

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 4.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-104-136

Теоремы универсальности и антиуниверсальности для дзета-функций моноидов натуральных чисел¹

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, А. В. Афонина, Н. М. Добровольский, И. Н.
Балаба, И. Ю. Реброва

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Афонина Анастасия Вячеславовна — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: juska789@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Балаба Ирина Николаевна — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: ibalaba@mail.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

Были выделены классы моноидов, для которых выполняется условие обобщенной леммы Сельберга, для которых выполнено сильное условие Сельберга–Бредихина, для которых выполнен усиленный асимптотический закон в форме Бредихина. Для этих классов моноидов получены новые результаты об аналитическом продолжении в лево от абсциссы абсолютной сходимости. Получен аналог основной леммы С. М. Воронина из работы об универсальности дзета-функции Римана на случай дзета-функций моноида, для которого выполнено условие обобщенной леммы Сельберга либо более сильное условие Сельберга–Бредихина.

Для класса регулярных моноидов Сельберга — Бредихина натуральных чисел удалось доказать теорему универсальности дзета-функции соответствующего моноида.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

Библиография: 24 названий.

Для цитирования:

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, А. В. Афонина, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Теоремы универсальности и антиуниверсальности для дзета-функций моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 104–136.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ № 22-21-00544 «Дзета-функция моноидов натуральных чисел и смежные вопросы».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-104-136

Universality and antiuniversality theorems for zeta functions of monoids of natural numbers²

M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, A. V. Afonina, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba,
I. Yu. Rebrova

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Geophysical centre of RAS (Moscow).

e-mail: juska789@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Afonina Anastasia Vyacheslavovna — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: m.dobrovolsky@geras.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: ibalaba@mail.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

Classes of monoids were identified for which the condition of the generalized Selberg lemma is satisfied, for which the strong Selberg–Bredikhin condition is satisfied, and for which the strengthened asymptotic law in Bredikhin form is satisfied. For these classes of monoids, new results on analytical continuation to the left of the abscissa of absolute convergence are obtained. An analogue of the main lemma of S. M. Voronin is obtained from the work on the universality of the Riemann zeta function in the case of zeta functions of a monoid for which the condition of the generalized Selberg lemma or the stronger Selberg–Bredikhin condition is satisfied.

For the class of regular Selberg–Bredikhin monoids of natural numbers, we succeeded in proving the universality theorem for the zeta function of the corresponding monoid.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, A. V. Afonina, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2023, “Universality and antiuniversality theorems for zeta functions of monoids of natural numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 104–136.

²The reported study was funded by the RSF grant № 22-21-00544 “Zeta function of monoids of natural numbers and related issues”.

1. Введение

В 1975 году вышла работа С. М. Воронина, в которой была доказана знаменитая теорема об универсальности дзета-функции Римана [4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(s)$ — функция, аналитическая внутри круга $|s| \leq r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(s)$ не имеет нулей внутри круга $|s| \leq r$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|s| \leq r} \left| f(s) - \zeta \left(s + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right) \right| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4] или [5], стр. 240–250. $\square$

Для дальнейшего нам потребуются моноиды M с однозначным разложением на простые числа такие, что для их дзета-функции $\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} n^{-\alpha}$ справедливо разложение в произведение Эйлера

$$\zeta(M|\alpha) = \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha} \right)^{-1}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma \geq \sigma_M,$$

где $0 \leq \sigma_M \leq \frac{1}{2}$. Доказательство существования таких моноидов содержится в работе [10]. Будем через $\mathfrak{M}_{\sigma_0}$ обозначать класс моноидов M с однозначным разложением на простые числа таких, что дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ представляется в виде произведения Эйлера, абсолютно и равномерно сходящегося в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$.

В работе [14] доказаны следующие утверждения:

ЛЕММА 1. При $Q > 4$ для любого $q > Q$ и для любого вещественного T справедливы неравенства

$$\max_{|\alpha| \leq \frac{1}{4}} \left| \frac{1 - \frac{1}{q^{\alpha + \frac{3}{4} + iT}}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha + \frac{3}{4}}}} - 1 \right| < \frac{4}{\sqrt{Q}}, \quad \max_{|\alpha| \leq \frac{1}{4}} \left| 1 - \frac{1}{q^{\alpha + \frac{3}{4} + iT}} \right| < 1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}.$$

Пусть p_0 — простое число и моноид $M_{-}(p_0)$ обозначает моноид натуральных чисел, не делящихся на p_0 . Дзета-функция $\zeta(M_{-}(p_0)|\alpha)$ в правой полуплоскости $\sigma > 1$ имеет представление в виде произведения Эйлера:

$$\zeta(M_{-}(p_0)|\alpha) = \prod_{p \neq p_0} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha} \right)^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $Q > 4$, $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leq r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leq r$ и $A(r, f) = \max_{|\alpha| \leq r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для любого простого $p_0 > Q$ существует вещественное $T = T(\varepsilon, p_0)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| f(\alpha) - \zeta \left(M_{-}(p_0) \middle| \alpha + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right) \right| < \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\sqrt{Q}} \right) + \frac{4A}{\sqrt{Q}}.$$

Теорему 2 можно существенно усилить. Пусть Q — натуральное число и моноид $M \in \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}$. Определим моноид M_{-Q} как множество натуральных чисел, не делящихся на простые p из $P(M)$ и больших Q . Если определить моноид M_{+Q} как множество натуральных чисел, имеющих в своём каноническом разложении только простые числа $p \in P(M)$, которые больше Q , то $\mathbb{N} = M_{-Q} \cdot M_{+Q}$ и $\zeta(\alpha) = \zeta(M_{-Q}|\alpha)\zeta(M_{+Q}|\alpha)$.

ЛЕММА 2. Для любого вещественного $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < 1$ найдётся натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что для любого вещественного T справедливы неравенства

$$\max_{|\alpha| \leq \frac{1}{4}} \left| \frac{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4})}{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4} + iT)} - 1 \right| < 3\varepsilon_1, \quad \max_{|\alpha| \leq \frac{1}{4}} \left| \frac{1}{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4} + iT)} \right| < 1 + \varepsilon_1.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leq r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leq r$ и $A(r, f) = \max_{|\alpha| \leq r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякого $1 > \varepsilon_1 > 0$ существует натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что существует вещественное $T = T(\varepsilon, \varepsilon_1)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| f(\alpha) - \zeta \left(M_{-Q} \left| \alpha + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right| \right) \right| < \varepsilon(1 + \varepsilon_1) + 3A\varepsilon_1.$$

В работе [20] была дана новая интерпретация метода работы [14], которая объясняла возникновение эффекта слабой универсальности.

Цель данной работы — перенести элементы доказательства С. М. Воронина непосредственно на достаточно широкий класс дзета-функций моноидов натуральных чисел, для которых справедлива теорема универсальности, и указать класс моноидов, для которых справедлива теорема антиуниверсальности.

2. Плотности моноида и последовательности, абсциссы абсолютной сходимости

Пусть, как обычно, через $P(M)$ будем обозначать множество его простых элементов. Мы предполагаем, что моноид M с однозначным разложением на простые элементы. Таким образом, для него справедливо представление дзета-функции моноида $\zeta(M|\alpha)$ через произведение Эйлера:

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} n^{-\alpha} = \prod_{q \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{q^\alpha} \right)^{-1}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma \geq \sigma_M$$

и σ_M — абсцисса абсолютной сходимости. Далее везде, мы будем предполагать, что множество простых элементов $P(M)$ является бесконечным множеством, так как в противном случае $\zeta(M|\alpha)$ является аналитической функцией с $\sigma_M = 0$ и с бесконечным множеством полюсов в точках $\alpha_{k,q} = \frac{2k\pi i}{\ln q}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $q \in P(M)$. В этом случае отсутствует критическая полоса и, вообще, не может быть речи о теоремах универсальности.

Моноиды с однозначным разложением на простые элементы обладают принципиальным свойством для теоремы универсальности.

ЛЕММА 3. Моноид M натуральных чисел имеет однозначное разложение на простые элементы тогда и только тогда, когда для любого набора простых элементов $q_{n_\nu} \in P(M)$ ($\nu = 1, \dots, N$) набор их логарифмов линейно независим над полем рациональных чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть набор логарифмов $\ln q_{n_1}, \dots, \ln q_{n_N}$ линейно независим над полем рациональных чисел, тогда найдутся целые числа $a_1, \dots, a_N$ не все равные 0 такие, что

$$\sum_{1 \leq \nu \leq N, a_\nu > 0} a_\nu \ln q_{n_\nu} = - \sum_{1 \leq \nu \leq N, a_\nu < 0} a_\nu \ln q_{n_\nu}.$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{1 \leq \nu \leq N, a_\nu > 0} q_{n_\nu}^{a_\nu} = \prod_{1 \leq \nu \leq N, a_\nu < 0} q_{n_\nu}^{-a_\nu}.$$

Тем самым связь между линейной независимостью и однозначностью разложения на простые элементы установлена. $\square$

Так же, как и в работе [18], будем обозначать через $\nu_M(x) = \sum_{m \in M, m \leq x} 1$ распределение элементов моноида M и функцию энтропии $\mathfrak{S}_M(x) = \ln \nu_M(x)$. Нетрудно видеть, что функция распределения простых элементов моноида M , обозначаемая через $\pi_{P(M)}(x) = \sum_{q \in P(M), q \leq x} 1$, удовлетворяет равенству $\pi_{P(M)}(x) = \nu_{P(M)}(x)$. Естественно, энтропией множества простых элементов моноида M назвать функцию $\mathfrak{S}_{P(M)}(x) = \ln \pi_{P(M)}(x)$.

Согласно Б. М. Бредихину [2] моноид M имеет C θ -степенную плотность, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\nu_M(x)}{x^\theta} = C, \quad \theta > 0, \quad C > 0.$$

ЛЕММА 4. *Если моноид M имеет C θ -степенную плотность, то для абсциссы абсолютной сходимости дзета-функции моноида $\zeta(M|\alpha)$ справедливо равенство $\sigma_M = \theta$ и в точке $\alpha = \theta$ полюс с вычетом $C\theta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения C θ -степенной плотности имеем: $\nu_M(x) = Cx^\theta + R_M(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|R_M(x)| < \varepsilon x^\theta$ при $x > N(\varepsilon)$. По теореме Абеля (См. [23], стр. 106) имеем:

$$\zeta(M|\alpha) = \alpha \int_1^\infty \frac{\nu_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int_1^\infty \frac{Cx^\theta + R_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{C\alpha}{\alpha - \theta} + \alpha \int_1^\infty \frac{R_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left| \alpha \int_1^\infty \frac{R_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx \right| < \left| \alpha \int_1^{N(\varepsilon)} \frac{R_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx \right| + \frac{|\alpha|\varepsilon}{|\alpha - \theta|N(\varepsilon)^{\Re(\alpha - \theta)}},$$

то утверждение леммы доказано. $\square$

Будем говорить, что моноид или последовательность M натуральных чисел удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга, если $\nu_M(x) = Cx^\theta + O(x^{\theta_1})$ и $\theta_1 < \theta$.

