям отвечают лишь наборы $(k_1, 1)$, $k_1 \equiv 1 \pmod{2}$, $k_1 \geq 3$, и наборов $(1, k_2)$, $k_2 \equiv 1 \pmod{2}$, $k_2 \geq 3$.

Случай $r = 3$. Множество $\mathcal{A}_r^*$ оказывается конечным и состоит из четырёх наборов:

$$(1, 2, 2), \quad (1, 2, 4), \quad (1, 4, 2), \quad (3, 2, 2).$$

Множество $\mathcal{A}_r^0$ является бесконечным и состоит из наборов

$$(1, k_2, 1), \quad k_2 \equiv 0 \pmod{2}, \quad k_2 \geq 4, \quad (1, 2, 3), \quad (3, 2, 1).$$

Случай $r = 4$. Множество $\mathcal{A}_r^0$ состоит из наборов

$$(1, 2, 2, 3), \quad (1, 2, 4, 1), \quad (1, 4, 2, 1), \quad (3, 2, 2, 1).$$

Пользуясь равенством (36), будем иметь:

$$\nu(2; 4) = 4(|\mathcal{T}(1, 2, 2, 3)| + |\mathcal{T}(1, 2, 4, 1)|) = 4\left(\frac{2}{315} + \frac{1}{210}\right) = \frac{2}{45}.$$

Множество же $\mathcal{A}_r^*$ состоит лишь из двух наборов: $(1, 2, 2, 2)$ и $(3, 2, 2, 2)$.

В каждом из случаев $r \geq 5$ множество $\mathcal{A}_r^*$ состоит из наборов $(1, 2^{r-1})$ и $(3, 2^{r-1})$, а множество $\mathcal{A}_r^0$ - из наборов $(1, 2^{r-2}, 3)$ и $(3, 2^{r-2}, 1)$. Соответственно, область $\mathcal{T}(1, 2^{r-2}, 3)$ определяется неравенствами

$$\begin{cases} \frac{1}{2r+1} < x \leq \frac{1}{2r-1}, & 1-x < y \leq \frac{1}{2}(1+(2r-1)x), \\ \frac{1}{2r-1} < x \leq \frac{1}{2r-3}, & \frac{1}{2}(1+(2r-3)x) < y \leq 1, \end{cases}$$

и потому представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{1}{2r+1}, \frac{2r}{2r+1}\right), \quad \left(\frac{1}{2r-1}, 1\right), \quad \left(\frac{1}{2r-3}, 1\right), \quad \left(\frac{1}{2r-1}, \frac{2r-2}{2r-1}\right)$$

и площадью

$$\frac{2}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}.$$

Аналогично, область $\mathcal{T}(3, 2^{r-2}, 1)$ определяется неравенствами

$$\begin{cases} \frac{2r-5}{2r-3} < x \leq \frac{2r-3}{2r-1}, & \frac{1}{4}(1+x) < y \leq \frac{1+(r-1)x}{2r-1}, \\ \frac{2r-3}{2r-1} < x \leq 1, & \frac{1+rx}{2r+1} < y \leq \frac{1+(r-1)x}{2r-1} \end{cases}$$

и потому представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$\left(\frac{2r-5}{2r-3}, \frac{r-2}{2r-3}\right), \quad \left(1, \frac{r}{2r-1}\right), \quad \left(1, \frac{r+1}{2r+1}\right), \quad \left(\frac{2r-3}{2r-1}, \frac{r-1}{2r-1}\right)$$

и площадью

$$\frac{2}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

8. Заключительные замечания

Задачу нахождения явных выражений величин $\nu(r; D)$ можно ставить и для $D > 3$. Однако уже в случае следующего за тройкой простого числа $D = 5$ вычисления многократно возрастают. Возникающие при этом деревья обладают гораздо более сложной структурой, чем рассмотренные в §4 деревья $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$. В ряде случаев момент, когда та или иная вершина даёт единственного «вырожденного» потомка, наступает очень поздно, так что при вычислениях приходится иметь дело с континуантами длины более сотни. Было бы интересно придумать иное рассуждение, которое приводило бы к искомому результату с меньшими затратами.