ЛЕММА 5. *Если моноид или последовательность M натуральных чисел удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга с $\theta_1 < \theta$, то дзета-функция $\zeta(M|\alpha)$ аналитически продолжается в полуплоскость с $\sigma > \theta_1$ кроме точки $\alpha = \theta$, в которой у неё полюс первого порядка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по теореме Абеля имеем:

$$\zeta(M|\alpha) = \alpha \int_1^\infty \frac{\nu_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int_1^\infty \frac{Cx^\theta + O(x^{\theta_1})}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{C\alpha}{\alpha - \theta} + \alpha \int_1^\infty \frac{O(x^{\theta_1})}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Так как последний несобственный интеграл абсолютно сходится для любого α с $\sigma > \theta_1$, то утверждение леммы доказано. $\square$

ЛЕММА 6. *Если моноид или последовательность M натуральных чисел удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга с $\theta_1 < \theta$, то для дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ при $\sigma > \theta_1$ справедливо равенство*

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M, n \leq N} \frac{1}{n^\alpha} + C \frac{\theta}{\alpha - \theta} \frac{1}{N^{\alpha - \theta}} + O\left(\frac{|\alpha|}{(\sigma - \theta_1)N^{\sigma - \theta_1}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по теореме Абеля имеем:

$$\begin{aligned}\zeta(M|\alpha) &= \sum_{n \in M, n \leq N} \frac{1}{n^\alpha} + \alpha \int_N^\infty \frac{\nu_M(x) - \nu_M(N)}{x^{\alpha+1}} dx = \sum_{n \in M, n \leq N} \frac{1}{n^\alpha} + \\ &+ \alpha \int_N^\infty \frac{C(x^\theta - N^\theta) + O(x^{\theta_1})}{x^{\alpha+1}} dx = \sum_{n \in M, n \leq N} \frac{1}{n^\alpha} + C \left(\frac{\alpha}{(\alpha - \theta)N^{\alpha-\theta}} - \frac{1}{N^{\alpha-\theta}} \right) + \\ &+ \alpha \int_N^\infty \frac{O(x^{\theta_1})}{x^{\alpha+1}} dx = \sum_{n \in M, n \leq N} \frac{1}{n^\alpha} + C \frac{\theta}{\alpha - \theta} \frac{1}{N^{\alpha-\theta}} + O \left(\frac{|\alpha|}{(\sigma - \theta_1)N^{\sigma-\theta_1}} \right),\end{aligned}$$

так как, если обозначим через C_1 константу в знаке $O(x^{\theta_1})$ в формуле $\nu_M(x) = Cx^\theta + O(x^{\theta_1})$, то

$$\left| \alpha \int_N^\infty \frac{O(x^{\theta_1})}{x^{\alpha+1}} dx \right| \leq |\alpha| C_1 \int_N^\infty \frac{x^{\theta_1}}{x^{\sigma+1}} dx = \frac{|\alpha| C_1}{(\sigma - \theta_1) N^{\sigma-\theta_1}}.$$

□

Будем говорить, что моноид M с однозначным разложением на простые множители регулярно удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга, если при $\theta_1 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2$, $\pi N \geq |t| \geq 2\pi$ для $\alpha = \sigma + it$ справедлива формула

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M, n \leq N} \frac{1}{n^\alpha} + C \frac{\theta}{\alpha - \theta} \frac{1}{N^{\alpha-\theta}} + O \left(\frac{1}{N^{\sigma-\theta_1}} \right),$$

где постоянная в знаке O зависит только от σ_0 . Будем такие моноиды называть регулярными моноидами Сельберга — Бредихина.

Будем говорить, что моноид или последовательность M натуральных чисел удовлетворяет сильному условию Сельберга — Бредихина, если $\nu_M(x) = Cx^\theta + C_1x^{\theta_1} + \dots + x^{\theta_n} + O(1)$ и $0 < \theta_n < \dots < \theta_1 < \theta$.

ЛЕММА 7. Если моноид или последовательность M натуральных чисел удовлетворяет сильному условию Сельберга — Бредихина с $0 < \theta_n < \dots < \theta_1 < \theta$, то дзета-функция $\zeta(M|\alpha)$ аналитически продолжается в полуплоскость с $\sigma > 0$ кроме точек $\alpha = \theta$, $\alpha_k = \theta_k$ ($k = 1, \dots, n$), в которых у неё полюса первого порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по теореме Абеля имеем:

$$\begin{aligned}\zeta(M|\alpha) &= \alpha \int_1^\infty \frac{\nu_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int_1^\infty \frac{Cx^\theta + C_1x^{\theta_1} + \dots + x^{\theta_n} + O(1)}{x^{\alpha+1}} dx = \\ &= \frac{C\alpha}{\alpha - \theta} + \frac{C_1\alpha}{\alpha - \theta_1} + \dots + \frac{C_n\alpha}{\alpha - \theta_n} + \alpha \int_1^\infty \frac{O(1)}{x^{\alpha+1}} dx.\end{aligned}$$

Так как последний несобственный интеграл абсолютно сходится для любого α с $\sigma > 0$, то утверждение леммы доказано. □

Из результатов лемм 5 и 7 следует, что понятие критической полосы и критической прямой надо изменить для случая моноидов из этих лемм. А именно, критической полосой надо назвать полосу, заданную неравенствами $\theta_1 < \sigma < \theta$, а критической прямой — прямую $\sigma = \frac{\theta_1 + \theta}{2}$. Необходимо отметить, что это определение согласуется со случаем дзета-функции Римана, так как в этом случае $\theta_1 = 0$, $\theta = 1$.

В работе [2] Б. М. Бредихин доказал, что для любого моноида M натуральных чисел, удовлетворяющего условию обобщенной леммы Сельберга, справедлив асимптотический закон:

$$\pi_M(x) \sim \frac{1}{\theta} \frac{x^\theta}{\ln x}. \quad (1)$$

Будем говорить, что для моноида M натуральных чисел выполнен усиленный асимптотический закон в форме Бредихина (См. [3]), если

$$\pi_M(x) = \int_2^{x^\theta} \frac{du}{\ln u} + O\left(\frac{x^\theta}{e^{c\sqrt{\ln x}}}\right) = \frac{1}{\theta} \frac{x^\theta}{\ln x} + O\left(\frac{x^\theta}{\theta^2 \ln^2 x} + \frac{x^\theta}{e^{c\sqrt{\ln x}}}\right), \quad (2)$$

с некоторой константой $c > 0$.

ЛЕММА 8. *Если моноид M натуральных чисел удовлетворяет усиленному асимптотическому закону в форме Бредихина с $0 < \theta \leq 1$, то при достаточно большом x и натуральном $N = [x] + 2$, $a = x - \frac{1}{32N^5}$ и $b = \frac{1}{16N^5}$ справедливо неравенство*

$$\pi_M(e^{a+b}) - \pi_M(e^a) > \frac{e^{\theta x}}{32a^6} > 4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть при $x > x_0$ выполнено неравенство

$$\left| \pi_M(e^x) - \int_2^{e^{x^\theta}} \frac{du}{\ln u} \right| < C \frac{e^{\theta x}}{e^{c\sqrt{x}}}.$$

Отсюда следует, что

$$\pi_M(e^{a+b}) > \int_2^{e^{(a+b)\theta}} \frac{du}{\ln u} - C \frac{e^{\theta(a+b)}}{e^{c\sqrt{a+b}}}, \quad \pi_M(e^a) < \int_2^{e^{a\theta}} \frac{du}{\ln u} + C \frac{e^{\theta a}}{e^{c\sqrt{a}}}$$

и

$$\begin{aligned} \pi_M(e^{a+b}) - \pi_M(e^a) &> \int_{e^{a\theta}}^{e^{(a+b)\theta}} \frac{du}{\ln u} - C \left(\frac{e^{\theta(a+b)}}{e^{c\sqrt{a+b}}} + \frac{e^{\theta a}}{e^{c\sqrt{a}}} \right) > \\ &> e^{\theta a} \left(\frac{1}{\theta} \frac{e^{\theta b} - 1}{a+b} - C \left(\frac{e^{\theta b}}{e^{c\sqrt{a+b}}} + \frac{1}{e^{c\sqrt{a}}} \right) \right). \end{aligned}$$

Так как $0 < \theta b < 1$, то $1 + \theta b < e^{\theta b} \leq e$ и

$$\pi_M(e^{a+b}) - \pi_M(e^a) > e^{\theta a} \left(\frac{b}{a+b} - C \frac{1+e}{e^{c\sqrt{a}}} \right) > e^{\theta a} \left(\frac{1}{16N^6} - C \frac{(1+e)}{e^{c\sqrt{a}}} \right).$$

При достаточно большом a имеем:

$$\frac{1}{16a^6} - C \frac{(1+e)}{e^{c\sqrt{a}}} > \frac{1}{32a^6}, \quad \pi_M(e^{a+b}) - \pi_M(e^a) > \frac{e^{\theta a}}{32a^6}.$$

Так как при $\theta a > \ln 128 + 6 \ln a$ выполняется $\pi_M(e^{a+b}) - \pi_M(e^a) > 4$, то утверждение леммы доказано. $\square$

Приведём пример последовательности, полученной объединением двух моноидов со степенной плотностью.

Пусть $\mathbb{P}_k = \{2^k, 3^k, 5^k, \dots\}$ — множество k -ых степеней всех простых чисел. Ясно, что $M(\mathbb{P}) = \mathbb{N}$, а $M(\mathbb{P}_k) = \mathbb{N}_k = \{1^k, 2^k, 3^k, 4^k, \dots\}$ — множество k -ых степеней всех натуральных чисел. Моноид $M(\mathbb{P}_k)$ — с однозначным разложением на простые элементы, а множеством простых элементов являются псевдопростые числа, которые образуют множество $\mathbb{P}_k$. Легко видеть, что моноид $M(\mathbb{P}_k)$ имеет единичную степенную $\frac{1}{k}$ -плотность, так как $\nu_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = [x^{\frac{1}{k}}]$.

Нетрудно видеть, что моноид $M(\mathbb{P}_k)$ регулярно удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга $\nu_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = x^{\frac{1}{k}} + O(1)$, так как при $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2$, $\pi N \geq |t| \geq 2\pi$ для $\alpha = \sigma + it$ справедлива формула

$$\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha) = \sum_{n \in M(\mathbb{P}_k), n \leq N} \frac{1}{n^\alpha} + C \frac{\theta}{\alpha - \theta} \frac{1}{N^{\alpha - \theta}} + O\left(\frac{1}{N^\sigma}\right),$$

где постоянная в знаке O зависит только от σ_0 . Действительно, $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha) = \zeta(k\alpha)$,

$$\sum_{n \in M(\mathbb{P}_k), n \leq N} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n^k \leq N} \frac{1}{n^{k\alpha}}, \quad \zeta(k\alpha) = \sum_{n \leq N^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{n^{k\alpha}} + \frac{N^{\frac{1-k\alpha}{k}}}{k\alpha - 1} + O(N^{-\sigma}).$$

Так как $\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \pi(x^{\frac{1}{k}})$, то справедлив асимптотический закон

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) \sim k \frac{x^{\frac{1}{k}}}{\ln x},$$

который согласно Б. М. Бредихину можно получить элементарно, минуя асимптотический закон для простых чисел. Более того, из асимптотического закона распределения простых чисел (См. [5], стр. 59)

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}\right)$$

следует, что для моноида $M(\mathbb{P}_k)$ выполнен усиленный асимптотический закон в форме Бредихина

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \int_2^{x^{\frac{1}{k}}} \frac{du}{\ln u} + O\left(x^{\frac{1}{k}} e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{k}\ln x}}\right).$$

Рассмотрим последовательность, полученную объединением двух моноидов $M(\mathbb{P}_k)$ и $M(\mathbb{P}_{k+1})$, $M_{k,k+1} = M(\mathbb{P}_k) \cup M(\mathbb{P}_{k+1})$. Нетрудно видеть, что $M(\mathbb{P}_k) \cap M(\mathbb{P}_{k+1}) = M(\mathbb{P}_{k(k+1)})$. Отсюда следует, что $\nu_{M_{k,k+1}}(x) = [x^{\frac{1}{k}}] + [x^{\frac{1}{k+1}}] - [x^{\frac{1}{k(k+1)}}]$. Таким образом, последовательность $M_{k,k+1}$ имеет степенную плотность с $\theta = \frac{1}{k}$ и удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга с $\theta_1 = \frac{1}{k+1}$, $\theta_2 = \frac{1}{k(k+1)}$, $\theta_3 = 0$, так как $\nu_{M_{k,k+1}}(x) = x^{\frac{1}{k}} + x^{\frac{1}{k+1}} - x^{\frac{1}{k(k+1)}} + O(1)$. Для дзета-функции справедливо равенство

$$\zeta(M_{k,k+1}|\alpha) = \zeta(k\alpha) + \zeta((k+1)\alpha) - \zeta(k(k+1)\alpha),$$

из которого следует, что $\zeta(M_{k,k+1}|\alpha)$ — аналитическая функция на всей комплексной плоскости, кроме точек $\alpha_1 = \frac{1}{k}$, $\alpha_2 = \frac{1}{k+1}$ и $\alpha_3 = \frac{1}{k(k+1)}$, в которых полюса первого порядка, а абсцисса абсолютной сходимости удовлетворяет равенству $\sigma_{M_{k,k+1}} = \frac{1}{k}$.

Нетрудно видеть, что аналогичные примеры можно строить и для объединения нескольких моноидов со степенной плотностью, для которого будет выполнено сильное условие Сельберга–Бредихина.

В работе [17] была определена C логарифмическая θ -степенная плотность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность M натуральных чисел имеет C логарифмическую θ -степенную плотность, если для функции $\nu_M(x)$, заданной равенством

$$\nu_M(x) = \sum_{n \in M, n \leq x} 1,$$

справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu_M(x)}{\ln^\theta x} = C, \quad C > 0, \quad \theta > 0.$$

Из определения видно, что, если моноид M имеет C θ -степенную плотность, то он имеет θ логарифмическую 1-степенную плотность.

Следующая лемма показывает, что моноиды M с C логарифмической θ -степенной плотностью при $\theta < 1$ имеют принципиальное отличие.

ЛЕММА 9. *Если моноид M имеет C логарифмическую θ -степенную плотность и $\theta < 1$, то для абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство $\sigma_M = 0$ и дзета-функция моноида $\zeta(M|\alpha)$ голоморфна во всей правой α -полуплоскости с $\sigma > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения C логарифмической θ -степенной плотности имеем: $\nu_M(x) = e^{C(\ln x)^\theta + R_M(x)}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|R_M(x)| < \varepsilon(\ln x)^\theta$ при $x > N(\varepsilon)$. По теореме Абеля (См. [23], стр. 106) имеем:

$$\zeta(M|\alpha) = \alpha \int_1^\infty \frac{\nu_M(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int_1^\infty \frac{e^{C(\ln x)^\theta + R_M(x)}}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int_0^\infty \frac{e^{Ct^\theta + R_M(e^t)}}{e^{\alpha t}} dt.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left| \alpha \int_0^\infty \frac{e^{Ct^\theta + R_M(e^t)}}{e^{\alpha t}} dt \right| < \left| \alpha \int_0^{N(\varepsilon)} \frac{e^{Ct^\theta + R_M(e^t)}}{e^{\alpha t}} dt \right| + \left| \alpha \int_{N(\varepsilon)}^\infty \frac{dt}{e^{\alpha t - (C+\varepsilon)t^\theta}} \right|,$$

последний несобственный интеграл при $\theta < 1$ абсолютно сходится при любом α с $\sigma > 0$, то утверждение леммы доказано. $\square$

Дословно повторяя рассуждения из работы [12], можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Если моноид M имеет C логарифмическую θ -степенную плотность и $\theta < 1$, то область голоморфности дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ является α -полуплоскостью $\sigma > 0$.*

Из этой теоремы сразу следует теорема антиуниверсальности.

ТЕОРЕМА 5. *Если моноид M имеет C логарифмическую θ -степенную плотность и $\theta < 1$, то дзета-функция $\zeta(M|\alpha)$ не является универсальной функцией в смысле Воронина.*

Остановимся на связи абсциссы абсолютной сходимости дзета-функции моноида M с однозначным разложением на простые элементы и абсциссы абсолютной сходимости дзета-функции множества простых элементов этого моноида.

ЛЕММА 10. *Для любого моноида M с однозначным разложением на простые элементы для абсцисс абсолютной сходимости справедливо равенство*

$$\sigma_M = \sigma_{P(M)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в области абсолютной сходимости в силу однозначности разложения на простые элементы справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \zeta(M|\alpha) &= \prod_{q \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{q^\alpha}\right)^{-1}, \quad \ln \zeta(M|\alpha) = \sum_{q \in P(M)} \left(\frac{1}{q^\alpha} + \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k q^{k\alpha}} \right) = \\ &= \zeta(P(M)|\alpha) + \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k} \zeta(P(M)|k\alpha). \end{aligned}$$

По теореме Абеля имеем:

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k} \zeta(P(M)|k\alpha) = \sum_{k=2}^\infty \alpha \int_{q_1}^\infty \frac{\pi_M(x)}{x^{k\alpha+1}} dx = \alpha \int_{q_1}^\infty \frac{\pi_M(x)}{x^{2\alpha+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^\alpha}} dx = \alpha \int_{q_1}^\infty \frac{\pi_M(x)}{x^{\alpha+1}(x^\alpha - 1)} dx$$

последний несобственный интеграл абсолютно сходится при любом α с $\sigma > \sigma_{P(M)}$, что доказывает утверждение леммы. $\square$

3. Вспомогательные обозначения, определения и леммы

Все дальнейшие рассуждения мы будем проводить для моноида M с однозначным разложением на простые элементы и со степенной θ -плотностью, для которого выполнено условие обобщенной леммы Сельберга либо более сильное условие Сельберга–Бредихина. В любом случае определена величина $\theta_1 < \theta$. Согласно лемме 4 имеем: $\sigma_M = \theta$ и ширина критической полосы равна $\theta - \theta_1$, а критическая прямая имеет вид $\sigma = \frac{\theta + \theta_1}{2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество Ω_M — множество всех наборов вещественных чисел, индексированных простыми элементами из $P(M)$, т. е. Ω_M состоит из векторов вида $\vec{\theta} = (\theta_{q_1}, \theta_{q_2}, \dots, \theta_{q_n}, \dots)$, где индекс q_n пробегает все простые элементы из $P(M) = \{q_1 < q_2 < \dots < q_n < \dots\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $A \subset P(M)$ — конечное множество простых элементов моноида M . Для всех $\alpha \in \mathbb{C}$, $\vec{\theta} \in \Omega_M$ полагаем

$$\zeta_A(\alpha, \vec{\theta}) = \prod_{q \in A} \left(1 - \frac{e^{-2\pi i \theta_q}}{q^\alpha}\right)^{-1}.$$

Нашей ближайшей целью является доказательство аналога леммы 1 из монографии [5] (стр. 241). Мы разобьём её на несколько лемм, которые позволяют лучше проследивать новые моменты в доказательстве теоремы универсальности. Местами нами восстановлены рассуждения, которые опущены в монографии [5] и в статье [4], и устранены отдельные опечатки из этих работ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. (См. [5] (стр. 323)) Пространством Харди $\mathbf{H}_2^{(R)}$ называется множество функций $f(\alpha)$, определённых для $|\alpha| < R$ и аналитических в этой области, для которых

$$\|f\|^2 = \lim_{r \rightarrow R} \int \int_{|\alpha| < r} |f(\alpha)|^2 d\sigma dt < \infty.$$

Следуя за С. М. Ворониным (См. [5] (стр. 241)), зададим в $\mathbf{H}_2^{(R)}$ скалярное произведение функций $\varphi_1(\alpha)$ и $\varphi_2(\alpha)$ формулой

$$(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)) = \Re \int \int_{|\alpha| \leq R} \varphi_1(\alpha) \overline{\varphi_2(\alpha)} d\sigma dt.$$

Тем самым $\mathbf{H}_2^{(R)}$ превращается в вещественное гильбертово пространство.

ЛЕММА 11. Формула

$$(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)) = \Re \int \int_{|\alpha| \leq R} \varphi_1(\alpha) \overline{\varphi_2(\alpha)} d\sigma dt.$$

задает скалярное произведение на $\mathbf{H}_2^{(R)}$, относительно которого $\mathbf{H}_2^{(R)}$ является вещественным гильбертовым пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_\nu(\alpha) = \Re \varphi_\nu(\alpha)$, $b_\nu(\alpha) = \Im \varphi_\nu(\alpha)$, ($\nu = 1, 2$), тогда

$$\varphi_1(\alpha) \overline{\varphi_2(\alpha)} = a_1(\alpha) a_2(\alpha) + b_1(\alpha) b_2(\alpha) + (-a_1(\alpha) b_2(\alpha) + a_2(\alpha) b_1(\alpha)) i$$

и

$$(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)) = \Re \iint_{|\alpha| \leq R} \varphi_1(\alpha) \overline{\varphi_2(\alpha)} d\sigma dt = \iint_{|\alpha| \leq R} (a_1(\alpha)a_2(\alpha) + b_1(\alpha)b_2(\alpha)) d\sigma dt.$$

Из последнего равенства следует, что для любого вещественного λ справедливы равенства: $(\lambda\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)) = \lambda(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha))$, $(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha) + \varphi_3(\alpha)) = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)) + (\varphi_1(\alpha), \varphi_3(\alpha))$,

$$(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)) = (\varphi_2(\alpha), \varphi_1(\alpha)), \quad \|\varphi_1(\alpha)\|^2 = (\varphi_1(\alpha), \varphi_1(\alpha)) \geq 0$$

и из $\|\varphi_1(\alpha)\| = 0$ следует $\varphi_1(\alpha) = 0$.

Теперь осталось доказать, что $\mathbf{H}_2^{(R)}$ полное пространство относительно нормы $\|\varphi_1(\alpha)\| = \sqrt{(\varphi_1(\alpha), \varphi_1(\alpha))}$ и сепарабельное.

Так как функция $f(\alpha) \in \mathbf{H}_2^{(R)}$ является аналитической в круге $|\alpha| \leq R$, то разложим её в степенной ряд

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Отсюда следует, что множество многочленов всюду плотно в $\mathbf{H}_2^{(R)}$, а так как множество многочленов с рациональными коэффициентами счетно, то сепарабельность доказана.

Пусть последовательность $f_n(\alpha) \in \mathbf{H}_2^{(R)}$ является фундаментальной, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любых $n, m > N$ справедливо неравенство $\|f_n(\alpha) - f_m(\alpha)\| < \varepsilon$.

Рассмотрим ряд

$$F(\alpha) = f_1(\alpha) + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n(\alpha) - f_{n-1}(\alpha)),$$

который является сходящимся для любого α из круга $|\alpha| \leq R$, так как согласно теореме 7 из [5], стр. 323 из неравенства

$$\iint_{|\alpha| \leq R} |f_n(\alpha) - f_m(\alpha)|^2 d\sigma dt < \varepsilon^2$$

следует

$$|f_n(\alpha) - f_m(\alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}(R - R')}$$

при $|\alpha| \leq R' < R$. По теореме Вейерштрасса функция $F(\alpha)$ является аналитической функцией в круге $|\alpha| \leq R$ и полнота $\mathbf{H}_2^{(R)}$ доказана. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Основной областью параметров назовем

$$0 < r < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}, \quad \sigma_M^* = \frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}, \quad \vec{\theta}_0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots\right), \quad \vec{\theta}_0^* = \sigma_M \vec{\theta}_0.$$

ЛЕММА 12. Пусть $0 < r < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}$ и $g(\alpha)$ аналитична при $|\alpha| < r$ и непрерывна при $|\alpha| \leq r$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\gamma > 1$ такое, что $\gamma^2 r < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}$ и

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| g(\alpha) - g\left(\frac{\alpha}{\gamma^2}\right) \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

Функция $g\left(\frac{\alpha}{\gamma^2}\right)$ принадлежит пространству Харди $\mathbf{H}_2^{(\gamma^2 r)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, функция $g(\alpha)$ непрерывна в ограниченной области $|\alpha| \leq r$. Значит она равномерно непрерывна в этой области. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек α_1 и α_2 из этой области с условием $|\alpha_1 - \alpha_2| < \delta$ выполняется неравенство $|g(\alpha_1) - g(\alpha_2)| < \varepsilon$.

Для $|\alpha| \leq r$ имеем неравенство

$$\left| \alpha - \frac{\alpha}{\gamma^2} \right| \leq \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) r.$$

Поэтому, при $\gamma = \min \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\delta}{r}}}, \sqrt{\frac{\sigma_M - \theta_1}{4r}} \right)$ получим первое утверждение леммы.