Вместе с тем, несложно доказать, что в случае произвольного простого D все доли $\nu(r; D)$, начиная с некоторого r , являются рациональными числами. Более точно, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $D = p \geq 2$ - простое. Тогда все числа $\nu(r; D)$ при $r \geq 2p$ - рациональные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $f_i(x; \mathbf{k}_i)$, $g_i(x; \mathbf{k}_i)$ есть линейные функции x с рациональными коэффициентами. Поэтому и координаты вершин каждого непустого многоугольника $\mathcal{T}(\mathbf{k})$ рациональны. Следовательно, рациональными будут и площади этих многоугольников. Ввиду следствия Леммы 7 достаточно проверить, что при $r \geq 2p$ множество $\mathcal{A}_r(D)$ содержит лишь конечное число наборов.

Допустим противное: существуют D и $r \geq 2p = 2P^-(D)$, для которых множество $\mathcal{A}_r^0(D)$ бесконечно. Тогда существует по крайней мере один индекс j , $1 \leq j \leq r$, такой, что в $\mathcal{A}_r^0(D)$ содержатся наборы со сколь угодно большими значениями компоненты $k_j = k$ и, в частности, с условием $k \geq 4r + 2$. Пусть $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k, \dots, k_r)$ - такой набор. В силу п. (f) Леммы 5, его компоненты удовлетворяют равенствам (28). Заметим также, что набор $\mathbf{k}$ не может иметь вид

$$(2^n, 1, k, 1, 2^{r-n-3}), \quad \text{где } n \geq p-1. \quad (55)$$

Действительно, для набора (55) с помощью Леммы 8 находим

$$\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_1(2) = 2, \quad \mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_2(2^2) = 3, \quad \dots, \quad \mathbb{K}_n = \mathbb{K}_n(2^n) = n + 1.$$

В случае $n \geq p - 1$ среди чисел $\mathbb{K}_j$, $1 \leq j \leq n$, имеется континуант $\mathbb{K}_{p-1}$, кратный p , что невозможно в силу определения $\mathcal{A}_r^0(D)$. Следовательно, $\mathbf{k}$ может иметь одну из следующих форм:

$$(k, 1, 2^{r-2}), \quad (1, k, 1, 2^{r-3}), \quad (2^n, 1, k, 1, 2^{r-n-3}), \quad \text{где } 1 \leq n \leq p - 2.$$

Вычисление континуантов порядков j , $1 \leq j \leq r$, для каждого из наборов приводит к следующим последовательностям:

$$\begin{array}{cccccccc} k & (k-1) & (k-2) & (k-3) & \dots & \dots & \dots & (k-r+1); \\ 1 & (k-1) & (k-2) & (k-3) & \dots & \dots & \dots & (k-r+1); \\ 1 & 2 & (k-2) & (k-3) & \dots & (k-n) & \dots & (k-r+1), \end{array}$$

$$n = 1, 2, \dots, p - 2.$$

Первый ряд таблицы содержит r подряд идущих целых чисел, и потому среди первых $p < r$ чисел найдётся кратное p . Значит, $\mathbf{k}$ не может иметь вида $(k, 1, 2^{r-2})$.

Далее, второй ряд содержит $(r-1)$ подряд идущих целых чисел на местах, начиная со второго. Значит, число, кратное p , встретится во второй строке таблицы на месте с номером $\leq p+1 < r$. Следовательно, набор $\mathbf{k}$ не может иметь и вида $(1, k, 1, 2^{r-3})$.

Пусть, наконец, $1 \leq n \leq p-2$. Соответствующий ряд содержит $r-(n+1) \geq 2p-(p-1) = p+1$ подряд идущих целых чисел на местах начиная с $(n+2)$ -го. Поэтому число, кратное p , встретится в нём на месте с номером $\leq (n+1) + p \leq 2p-1 \leq r-1$. Таким образом, $\mathbf{k}$ не может совпадать ни с одним из наборов вида $(2^n, 1, k, 1, 2^{r-n-3})$. Полученное противоречие приводит к искомому утверждению. $\square$

Выше (§2) было дано доказательство равенства (36) площадей областей $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ и $\mathcal{T}(k_r, \dots, k_1)$ для любого набора $k_1, \dots, k_r$. Это доказательство опиралось на связь величин $|\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)|$ с количеством кортежей из $(r+2)$ последовательных дробей Фарея, обладающих определёнными арифметическими свойствами. Ниже приводится доказательство тождества (36), использующее лишь определение и простейшие свойства BCZ -преобразования T .