Так как при $|\alpha| \leq \gamma r$ имеем $\left| \frac{\alpha}{\gamma^2} \right| \leq \frac{r}{\gamma} < r$, то

$$\iint_{|\alpha| < \gamma r} \left| g \left(\frac{\alpha}{\gamma^2} \right) \right|^2 d\sigma dt = \gamma^4 \iint_{|\alpha| < \frac{r}{\gamma}} |g(\alpha)|^2 d\sigma dt \leq \gamma^4 \iint_{|\alpha| < r} |g(\alpha)|^2 d\sigma dt < \infty$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Рассмотрим при $|\alpha| < r$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha, \vec{\theta}),$$

где

$$u_k(\alpha, \vec{\theta}) = \ln \left(1 - \frac{e^{-2\pi i \theta_{q_k}}}{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha} \right)^{-1},$$

q_k — k -ый простой элемент из $P(M)$ и $\ln(1 - z)^{-1} = z + \frac{z^2}{2} + \dots$ при $|z| < 1$. Заметим, что $\left| \frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha \right| < \sigma_M$ при этом $\Re \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha \right) > \frac{\sigma_M + \theta_1}{2}$, поэтому

$$\left| \frac{e^{-2\pi i \theta_{q_k}}}{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha} \right| < 1.$$

Также, рассмотрим при $|\alpha| < r$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(\alpha, \vec{\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \theta_{q_k}}}{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha}.$$

ЛЕММА 13. *Справедливо равенство для рядов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha, \vec{\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(\alpha, \vec{\theta}) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(\alpha, \vec{\theta}),$$

где

$$\rho_k(\alpha, \vec{\theta}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{-2\pi i n \theta_{q_k}}}{n \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha \right)^n}$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(\alpha, \vec{\theta})$ абсолютно сходится при $|\alpha| \leq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при $|\alpha| \leq r$ имеем соотношения $\alpha = \sigma + it$, $|\sigma| < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho_k(\alpha, \vec{\theta})| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma|\right)} n q_k} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \zeta \left(P(M) \left| n \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right) \right. \right).$$

Повторяя рассуждения леммы 7, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \zeta \left(P(M) \left| n \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right) \right. \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right) \int_{q_1}^{\infty} \frac{\pi_M(x)}{x^{n \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right) + 1}} dx = \\ &= \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right) \int_{q_1}^{\infty} \frac{\pi_M(x)}{x^{2 \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right) + 1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right)}}} dx = \\ &= \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right) \int_{q_1}^{\infty} \frac{\pi_M(x)}{x^{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right) + 1} \left(x^{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right)} - 1 \right)} dx. \end{aligned}$$

Так как при $x > 2^{\frac{1}{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma|}}$ справедливо неравенство

$$\frac{\pi_M(x)}{x^{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right) + 1} \left(x^{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right)} - 1 \right)} < \frac{2\pi_M(x)}{x^{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right) + 1} x^{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right)}} = \frac{2\pi_M(x)}{x^{2 \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right) + 1}}$$

и $2 \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - |\sigma| \right) > \sigma_M + \theta_1$, то последний несобственный интеграл абсолютно сходится, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Из доказанной леммы вытекает, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha, \vec{\theta})$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(\alpha, \vec{\theta})$ сходятся и расходятся одновременно.

Далее везде считаем $R = \gamma r$. Из определения величины γ следует, что $R < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4} \leq \frac{1}{4}$. Положим $\delta_1 = \frac{\sigma_M - \theta_1}{4} - R$, тогда $0 < \delta_1 < \frac{1}{4}$. Кроме этого, справедливо равенство $R - \frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} = 2R - \sigma_M + \delta_1$.

ЛЕММА 14. Справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\eta_k(\alpha, \vec{\theta})\|^2 \leq \pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| q_k^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + R} \right|^2 < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\|\eta_k(\alpha, \vec{\theta})\|^2 = \iint_{|\alpha| < R} \left| \frac{e^{-2\pi i \theta q_k}}{q_k^{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha}} \right|^2 d\sigma dt \leq \left(\frac{1}{q_k^{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - R}} \right)^2 \iint_{|\alpha| < R} d\sigma dt = \frac{\pi R^2}{q_k^{2 \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - R \right)}}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\eta_k(\alpha, \vec{\theta})\|^2 \leq \pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| q_k^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + R} \right|^2 = \pi R^2 \cdot \zeta \left(P(M) \left| 2 \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - R \right) \right. \right).$$

Так как $2 \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - R \right) > \sigma_M + \theta_1$ — абсциссы абсолютной сходимости, то утверждение леммы доказано. $\square$

ЛЕММА 15. Для любой функции $\varphi(\alpha) \in \mathbf{H}_2^{(R)}$ с $\|\varphi(\alpha)\| = 1$ для общего члена ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k(\alpha, \vec{\theta}), \varphi(\alpha)) \quad (4)$$

справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\eta_k(\alpha, \vec{\theta}), \varphi(\alpha)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию имеем:

$$\|\varphi(\alpha)\| = 1 \implies \iint_{|\alpha| \leq R} |\varphi(\alpha)|^2 d\sigma dt = 1.$$

Обозначим через D_0 ту часть круга $|\alpha| \leq R$, на которой $|\varphi(\alpha)| \leq 1$, а через D_1 оставшуюся часть. Очевидно, что

$$\iint_{D_0} |\varphi(\alpha)| d\sigma dt \leq \pi R^2, \quad \iint_{D_1} |\varphi(\alpha)| d\sigma dt \leq \iint_{D_1} |\varphi(\alpha)|^2 d\sigma dt \leq 1, \quad \iint_{|\alpha| \leq R} |\varphi(\alpha)| d\sigma dt \leq \pi R^2 + 1.$$

По определению имеем:

$$(\eta_k(\alpha, \vec{\theta}), \varphi(\alpha)) = \Re \iint_{|\alpha| \leq R} \eta_k(\alpha, \vec{\theta}) \overline{\varphi(\alpha)} d\sigma dt = \Re \iint_{|\alpha| \leq R} \left(\frac{e^{-2\pi i \theta_{q_k}}}{q_k^{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha}} \right) \overline{\varphi(\alpha)} d\sigma dt.$$

Отсюда следует, что

$$|(\eta_k(\alpha, \vec{\theta}), \varphi(\alpha))| \leq \frac{1}{q_k^{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - R}} \iint_{|\alpha| \leq R} |\varphi(\alpha)| d\sigma dt \leq \frac{\pi R^2 + 1}{q_k^{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} - R}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

и лемма доказана. $\square$

Определим функцию $\Delta(x)$ равенством:

$$\Delta(x) = \iint_{|\alpha| \leq R} e^{-\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha\right)x} \overline{\varphi(\alpha)} d\sigma dt.$$

ЛЕММА 16. Справедливо равенство

$$(\eta_k(\alpha, \vec{\theta}), \varphi(\alpha)) = \Re \left[e^{-2\pi i \theta_{q_k}} \Delta(\ln q_k) \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} (\eta_k(\alpha, \vec{\theta}), \varphi(\alpha)) &= \Re \left[\iint_{|\alpha| \leq R} \left(\frac{e^{-2\pi i \theta_{q_k}}}{q_k^{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha}} \right) \overline{\varphi(\alpha)} d\sigma dt \right] = \\ &= \Re \left[e^{-2\pi i \theta_{q_k}} \iint_{|\alpha| \leq R} e^{-\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha\right) \ln q_k} \overline{\varphi(\alpha)} d\sigma dt \right] = \Re \left[e^{-2\pi i \theta_{q_k}} \Delta(\ln q_k) \right]. \end{aligned}$$

$\square$

ЛЕММА 17. Пусть

$$\varphi(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \alpha^m, \quad \|\varphi(\alpha)\| = 1.$$

Тогда

$$\Delta(x) = \pi R^2 e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} (xR)^m, \quad b_m = \frac{(-1)^m R^m \overline{a_m}}{m+1}$$

и

$$0 < \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 (m+1) \leq \frac{1}{\pi R^2}, \quad |b_m| \leq \frac{1}{\pi R \sqrt{m+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выразим через a_m функцию $\Delta(x)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}x} \iint_{|\alpha| \leq R} e^{-\alpha x} \overline{\varphi(\alpha)} d\sigma dt = e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}x} \iint_{|\alpha| \leq R} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha x)^m}{m!} \right) \overline{\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \alpha^m \right)} d\sigma dt = \\ &= e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}x} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{(-x)^{m_1}}{m_1!} \overline{a_{m_2}} \iint_{|\alpha| \leq R} \alpha^{m_1} \overline{\alpha}^{m_2} d\sigma dt. \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам, получим:

$$\iint_{|\alpha| \leq R} \alpha^{m_1} \overline{\alpha}^{m_2} d\sigma dt = 0 \quad \text{при } m_1 \neq m_2$$

и

$$\iint_{|\alpha| \leq R} \alpha^m \overline{\alpha}^m d\sigma dt = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^{2m} \rho d\rho d\theta = 2\pi \frac{R^{2m+2}}{2m+2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m \overline{a_m}}{m!} \pi \frac{R^{2m+2}}{m+1} = \pi R^2 e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m \overline{a_m}}{(m+1)!} R^{2m} = \\ &= \pi R^2 e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} (xR)^m, \end{aligned}$$

где $b_m = \frac{(-1)^m R^m \overline{a_m}}{m+1}$.

Из равенства $\|\varphi(\alpha)\| = 1$ заключаем, что

$$1 = \iint_{|\alpha| \leq R} |\varphi(\alpha)|^2 d\sigma dt = \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 \iint_{|\alpha| \leq R} |\alpha|^{2m} d\sigma dt = \pi R^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_m|^2 R^{2m}}{m+1} = \pi R^2 \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 (m+1).$$

Поэтому

$$0 < \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 (m+1) = \frac{1}{\pi R^2}, \quad (5)$$

а, следовательно,

$$|b_m| \leq \frac{1}{R \sqrt{\pi(m+1)}}. \quad (6)$$

□

Рассмотрим целую функцию $F(u)$, заданную рядом

$$F(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} u^m, \quad 0 < \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 (m+1) \leq \frac{1}{\pi R^2}, \quad |b_m| \leq \frac{1}{R\sqrt{\pi(m+1)}}. \quad (7)$$

Очевидно, что степенной ряд для $F(u)$ абсолютно сходится на всей комплексной плоскости, так как

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|b_m|}{m!} |u|^m \leq \frac{1}{\pi R} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} |u|^m = \frac{1}{\pi R} e^{|u|}.$$

ЛЕММА 18. Для любой целой функции $F(u)$, удовлетворяющей условиям (7) для любого $\delta > 0$ найдется последовательность положительных чисел $u_1, u_2, \dots \rightarrow +\infty$ такая, что

$$|F(u_j)| > e^{-(1+2\delta)u_j}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существуют $\delta \in (0, 1)$ и постоянная $A > 0$ такие, что $|F(u)| < Ae^{-(1+2\delta)u}$ для любых $u \geq 0$. Следовательно,

$$|e^{(1+\delta)u} F(u)| < Ae^{-\delta u} \quad \text{при } u \geq 0 \quad (9)$$

и, в силу соотношений (7),

$$|e^{(1+\delta)u} F(u)| < A_1 e^{-\delta|u|} \quad \text{при } u < 0. \quad (10)$$

Действительно, при $u < 0$ имеем: $|F(u)| \leq \frac{1}{\pi R} e^{|u|} = \frac{1}{\pi R} e^{-u}$,

$$|e^{(1+\delta)u} F(u)| \leq \frac{1}{\pi R} e^{(1+\delta)u} e^{-u} = \frac{1}{\pi R} e^{-\delta|u|}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{(1+\delta)u} F(u) \right|^2 du < A \int_0^{\infty} e^{-2\delta u} du + A_1 \int_{-\infty}^0 e^{-2\delta|u|} du = \frac{A + A_1}{2\delta} < \infty.$$

По теореме Пэли–Винера (См. [19], стр. 408) получаем

$$e^{(1+\delta)u} F(u) = \int_{-3}^3 f_0(\xi) e^{i\xi u} d\xi$$

для некоторой функции $f_0(\xi) \in L_2(-3, 3)$. Но из неравенств (9) и (10) следует, что $f_0(\xi)$ не может быть финитной функцией. Действительно,

$$f_0(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{(1+\delta)u} F(u) \right) e^{-i\xi u} du.$$

Следовательно, $f_0(\xi)$ является аналитической функцией в некоторой полосе около вещественной оси. Полученное противоречие доказывает, что для всякого $\delta > 0$ найдется последовательность положительных чисел $u_1, u_2, \dots \rightarrow +\infty$ такая, что выполняется неравенство (8). $\square$

ЛЕММА 19. Для любой целой функции $F(u)$, удовлетворяющей условиям (7), и положительном x и $N = [x] + 2$ таком, что $\sqrt{\pi}RN > 1$, найдется полином $P_1(y)$ степени N^2 такой, что для любого y из отрезка $[x-1, x+1]$ выполняется неравенство

$$|F(yR) - P_1(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \ln x}.$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим многочлен $P_1(y)$, заданный равенством

$$P_1(y) = \sum_{m=0}^{N^2} \frac{b_m}{m!} (yR)^m.$$

Ясно, что

$$F(yR) - P_1(y) = \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{b_m}{m!} (yR)^m.$$

Так как $\sqrt{\pi}RN > 1$, то $|b_m| < 1$ для любого $m > N^2$.

Для положительных y справедливы неравенства

$$\left| \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{b_m}{m!} (yR)^m \right| \leq \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{(yR)^m}{m!} \leq \frac{(yR)^{N^2}}{(N^2)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(yR)^m}{m!} \leq \frac{(yR)^{N^2} e^{yR}}{(N^2)!},$$

так как $(N^2 + m)! > (N^2)!m!$. Применим неравенство Стирлинга

$$\sqrt{2\pi} N^{2N^2+1} e^{\frac{1}{12N^2} - N^2} > (N^2)! > \sqrt{2\pi} N^{2N^2+1} e^{\frac{1}{12N^2+1} - N^2},$$

получим

$$\left| \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{b_m}{m!} (yR)^m \right| \leq \frac{(yR)^{N^2} e^{yR} e^{N^2 - \frac{1}{12N^2+1}}}{\sqrt{2\pi} N^{2N^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{yR + N^2(\ln(yR) + 1 - 2\ln N) - \ln N - \frac{1}{12N^2+1}}$$

Отсюда следует, что для любого $y \in [x-1, x+1]$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |F(yR) - P_1(y)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{yR + N^2(\ln(yR) + 1 - 2\ln N) - \ln N - \frac{1}{12N^2+1}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(x+1)R + N^2(\ln((x+1)R) + 1 - 2\ln N) - \ln N - \frac{1}{12N^2+1}}, \end{aligned}$$

так как при $y \in [x-1, x+1]$ функция

$$yR + N^2(\ln(yR) + 1 - 2\ln N)$$

монотонно возрастает:

$$(yR + N^2(\ln(yR) + 1 - 2\ln N))' = R + \frac{N^2}{y} > 0.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} &(x+1)R + N^2(\ln((x+1)R) + 1 - 2\ln N) - \ln N - \frac{1}{12N^2+1} < \\ &< \frac{x+1}{4} + N^2(\ln((x+1)) - \ln 4 + 1 - 2\ln N) - \ln N - \frac{1}{12N^2+1} < \\ &< \frac{x+1}{4} - N^2 \ln N - \ln N < -x^2 \ln x, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 20. Для полинома $P_1(y)$ из леммы 19 для любого $y \in [x - \frac{1}{32}N^{-5}, x + \frac{1}{32}N^{-5}]$ справедливо неравенство

$$|P_1(y) - P_1(x)| \leq \frac{|P_1(x)|}{32N - 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$K_1 = \max_{y \in [x_j - \frac{1}{32}N^{-5}, x_j + \frac{1}{32}N^{-5}]} |P_1(y)|, \quad K_1 = |P_1(y_0)|, \quad y_0 \in \left[x_j - \frac{1}{32}N^{-5}, x_j + \frac{1}{32}N^{-5} \right],$$

определим многочлен $Q_1(y)$ с помощью равенства $Q_1(y) = K_1^{-1}P_1(x_j + \frac{1}{32}N^{-5}y)$, тогда

$$\max_{y \in [-1, 1]} |Q_1(y)| = 1$$

и по теореме А. А. Маркова (См. [1], стр. 323)

$$\max_{y \in [-1, 1]} |Q'_1(y)| \leq N^4.$$

Справедливы неравенства

$$|P_1(y_0) - P_1(x)| \leq |P_1(y_0)| |y_0 - x| N^4 \leq \frac{|P_1(y_0)|}{32N}, \quad |P_1(x)| \geq |P_1(y_0)| \left(1 - \frac{1}{32N} \right).$$

Отсюда следует, что

$$K_1 \leq \frac{|P_1(x)|}{1 - \frac{1}{32N}}, \quad |P_1(y) - P_1(x)| \leq \frac{|P_1(x)|}{32N - 1}$$

и лемма полностью доказана. $\square$

ЛЕММА 21. Для положительного x и $N = [x] + 2$ таком, что $\sqrt{\pi}RN > 1$, найдется полином $P_2(y)$ степени N^2 такой, что для любого y из отрезка $[x - 1, x + 1]$ выполняются неравенства

$$\left| e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}y} - P_2(y) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \ln x}, \quad P_2(y) = e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}y} - c_2(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \ln x},$$

где $|c_2(y)| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим многочлен $P_2(y)$, заданный равенством

$$P_2(y) = \sum_{m=0}^{N^2} \frac{1}{m!} \left(-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}y \right)^m.$$

Ясно, что

$$e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}y} - P_2(y) = \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}y \right)^m.$$

Для положительных y справедливы неравенства

$$\left| \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}y \right)^m \right| \leq \frac{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}y \right)^{N^2}}{(N^2)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}y \right)^m}{m!} \leq \frac{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}y \right)^{N^2} e^{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}y}}{(N^2)!},$$

так как $(N^2 + m)! > (N^2)!m!$. Применим неравенство Стирлинга

$$(N^2)! > \sqrt{2\pi} N^{2N^2+1} e^{\frac{1}{12N^2+1} - N^2},$$

получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y \right)^m \right| &\leq \frac{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y \right)^{N^2} e^{\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y} e^{N^2 - \frac{1}{12N^2+1}}}{\sqrt{2\pi} N^{2N^2+1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y \right) + N^2 \left(\ln \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y \right) + 1 - 2 \ln N \right) - \ln N - \frac{1}{12N^2+1}} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого $y \in [x-1, x+1]$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \left| e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y} - P_2(y) \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y \right) + N^2 \left(\ln \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y \right) + 1 - 2 \ln N \right) - \ln N - \frac{1}{12N^2+1}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} (x+1) \right) + N^2 \left(\ln \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} (x+1) \right) + 1 - 2 \ln N \right) - \ln N - \frac{1}{12N^2+1}}, \end{aligned}$$

так как при $y \in [x-1, x+1]$ функция

$$\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y \right) + N^2 \left(\ln \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y \right) + 1 - 2 \ln N \right)$$

монотонно возрастает:

$$\left(\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y \right) + N^2 \left(\ln \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y \right) + 1 - 2 \ln N \right) \right)' = \frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \frac{N^2}{y} > 0.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} (x+1) \right) + N^2 \left(\ln \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} (x+1) \right) + 1 - 2 \ln N \right) - \ln N - \frac{1}{12N^2+1} &< \\ < x+1 + N^2 (\ln(x+1) + 1 - 2 \ln N) - \ln N - \frac{1}{12N^2+1} &< \\ < x+1 - N^2 \ln N - \ln N < -x^2 \ln x, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 22. Для положительного x и $N = [x] + 2$ таком, что $\sqrt{\pi}RN > 1$, найдется полином $P(y)$ степени $2N^2$ такой, что для любого y из отрезка $[x-1, x+1]$ выполняется неравенство

$$|\Delta(y) - P(y)| \leq \frac{2}{\pi R} e^{Rx - x^2 \ln x}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно лемме 17

$$\Delta(y) = \pi R^2 e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} (yR)^m, \quad b_m = \frac{(-1)^m R^m \bar{a}_m}{m+1}$$

и

$$0 < \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 (m+1) \leq \frac{1}{\pi R^2}, \quad |b_m| \leq \frac{1}{\pi R \sqrt{m+1}}.$$

Положим $P(y) = P_1(y)P_2(y)$, где многочлены $P_1(y)$ и $P_2(y)$ из лемм 19 и 21. Тогда степень многочлена $P(y)$ будет $2N^2$ и справедливы равенства

$$e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} y} = P_2(y) + c_2(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \ln x}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} (yR)^m = P_1(y) + c_1(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \ln x},$$

где для любого y из отрезка $[x-1, x+1]$ выполнены неравенства

$$|c_1(y)| \leq 1, \quad |c_2(y)| \leq 1.$$

Так как справедливы неравенства

$$\max_{y \in [x-1, x+1]} |P_1(y)| \leq \frac{1}{\pi R} e^{R(x+1)} < \frac{\sqrt[4]{e}}{\pi R} e^{Rx}, \quad \max_{y \in [x-1, x+1]} |P_2(y)| \leq e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}(x-1)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \ln x},$$

то при достаточно большом x

$$\begin{aligned} |\Delta(y) - P(y)| &= \left| \left(P_2(y) + c_2(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \ln x} \right) \left(P_1(y) + c_1(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \ln x} \right) - P_1(y) P_2(y) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \ln x} \left(\frac{\sqrt[4]{e}}{\pi R} e^{Rx} + e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}(x-1)} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \ln x} \right) < \frac{2}{\pi R} e^{Rx - x^2 \ln x}, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Будем называть ведущей частью комплексного числа $a + bi$ его действительную часть, если $|a| \geq |b|$, и его мнимую часть, если $|b| > |a|$. Для комплексного числа $c + di$ соответствующей частью будем называть действительную часть, если действительная часть у $a + bi$ является ведущей, и мнимую часть, если мнимая часть у $a + bi$ является ведущей.

ЛЕММА 23. *Существует $\delta_0 > 0$ и бесконечная последовательность положительных вещественных чисел $x_1, x_2, \dots \rightarrow +\infty$ такая, что при достаточно больших x_j для $N = [x_j] + 2$, $a_j = x_j - \frac{1}{32}N^{-5}$, $b = \frac{1}{16}N^{-5}$ во всех точках y отрезка $r_j = [a_j, a_j + b_j]$ выполняется одно из неравенств*

$$\begin{aligned} |\Re \Delta(y)| &> \frac{99\sqrt{2}\pi R^2}{200} e^{-(\sigma_M - \delta_0)x_j}, \\ |\Im \Delta(y)| &> \frac{99\sqrt{2}\pi R^2}{200} e^{-(\sigma_M - \delta_0)x_j}, \end{aligned} \quad (11)$$

при этом соответствующая часть величины $\Delta(y)$ для ведущей части величины $\Delta(x_j)$ на всём отрезке знакопостоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно лемме 18 для любого $\delta > 0$ найдется последовательность положительных чисел $u_1, u_2, \dots \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} (u_j)^m \right| > e^{-(1+2\delta)u_j}.$$

Полагая $x_j = \frac{u_j}{R}$, получим:

$$\begin{aligned} |\Delta(x_j)| &= \pi R^2 e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}x_j} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} (x_j R)^m \right| > \pi R^2 e^{-\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4}x_j} e^{-(1+2\delta)Rx_j} = \\ &= \pi R^2 e^{-\left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + (1+2\delta)R\right)x_j} = \pi R^2 e^{-(\sigma_M + 2\delta R - \delta_1)x_j}. \end{aligned}$$

Положим $N = [x_j] + 2$, тогда $x_j + 1 < N$. Будем считать номер j достаточно большим, что бы выполнялось неравенство $\sqrt{\pi}RN > 1$ и, следовательно, $|b_m| < 1$ для любого $m > N^2$.