Согласно Лемме 2, область $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ есть множество всех точек (x_0, x_1) треугольника $\mathcal{T}$ Фарея, для которых величины $x_2, \dots, x_{r+1}$, определённые равенствами

$$\begin{cases} x_0 + x_2 = k_1 x_1, \\ x_1 + x_3 = k_2 x_2, \\ \dots \\ x_{r-1} + x_{r+1} = k_r x_r, \end{cases} \quad (56)$$

удовлетворяют условиям

$$0 < x_i \leq 1, \quad i = 2, 3, \dots, r+1, \quad x_i + x_{i+1} > 1, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (57)$$

Поэтому

$$|\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)| = \left| \iint_{\substack{(x_0, x_1) \in \mathcal{T} \\ (57)}} dx_0 dx_1 \right|, \quad (58)$$

где смысл обозначений очевиден.

Рассмотрим теперь линейную замену переменных

$$\begin{cases} y_0 = x_{r+1} = x_1 \mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) - x_0 \mathbb{K}_{r-1}(k_2, \dots, k_r), \\ y_1 = x_r = x_1 \mathbb{K}_{r-1}(k_1, \dots, k_{r-1}) - x_0 \mathbb{K}_{r-2}(k_2, \dots, k_{r-1}). \end{cases} \quad (59)$$

Чтобы найти вид условий (57) в новых переменных, определим величины $y_2, \dots, y_{r+1}$ равенствами

$$\begin{cases} y_0 + y_2 = k_r y_1, \\ y_1 + y_3 = k_{r-1} y_2, \\ \dots \\ y_{r-1} + y_{r+1} = k_1 y_r. \end{cases} \quad (60)$$

Пользуясь (7), несложно проверить по индукции, что $y_i = x_{r-i+1}$ для $i = 2, 3, \dots, r+1$. Следовательно, условия (57) примут вид

$$0 < y_i \leq 1, \quad i = 2, 3, \dots, r+1, \quad y_i + y_{i+1} > 1, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (61)$$

В силу Леммы 2, множество точек $(y_0, y_1) \in \mathcal{T}$, подчинённых условиям (60), (61), образует область $\mathcal{T}(k_r, \dots, k_1)$, так что

$$|\mathcal{T}(k_r, \dots, k_1)| = \left| \iint_{\substack{(y_0, y_1) \in \mathcal{T} \\ (61)}} dy_0 dy_1 \right|. \quad (62)$$

Но модуль определителя линейной замены (59) равен, в силу тождества (11), единице. Поэтому равны и интегралы в правых частях (58) и (62). Отсюда следует искомое равенство площадей. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cobeli C., Zaharescu A., The Haros-Farey sequence at two hundred years. A survey. // Acta Univ. Apulensis Math. Inform. 2003. Vol. 5. P. 1–38.
2. Haynes A., A note on Farey fractions with odd denominators, // J. Number Theory, 2003. Vol. 98. № 2. P. 89–104.
3. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A., On the distribution of the Farey sequence with odd denominators // Michigan Math. J. 2003. Vol. 51. P. 557–573.
4. Cobeli C., Zaharescu A., The distribution of rationals in residue classes // [arXiv:math/0511356v1](#) [math.NT] (14.11.2005).
5. Cobeli C., Zaharescu A., On the Farey Fractions with Denominators in Arithmetic Progression // J. Integer Sequences. 2006. Vol. 9. Article 06.3.4.
6. Alkan E., Ledoan A.H., Văjăitu M., Zaharescu A. Discrepancy of Fractions with Divisibility Constraints // Monatsh. Math. 2006. Vol. 149. P. 179–192.
7. Haynes A., The distribution of special subsets of the Farey sequence // [arXiv:math/0907.2171v1](#) [math.NT] (13.07.2009).
8. Cobeli C., Văjăitu M., Zaharescu A., The distribution of rationals in residue classes // Math. Reports. 2012. Vol. 14(64). № 1. P. 1–19.
9. Badziahin D.A., Haynes A.K., A note on Farey fractions with denominators in arithmetic progressions // Acta Arith., 2011. Vol. 146. № 3. P. 205–215.
10. Boca F.P., Heersink B., Spiegelhalter P. Gap distribution of Farey fractions under some divisibility constraints // [arXiv:1301.0277v2](#) [math.NT] (11.04.2013)