Рассмотрим многочлен $P(y)$ степени $2N^2$ на отрезке $[x_j - 1, x_j + 1]$ из леммы 22. Пусть

$$K = \max_{y \in [x_j - \frac{1}{32}N^{-5}, x_j + \frac{1}{32}N^{-5}]} |P(y)|,$$

определим многочлен $Q(y)$ с помощью равенства $Q(y) = K^{-1}P\left(x_j + \frac{1}{32}N^{-5}y\right)$, тогда

$$\max_{y \in [-1, 1]} |Q(y)| = 1$$

и по теореме А. А. Маркова (См. [1], стр. 323)

$$\max_{y \in [-1, 1]} |Q'(y)| \leq 4N^4.$$

Справедливы неравенства

$$|P(y)| < \frac{|P_1(x_j)|}{32N-1} \left(e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}(x_j-\frac{1}{32}N^{-5})} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_j^2 \ln x_j} \right),$$

следовательно $K < \frac{|P_1(x_j)|}{32N-1} \left(e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}(x_j-\frac{1}{32}N^{-5})} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_j^2 \ln x_j} \right) < \frac{2|P_1(x_j)|}{32N-1} e^{-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4}(x_j-\frac{1}{32}N^{-5})}$ при достаточно большом x_j . Поэтому для отрезка

$$[a, a+b] = \left[x_j - \frac{1}{32}N^{-5}, x_j + \frac{1}{32}N^{-5} \right] \subset [x_j - 1, x_j + 1]$$

с $x_j, y \in [a, a+b]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |P(y) - P(x_j)| &< \frac{1}{4N} \frac{|P_1(x_j)|}{32N-1} e^{(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4})x_j} e^{\frac{3\sigma_M+\theta_1}{128}N^{-5}} \leq \\ &\leq \frac{1}{4N} \frac{|P_1(x_j)|}{32N-1} e^{(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4})x_j} \left(1 + (e-1) \frac{1}{32}N^{-5} \right) \leq \frac{17}{64N} \frac{|P_1(x_j)|}{32N-1} e^{(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4})x_j}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого $y \in [a, a+b]$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |\Delta(y)| &\geq |\Delta(x_j)| - |\Delta(x_j) - \Delta(y)| > \\ &> |\Delta(x_j)| - \frac{4}{\pi R} e^{x_j - x_j^2 \ln x_j} - |P(y) - P(x_j)| > \\ &> |\Delta(x_j)| - \frac{4}{\pi R} e^{x_j - x_j^2 \ln x_j} - \frac{17}{64N} \frac{|P_1(x_j)|}{32N-1} e^{(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4})x_j}. \end{aligned}$$

Так как $P_1(x_j) = F(Rx_j) - c_1(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_j^2 \ln x_j}$, где $|c_1(y)| \leq 1$, то

$$|P_1(x_j)| \leq |F(Rx_j)| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_j^2 \ln x_j}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |\Delta(y)| &> |\Delta(x_j)| - \frac{4}{\pi R} e^{x_j - x_j^2 \ln x_j} - \frac{17}{64N} \frac{1}{32N-1} e^{(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4})x_j} \left(|F(Rx_j)| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_j^2 \ln x_j} \right) = \\ &= |\Delta(x_j)| \left(1 - \frac{17}{64N} \frac{1}{32N-1} \right) - e^{-x_j^2 \ln x_j} \left(\frac{4}{\pi R} e^{x_j} + \frac{17}{64N} \frac{1}{32N-1} e^{(-\frac{3\sigma_M+\theta_1}{4})x_j} \right) > \\ &> \frac{997}{1000} |\Delta(x_j)| - \frac{5}{\pi R} e^{x_j - x_j^2 \ln x_j} > \frac{99}{100} |\Delta(x_j)| \end{aligned}$$

при достаточно большом x_j .

Выберем величины δ_0 и δ из условий

$$\delta_0 = \delta_1 - 2\delta R > 0,$$

что эквивалентно неравенству

$$\frac{\sigma_M - \theta_1}{4} - R - 2\delta R > 0, \quad \frac{\sigma_M - \theta_1}{8R} - \frac{1}{2} > \delta.$$

Положим $\delta = \frac{\sigma_M - \theta_1}{8R} - \frac{1}{2} - \frac{3\delta_1}{8R}$, получим

$$0 < \delta_0 = \frac{\sigma_M - \theta_1}{4} - R - \frac{\sigma_M - \theta_1}{4} + R + \frac{3\delta_1}{4} = \frac{3\delta_1}{4} < \sigma_M, \quad \delta = \frac{\sigma_M - \theta_1 - 4R - 3\delta_1}{8R} = \frac{\delta_1}{8R}.$$

Заметим, что при $0 < R < \frac{1}{6}$ будет $\delta_0 < \delta$, при $R = \frac{1}{6}$ будет $\delta_0 = \delta$, а при $R > \frac{1}{6}$ будет $\delta_0 > \delta$.

И так, для любого $y \in [a, a + b]$ имеем:

$$|\Delta(y)| \geq \frac{99}{100} |\Delta(x_j)| > \frac{99\pi R^2}{100} e^{-(\sigma_M - \delta_0)x_j}.$$

Так как $|\Delta(y)| \leq \sqrt{2} \max(|\Re \Delta(y)|, |\Im \Delta(y)|)$, то

$$\max(|\Re \Delta(y)|, |\Im \Delta(y)|) > \frac{99\sqrt{2}\pi R^2}{200} e^{-(\sigma_M - \delta_0)x_j}$$

и первое утверждение леммы полностью доказано.

Пусть теперь, для определенности, $\Re \Delta(x_j)$ является ведущей частью величины $\Delta(x_j)$, тогда $|\Re \Delta(x_j)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} |\Delta(x_j)| > \frac{\sqrt{2}}{2} \pi R^2 e^{-(\sigma_M - \delta_0)x_j}$. Для $|\Re \Delta(y)|$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} |\Re \Delta(y)| &> |\Re \Delta(x_j)| - \frac{17}{64N} \frac{1}{32N-1} |\Delta(x_j)| - \frac{5}{\pi R} e^{x_j - x_j^2 \ln x_j} \geq \\ &\geq \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{17}{64N} \frac{1}{32N-1} \right) \pi R^2 e^{-(\sigma_M - \delta_0)x_j} - \frac{5}{\pi R} e^{x_j - x_j^2 \ln x_j} > 0 \end{aligned}$$

для достаточно больших x_j . Но отсюда следует, что соответствующая часть величины $\Delta(y)$ для ведущей части величины $\Delta(x_j)$ на всём отрезке не меняет знак, что и завершает доказательство леммы. $\square$

ЛЕММА 24. Для любой функции $\varphi(\alpha) \in \mathbf{H}_2^{(R)}$ с $\|\varphi(\alpha)\| = 1$ существуют два подряда ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k(\alpha, \vec{\theta}_0), \varphi(\alpha)) \quad (12)$$

сходящиеся к $+\infty$ и к $-\infty$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 8 для любого отрезка $\left[e^{x_j - \frac{1}{32N^5}}, e^{x_j + \frac{1}{32N^5}} \right]$ имеется не менее $\frac{e^{\sigma_M(x_j - \frac{1}{32N^5})}}{32(x_j - \frac{1}{32N^5})^6} > 4$ простых элементов моноида M . Если ведущая часть величины $\Delta(x_j)$ есть действительная часть $\Delta(x_j)$, которая больше 0, то рассмотрим сумму S_j величин $(\eta_k(\alpha, \vec{\theta}_0), \varphi(\alpha))$ с номерами $k \equiv 0 \pmod{4}$ и простыми элементами $q_k \in \left[e^{x_j - \frac{1}{32N^5}}, e^{x_j + \frac{1}{32N^5}} \right]$. Ясно, что

$$S_j > \frac{1}{4} \frac{e^{\sigma_M(x_j - \frac{1}{32N^5})}}{32(x_j - \frac{1}{32N^5})^6} \frac{99\sqrt{2}\pi R^2}{200} e^{-(\sigma_M - \delta_0)x_j} = \frac{e^{-\frac{\sigma_M}{32N^5}}}{128(x_j - \frac{1}{32N^5})^6} \frac{99\sqrt{2}\pi R^2}{200} e^{\delta_0 x_j}$$

и правая часть неограниченно возрастает с ростом x_j .

Если ведущая часть величины $\Delta(x_j)$ есть действительная часть $\Delta(x_j)$, которая меньше 0, то рассмотрим сумму S_j величин $(\eta_k(\alpha, \vec{\theta}_0), \varphi(\alpha))$ с номерами $k \equiv 2 \pmod{4}$ и простыми элементами $q_k \in \left[e^{x_j - \frac{1}{32N^5}}, e^{x_j + \frac{1}{32N^5}} \right]$. Для неё будет выполняться та же самая оценка.

Если ведущая часть величины $\Delta(x_j)$ есть мнимая часть $\Delta(x_j)$, которая больше 0, то рассмотрим сумму S_j величин $(\eta_k(\alpha, \vec{\theta}_0), \varphi(\alpha))$ с номерами $k \equiv 3 \pmod{4}$ и простыми элементами $q_k \in \left[e^{x_j - \frac{1}{32N^5}}, e^{x_j + \frac{1}{32N^5}} \right]$. Для неё будет выполняться та же самая оценка.

Наконец, если ведущая часть величины $\Delta(x_j)$ есть мнимая часть $\Delta(x_j)$, которая меньше 0, то рассмотрим сумму S_j величин $(\eta_k(\alpha, \vec{\theta}_0), \varphi(\alpha))$ с номерами $k \equiv 1 \pmod{4}$ и простыми элементами $q_k \in \left[e^{x_j - \frac{1}{32N^5}}, e^{x_j + \frac{1}{32N^5}} \right]$. Для неё будет выполняться та же самая оценка.

Аналогично строится подряд расходящийся к $-\infty$. Лемма полностью доказана. $\square$

Нам потребуется теорема Д. В. Печерского (См. [22], [5], стр. 339).

ТЕОРЕМА 6. (Теорема Д. В. Печерского) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ из векторов вещественного гильбертова пространства H удовлетворяет условию $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$ и для любого вектора $e \in H$, $\|e\| = 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n, e)$ сходится условно при некоторой перестановке членов, то для любого $s \in H$ существует перестановка $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натурального ряда, при которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} = s$$

в смысле нормы H .

Будем через $T(M, y)$ обозначать конечное множество простых элементов моноида M , удовлетворяющее условию $P(M) \cap [1, y] \subset T(M, y)$. Ясно, что моноид $M(T(M, y)) \subset M$.

Будем через $\zeta_{T(M, y)}(\alpha, \vec{\theta})$ обозначать произведение Эйлера:

$$\zeta_{T(M, y)}(\alpha, \vec{\theta}) = \prod_{q_k \in T(M, y)} \left(1 - \frac{e^{-2\pi i \theta_{q_k}}}{q_k^\alpha} \right)^{-1}.$$

ЛЕММА 25. (Основная) Пусть $0 < r < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}$, $g(\alpha)$ аналитична при $|\alpha| < r$ и непрерывна при $|\alpha| \leq r$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ и $y > 1$ существует конечное множество $T(M, y)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| g(\alpha) - \ln \zeta_{T(M, y)} \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha, \vec{\theta}_0 \right) \right| < \varepsilon$$

и

$$\ln \zeta_{T(M, y)}(\alpha, \vec{\theta}_0) = - \sum_{q_k \in T(M, y)} \ln \left(1 - \frac{e^{-2\pi i \frac{k}{4}}}{q_k^\alpha} \right) = \sum_{q_k \in T(M, y)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \frac{kn}{4}}}{n q_k^{n(\alpha)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 13, 14, 15, 24 следует, что выполнены условия теоремы Печерского, поэтому для любой $g(\alpha)$ аналитичной при $|\alpha| < r$ и непрерывной при $|\alpha| \leq r$ существует перестановка $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натурального ряда, при которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k}(\alpha, \vec{\theta}_0) = g(\alpha).$$

Отсюда следует, что найдётся $L = L(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| \sum_{k=1}^L u_{n_k}(\alpha, \vec{\theta}_0) - g(\alpha) \right| < \varepsilon$$

и множество $P(M) \cap [1, y] \subset \{q_{n_k} | k \leq L\}$. Поэтому полагаем $T(M, y) = \{q_{n_k} | k \leq L\}$ и лемма полностью доказана. $\square$

4. Доказательство теоремы универсальности

Нашей ближайшей целью является доказательство аналога теорем 1 и 2 из монографии [5] (стр. 240, 249). Мы разобьём эти доказательства на несколько лемм, которые позволяют лучше проследить новые моменты в доказательстве теорем универсальности. Местами нами восстановлены рассуждения, которые опущены в монографии [5] и в статье [4], и устранены отдельные опечатки из этих работ.