11. Bittua, Chaubeya S., Goela S. On the distribution of index of Farey Sequences // [arXiv:2203.16215v1 \[math.NT\]](#) (30.03.2022)
12. Boca F.P., Siskaki M., A note on the pair correlation of Farey fractions // [arXiv:2109.12744v2 \[math.NT\]](#) (19.09.2022)
13. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A., A conjecture of R. R. Hall on Farey points // J. reine angew. Math. 2001. Vol. 535. P. 207–236.
14. Baker A., Transcendental number theory. Cambr. Univ. Press, 1975.
15. Lindeman F., Ueber die Zahl π // Math. Ann. 1882. Vol. 20. P. 213–225.
16. Устинов А.В., Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 4. С. 131–160.
17. Грэхем Р.Л., Кнут Д.Э., Паташник О., Конкретная математика. Основание информатики, М., Мир, 1998.
18. Смирнов Е.Ю., Фризы и цепные дроби. М., МЦНМО, 2022.
19. Boca F.P., Gologan R., Zaharescu A., On the index of Farey sequences // Quart. J. Math. 2002. Vol. 53. № 4. P. 377–391.
20. Постников А.Г., Введение в аналитическую теорию чисел. М., Наука, 1971.
21. Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М., ГИФМЛ, 1962.

REFERENCES

1. Cobeli C., Zaharescu A., 2003, “The Haros-Farey sequence at two hundred years. A survey”, *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.*, vol. 5. P. 1–38.
2. Haynes A., 2003, “A note on Farey fractions with odd denominators”, *J. Number Theory*, vol. 98. № 2. P. 89–104.
3. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A., 2003, “On the distribution of the Farey sequence with odd denominators”, *Michigan Math. J.*, vol. 51. P. 557–573.
4. Cobeli C., Zaharescu A., 2005, “The distribution of rationals in residue classes”, [arXiv:math/0511356v1 \[math.NT\]](#) (14.11.2005).
5. Cobeli C., Zaharescu A., 2006, “On the Farey Fractions with Denominators in Arithmetic Progression”, *J. Integer Sequences*, vol. 9. Article 06.3.4.
6. Alkan E., Ledoan A.H., Văjăitu M., Zaharescu A., 2006, “Discrepancy of Fractions with Divisibility Constraints”, *Monatsh. Math.*, vol. 149. P. 179–192.
7. Haynes A., 2009, “The distribution of special subsets of the Farey sequence”, [arXiv:math/0907.2171v1 \[math.NT\]](#) (13.07.2009).
8. Cobeli C., Văjăitu M., Zaharescu A., 2012, “The distribution of rationals in residue classes”, *Math. Reports.*, vol. 14(64). № 1. P. 1–19.

9. Badziahin D.A., Haynes A.K., 2011, “A note on Farey fractions with denominators in arithmetic progressions”, *Acta Arith.*, vol. 146. № 3. P. 205–215.
10. Boca F.P., Heersink B., Spiegelhalter P. 2013, “Gap distribution of Farey fractions under some divisibility constraints”, [arXiv:1301.0277v2 \[math.NT\]](#) (11.04.2013)
11. Bittua, Chaubeya S., Goela S. 2022, “On the distribution of index of Farey Sequences”, [arXiv:2203.16215v1 \[math.NT\]](#) (30.03.2022)
12. Boca F.P., Siskaki M., 2022, “A note on the pair correlation of Farey fractions”, [arXiv:2109.12744v2 \[math.NT\]](#) (19.09.2022)
13. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A., 2001, “A conjecture of R. R. Hall on Farey points”, *J. reine angew. Math.*, vol. 535. P. 207–236.
14. Baker A., 1975, Transcendental number theory. London, Cambr. Univ. Press.
15. Lindeman F., 1882, “Ueber die Zahl π ”, *Math. Ann.*, vol. 20. P. 213–225.
16. Ustinov A.V., 2009, “The solution of Arnold’s problem on the weak asymptotics of Frobenius numbers with three arguments”, *Sb. Math.*, vol. 200. № 4. P. 597–627.
17. Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O., 1994, Concrete Mathematics (2nd ed.), Massachusetts, Addison-Wesley.
18. Smirnov E.Yu., 2022, Frieze patterns and continued fractions (in Russian), M., MCCME.
19. Boca F.P., Gologan R., Zaharescu A., 2002, “On the index of Farey sequences”, *Quart. J. Math.*, vol. 53. № 4. P. 377–391.
20. Postnikov A.G., 1988, Introduction to analytic number theory. Transl. Math. Monographs. Vol. 68. AMS, Providence, Rhode Island.
21. Gradshteyn I.S., Ryjik I.M., 1965, “Tables of Integrals, Sums and Products”, *Academic Press, New York*.

Получено: 20.10.2023

Принято в печать: 11.12.2023