Далее везде рассматриваем только регулярные моноиды Сельберга–Бредихина.

На протяжении всего раздела $g(\alpha)$ аналитична при $|\alpha| < r$ и непрерывна при $|\alpha| \leq r$.

Введём новые обозначения и соглашения. Пусть $\varepsilon_1 \in (0, 1]$. Выберем $\gamma_1 > 1$ таким, чтобы выполнялось

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \gamma_1 r < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}, \\ \text{b) } \max_{|\alpha| \leq r} \left| g(\alpha) - g\left(\frac{\alpha}{\gamma_1}\right) \right| < \varepsilon_1. \end{array} \right. \quad (13)$$

В силу леммы 12 это можно сделать.

Пусть множество E задано равенством

$$E = \{\alpha \mid |\alpha| - \gamma_1 r < \Re \alpha \leq 2, -1 \leq \Im \alpha \leq 1\} = \{\alpha \mid |\alpha| - \gamma_1 r < \sigma \leq 2, -1 \leq t \leq 1\}.$$

Положим для краткости $Q = T(M, z)$, где $y < z$. Определим величину

$$J = \int_T^{2T} \iint_E \left| \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + i\tau) \zeta_Q^{-1}(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) - 1 \right|^2 d\sigma dt d\tau.$$

ЛЕММА 26. Для всякого $\varepsilon_2 > 0$ найдется $z_0 = z_0(\varepsilon_2)$ такое, что при $z > z_0$ и $T > T_0(\varepsilon_2, z)$ выполняется неравенство $J \ll \varepsilon_2^4 T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как M — регулярный моноид Сельберга–Бредихина, то при $\alpha = \sigma + it$, $t \in [T - 1, 2T + 1]$ выполняется равенство

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M, n \leq T} \frac{1}{n^\alpha} + C \frac{\theta}{\alpha - \theta} \frac{1}{T^{\alpha - \theta}} + O\left(\frac{1}{T^{\sigma - \theta_1}}\right) = \sum_{n \in M, n \leq T} \frac{1}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{T^{\sigma - \theta_1}}\right),$$

так как $C \frac{\theta}{\alpha - \theta} \frac{1}{T^{\alpha - \theta}} = O\left(\frac{1}{T^{\sigma - \theta + 1}}\right)$ и $\sigma - \theta + 1 > \sigma - \theta_1$.

Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \iint_E \left(\int_T^{2T} \left| \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + i\tau) \zeta_Q^{-1}(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) - 1 \right|^2 d\tau \right) d\sigma dt = \\ &= \iint_{E + \sigma_M^*} \left(\int_T^{2T} \left| \zeta(M|\alpha + i\tau) \zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) - 1 \right|^2 d\tau \right) d\sigma dt \ll \\ &\ll \iint_{E + \sigma_M^*} \left(\int_T^{2T} \left| \left(\sum_{n \in M, n \leq T} \frac{1}{n^{\alpha + i\tau}} \right) \zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) - 1 \right|^2 d\tau \right) d\sigma dt + \\ &\quad + O\left(T^{-2(\sigma_M^* - \gamma_1 r - \theta_1)} \max_{\alpha \in E + \sigma_M^*} \int_T^{2T} \left| \zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) \right|^2 d\tau\right), \end{aligned} \quad (14)$$

так как при $\alpha \in E + \sigma_M^*$ имеем $\sigma - \theta_1 \geq \sigma_M^* - \gamma_1 r - \theta_1 > \frac{\sigma_M - \theta_1}{2} > 0$,

$$2\sigma - \theta \geq \sigma_M^* - \gamma_1 r - \theta > 2 \left(\frac{3\theta + \theta_1}{4} - \frac{\theta - \theta_1}{4} \right) - \theta = \theta_1 \geq 0.$$

Имеем:

$$T^{-2(\sigma_M^* - \gamma_1 r - \theta_1)} \max_{\alpha \in E + \sigma_M^*} \int_T^{2T} \left| \zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) \right|^2 d\tau \leq T^{2\gamma_1 r + 1 + 2\theta_1 - 2\sigma_M^*} \zeta_Q^2(\sigma_M^* - \gamma_1 r, \vec{0}), \quad (15)$$

так как

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} \left| \zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) \right|^2 d\tau &= \int_T^{2T} \left| \prod_{q_k \in T(M, z)} \left(1 - \frac{1}{q_k^{\alpha + i\tau}} \right) \right|^2 d\tau \leq \int_T^{2T} \left| \sum_{n \in M(T(M, z))} \frac{1}{n^{\sigma_M^* - \gamma_1 r}} \right|^2 d\tau = \\ &= T \cdot \zeta_Q^2(\sigma_M^* - \gamma_1 r, \vec{0}). \end{aligned}$$

Далее, при $T > z$ выполняется

$$\left(\sum_{n \in M, n \leq T} \frac{1}{n^\alpha} \right) \zeta_Q^{-1}(\alpha, \vec{0}) = 1 + \sum_{n \in M, z < n \leq z_1 T} \frac{b_n}{n^\alpha},$$

где $z_1 = z^z$ и $|b_n| \leq \tau(n)$, $\tau(n)$ — число делителей числа n .

Поэтому при $T > z$ выполняется цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} \left| \left(\sum_{n \in M, n \leq T} \frac{1}{n^{\alpha + i\tau}} \right) \zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) - 1 \right|^2 d\tau &= \int_T^{2T} \left| \sum_{n \in M, z < n \leq z_1 T} \frac{b_n}{n^\alpha} \right|^2 d\tau = \\ &= \int_T^{2T} \sum_{n, m \in M, z < n, m \leq z_1 T} \frac{b_n \overline{b_m}}{n^{\alpha + i\tau} m^{\bar{\alpha} - i\tau}} d\tau \ll \\ &\ll T \sum_{n \in M, z < n \leq z_1 T} \frac{|b_n|^2}{n^{2\sigma}} + O \left(\sum_{n, m \in M, z < n < m \leq z_1 T} \frac{|b_n| |b_m|}{(nm)^\sigma} \left| \int_T^{2T} \left(\frac{m}{n} \right)^{i\tau} d\tau \right| \right) \ll \\ &\ll T \sum_{n \in M, z < n \leq z_1 T} \frac{\tau^2(n)}{n^{2\sigma}} + \sum_{n, m \in M, z < n < m \leq z_1 T} \frac{\tau(n) \tau(m)}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln \left(\frac{m}{n} \right)} \ll \\ &\ll T \int_z^\infty \frac{Cx^\theta}{x^{2\sigma + 1 - 2\varepsilon}} dx + (z_1 T)^{2\varepsilon} \cdot \sum_{n, m \in M, z < n < m \leq z_1 T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln \left(\frac{m}{n} \right)} \ll \\ &\ll T z^{-2\sigma + 2\varepsilon + \theta} + (z_1 T)^{2\varepsilon} \cdot \sum_{n, m \in M, z < n < m \leq z_1 T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln \left(\frac{m}{n} \right)} = T z^{-2\sigma + 2\varepsilon + \theta} + (z_1 T)^{2\varepsilon} \cdot S, \quad (16) \end{aligned}$$

так как $\tau(n) \ll n^\varepsilon$.

Далее,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n, m \in M, z < n < m \leq z_1 T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln \left(\frac{m}{n} \right)} = \sum_{n, m \in M, z < n < m < 2z} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln \left(\frac{m}{n} \right)} + \\ &+ \sum_{n, m \in M, z < n \leq \frac{m}{2} < m \leq z_1 T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln \left(\frac{m}{n} \right)} + \sum_{n, m \in M, z < \frac{m}{2} \leq n < m \leq z_1 T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln \left(\frac{m}{n} \right)} = S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned}$$

Учитывая $\sigma_M^* - \gamma_1 r < \sigma < \sigma_M^* + 2$ и $2\sigma - \theta > \theta_1 \geq 0$, имеем:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n, m \in M, z < n < m < 2z} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} \leq \frac{1}{z^{2\sigma}} \sum_{m \in M, z < m < 4z^2} \sum_{z < n < m} \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} \leq \\
&\leq \frac{1}{z^{2\sigma}} \sum_{m \in M, z < m < 4z^2} \sum_{z < n < m} \frac{2n}{m-n} = \frac{1}{z^{2\sigma}} \sum_{m \in M, z < m < 4z^2} \sum_{k=1}^{m-[z]-1} \frac{2(m-k)}{k} \ll \\
&\ll \frac{z \ln z}{z^{2\sigma}} \sum_{m \in M, z < m < 4z^2} 1 \ll \frac{\ln z}{z^{2\sigma-1-2\theta}}; \\
S_2 &= \sum_{n, m \in M, z < n \leq \frac{m}{2} < m \leq z_1 T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} \leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{m \in M, 2z^2 < m \leq (z_1 T)^2} \frac{\tau(m)}{m^\sigma} \ll z^{-2\sigma+2\theta+\varepsilon}; \\
S_3 &= \sum_{n, m \in M, z < \frac{m}{2} \leq n < m \leq z_1 T} \frac{1}{(nm)^\sigma} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} \leq \\
&\leq \sum_{m \in M, 2z < m < z_1 T} \frac{2^\sigma}{m^{2\sigma}} \sum_{n \in M, \frac{m}{2} \leq n < m} \frac{1}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)} \leq \sum_{m \in M, 2z < m < z_1 T} \frac{2^\sigma}{m^{2\sigma}} \cdot \sum_{n \in M, \frac{m}{2} \leq n < m} \frac{2n}{m-n} \ll \\
&\ll \sum_{m \in M, 2z < m < z_1 T} \frac{1}{m^{2\sigma}} m \ln m \ll \ln(z_1 T) \cdot \begin{cases} (z_1 T)^{1+\theta-2\sigma} & \text{при } 1+\theta-2\sigma > 0, \\ \ln(z_1 T) & \text{при } \sigma = \frac{1+\theta}{2}, \\ \frac{1}{z^{2\sigma-1-\theta}} & \text{при } \sigma > \frac{1+\theta}{2}. \end{cases} \\
S &\ll \frac{\ln z}{z^{2\sigma-1-2\theta}} + z^{-2\sigma+2\theta+\varepsilon} + \ln(z_1 T) \cdot \begin{cases} (z_1 T)^{1+\theta-2\sigma} & \text{при } 1+\theta-2\sigma > 0, \\ \ln(z_1 T) & \text{при } \sigma = \frac{1+\theta}{2}, \\ \frac{1}{z^{2\sigma-1-\theta}} & \text{при } \sigma > \frac{1+\theta}{2}. \end{cases} \quad (17)
\end{aligned}$$

Из оценок (16), (17) получим, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \iint_{E+\sigma_M^*} \int_T^{2T} \left| \left(\sum_{n \in M, n \leq T} \frac{1}{n^{\alpha+i\tau}} \right) \zeta_Q^{-1}(\alpha+i\tau, \vec{0}) - 1 \right|^2 d\tau d\sigma dt \ll z^{-2\sigma+2\varepsilon+\theta} + \\
&+ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{(z_1 T)^{2\varepsilon}}{T} \left(\frac{\ln z}{z^{2\sigma-1-2\theta}} + z^{-2\sigma+2\theta+\varepsilon} + \ln(z_1 T) \cdot \begin{cases} (z_1 T)^{1+\theta-2\sigma} & \text{при } 1+\theta-2\sigma > 0, \\ \ln(z_1 T) & \text{при } \sigma = \frac{1+\theta}{2}, \\ \frac{1}{z^{2\sigma-1-\theta}} & \text{при } \sigma > \frac{1+\theta}{2}. \end{cases} \right) \ll \\
&\ll z^{-2\sigma+2\varepsilon+\theta}. \quad (18)
\end{aligned}$$

Теперь из оценок (14), (15) и (18) заключаем, что для всякого $\varepsilon_2 > 0$ найдётся $z_0 = z_0(\varepsilon_2)$ такое, что

$$J \ll \varepsilon_2^4 T, \quad (19)$$

если только $z > z_0$ и $T > T_0(\varepsilon_2, z)$. $\square$

Положим

$$A_T = \left\{ \tau \left| \tau \in [T, 2T], \int \int_{E+\sigma_M^*} \left| \zeta(M|\alpha+i\tau) \zeta_Q^{-1}(\alpha+i\tau, \vec{0}) - 1 \right|^2 d\sigma dt < \varepsilon_2^2 \right. \right\}.$$

ЛЕММА 27. Для достаточно малого $\varepsilon_2 > 0$ для $\tau \in A_T$ выполняется неравенство

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| \ln \zeta(\alpha + \sigma_M^* + i\tau) - \ln \zeta_Q(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) \right| < 2c(\gamma_1) \varepsilon_2 \quad (20)$$

с некоторой константой $c(\gamma_1) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения множества A_T и величины J следует, что $J > (T - \text{mes } A_T)\varepsilon_2^2$. Поэтому из соотношения (19) следует, что при достаточно больших z и $T > T_0(\varepsilon_2, z)$ выполняется

$$\text{mes } A_T > (1 - \varepsilon_2^2)T. \quad (21)$$

Как известно (см. теорема 7 [5], стр. 323), если $f(z)$ регулярна при $|z - z_0| \leq R$ и

$$\iint_{|z - z_0| \leq R} |f(z)|^2 dx dy = H,$$

то

$$|f(z)| \leq \frac{\sqrt{H\pi^{-1}}}{R - R'}$$

при $|z - z_0| \leq R' < R$.

Положим $R = \gamma_1 r$, $R' = r$, $z_0 = \sigma_M^*$, $f(z) = \zeta(M|z + i\tau)\zeta_Q^{-1}(z + i\tau, \vec{0}) - 1$, $H = \varepsilon_2^2$, тогда из определения множества A_T и приведённой теоремы следует, что для $\tau \in A_T$ выполняется

$$\max_{|\alpha - \sigma_M^*| \leq r} \left| \zeta(M|\alpha + i\tau)\zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) - 1 \right| < c(\gamma_1)\varepsilon_2, \quad (22)$$

где $c(\gamma_1) = \frac{\sqrt{\pi^{-1}}}{\gamma_1 r - r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\gamma_1 - 1)r}$. Отсюда следует, что

$$\zeta(M|\alpha + i\tau)\zeta_Q^{-1}(\alpha + i\tau, \vec{0}) = 1 + \delta(\alpha)c(\gamma_1)\varepsilon_2,$$

где $|\delta(\alpha)| < 1$. Поэтому, прологарифмировав последнее равенство и беря главную ветвь логарифма, получим

$$\ln \zeta(\alpha + \sigma_M^* + i\tau) - \ln \zeta_Q(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) = \ln(1 + \delta(\alpha)c(\gamma_1)\varepsilon_2), \quad |\ln(1 + \delta(\alpha)c(\gamma_1)\varepsilon_2)| \leq 2c(\gamma_1)\varepsilon_2,$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

В силу леммы 25 (Основной) найдется последовательность конечных множеств простых элементов моноида M : $T_1(M, y_1) \subset T_2(M, y_2) \subset \dots$ такая, что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k(M, y_k) = P(M)$$

содержит все простые элементы моноида M и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|\alpha| \leq \gamma_1 r} \left| g(\alpha) - \ln \zeta_{T_k(M, y_k)} \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha, \vec{\theta}_0 \right) \right| = 0. \quad (23)$$

В силу непрерывности $\zeta_{T_k(M, y_k)} \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha, \vec{\theta}_0 \right)$ для всякого $\varepsilon_1 > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что из выполнения для всех $q \in T_k(M, y_k)$ неравенств

$$|\theta_q - \theta_q^{(0)}| < \delta \quad (24)$$

следует выполнение неравенства

$$\max_{|\alpha| \leq \gamma_1 r} \left| \ln \zeta_{T_k(M, y_k)} \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha, \vec{\theta}_0 \right) - \ln \zeta_{T_k(M, y_k)} \left(\frac{3\sigma_M + \theta_1}{4} + \alpha, \vec{\theta} \right) \right| < \varepsilon_1. \quad (25)$$

Положим

$$V_T = \left\{ \tau \left| \tau \in [T, 2T], \left| \tau \frac{\ln q}{2\pi} - \theta_q^{(0)} \right| < \delta \ (q \in T_k(M, y_k)) \right\}, \quad \vec{\theta}(\tau) = \left(\tau \frac{\ln q_1}{2\pi}, \tau \frac{\ln q_2}{2\pi}, \dots \right).$$

Пусть $\mathcal{D}$ — подобласть единичного куба $[0, 1]^N$ и N — количество q_ν в $T_k(M, y_k)$, задаваемая неравенствами (24) для $q \in T_k(M, y_k)$.

ЛЕММА 28. *Равномерно по α при $|\alpha| \leq \gamma_1 r$ выполняется неравенство*

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{V_T} \left| \ln \zeta_Q(\alpha + \sigma_M^*, \vec{\theta}(\tau)) - \ln \zeta_{T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^*, \vec{\theta}(\tau)) \right|^2 d\tau = \\ & = \int \dots \int_{\mathcal{D}} \left| \ln \zeta_Q(\alpha + \sigma_M^*, \vec{\theta}) - \ln \zeta_{T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^*, \vec{\theta}) \right|^2 d\theta_{q_1} \dots d\theta_{q_N}. \end{aligned} \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_{V_T} \iint_{|\alpha| \leq \gamma_1 r} \left| \ln \zeta_Q(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{\theta}) - \ln \zeta_{T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{\theta}) \right|^2 d\sigma dt d\tau = \\ & = \iint_{|\alpha| \leq \gamma_1 r} \frac{1}{T} \int_{V_T} \left| \ln \zeta_Q(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{\theta}) - \ln \zeta_{T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{\theta}) \right|^2 d\tau d\sigma dt = \\ & = \iint_{|\alpha| \leq \gamma_1 r} \frac{1}{T} \int_{V_T} \left| \ln \zeta_Q(\alpha + \sigma_M^*, \vec{\theta}(\tau)) - \ln \zeta_{T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^*, \vec{\theta}(\tau)) \right|^2 d\tau d\sigma dt. \end{aligned} \quad (27)$$

В силу теоремы Кронекера об аппроксимациях (см. теорему П.8.1, стр. 345 [5]) кривая $\gamma(\tau) = \left(\tau \frac{\ln q_1}{2\pi}, \tau \frac{\ln q_2}{2\pi}, \dots, \tau \frac{\ln q_N}{2\pi} \right)$ равномерно распределена по mod 1 в пространстве $\mathbb{R}^N$, так как в силу леммы 3 логарифмы простых элементов моноида M линейно независимы над полем рациональных чисел.

Применяя теорему П.8.3 (см. стр. 348 [5]), получим, что соотношение (26) выполняется равномерно по α , если $|\alpha| \leq \gamma_1 r$. $\square$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $0 < r < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}$, $g(\alpha)$ аналитична при $|\alpha| < r$ и непрерывна при $|\alpha| \leq r$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $T = T(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leq r} |g(\alpha) - \ln \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + iT)| < \varepsilon,$$

где под $\ln \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + iT)$ понимается ветвь $\ln \zeta(M|\alpha)$, вещественная при $\alpha \in \mathbb{R}$ и аналитически продолженная вдоль отрезков $[2, 2 + it]$, $[2 + it, \sigma + it]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $\zeta_{T_k(M, y_k)}(\alpha, \vec{\theta})$ следует, что при $T_k(M, y_k) \subset Q$

$$\zeta_Q(\alpha, \vec{\theta}) = \zeta_{T_k(M, y_k)}(\alpha, \vec{\theta}) \zeta_{Q \setminus T_k(M, y_k)}(\alpha, \vec{\theta}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_{\mathcal{D}} \left| \ln \zeta_Q(\alpha + \sigma_M^*, \vec{\theta}) - \ln \zeta_{T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^*, \vec{\theta}) \right|^2 d\theta_{q_1} \dots d\theta_{q_N} = \\ & = \int \dots \int_{\mathcal{D}} \left| \ln \zeta_{Q \setminus T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^*, \vec{\theta}) \right|^2 d\theta_{q_1} \dots d\theta_{q_N} \leq \\ & \leq \text{mes } \mathcal{D} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \ln \zeta_{Q \setminus T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^*, \vec{\theta}) \right|^2 d\theta_{q_1} \dots d\theta_{q_N}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\ln \zeta_{Q \setminus T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^*, \vec{\theta}) = \sum_{q \in Q \setminus T_k(M, y_k)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{-2\pi i n \theta_q}}{q^{n(\alpha + \sigma_M^*)}} \right),$$

то

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \ln \zeta_{Q \setminus T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^*, \vec{\theta}) \right|^2 d\theta_{q_1} \dots d\theta_{q_N} = \\
& = \sum_{q, u \in Q \setminus T_k(M, y_k)} \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{1}{nm} \cdot \frac{1}{q^{n(\alpha + \sigma_M^*)} u^{n(\bar{\alpha} + \sigma_M^*)}} \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{-2\pi i n \theta_q} e^{2\pi i m \theta_u} d\theta_{q_1} \dots d\theta_{q_N} = \\
& = \sum_{q \in Q \setminus T_k(M, y_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{q^{2n(\sigma + \sigma_M^*)}}.
\end{aligned}$$

Если $T_k(M, y_k)$ содержит все простые элементы моноида M , меньшие, чем y_k , то

$$\begin{aligned}
& \sum_{q \in Q \setminus T_k(M, y_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{q^{2n(\sigma + \sigma_M^*)}} \leq \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{q \in M, q > y_k} \frac{1}{q^{2(\sigma + \sigma_M^*)}} = \frac{\pi^2}{6} 2(\sigma + \sigma_M^*) \int_{y_k}^{\infty} \frac{\nu_M(x)}{x^{2(\sigma + \sigma_M^*) + 1}} dx \ll \\
& \ll \int_{y_k}^{\infty} \frac{x^{\theta}}{x^{2(\sigma + \sigma_M^*) + 1}} dx \ll \frac{1}{y_k^{2(\sigma + \sigma_M^*) - \theta}} \leq \frac{1}{y_k^{2\sigma_M^* + \theta_1}}.
\end{aligned}$$

Из соотношений (27) и (26) теперь следует, что при $T > T_1(T_k(M, y_k), Q)$

$$\frac{1}{T} \int_{V_T} \iint_{|\alpha| \leq \gamma_1 r} \left| \ln \zeta_Q(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) - \ln \zeta_{T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) \right|^2 d\sigma dt d\tau \ll \text{mes } \mathcal{D} \frac{1}{y_k^{2\sigma_M^* + \theta_1}}. \quad (28)$$

Применяя опять теорему Кронекера (см. теорему П.8.1, стр. 345 [5]), получим

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{mes } V_T = \text{mes } \mathcal{D}. \quad (29)$$

Из оценок (28) и (29) получаем, что при y_k , достаточно большом, и $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
& \text{mes} \left\{ \tau \left| \tau \in V_T, \iint_{|\alpha| \leq \gamma_1 r} \left| \ln \zeta_Q(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) - \ln \zeta_{T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) \right|^2 d\sigma dt < \frac{1}{y_k^{2\sigma_M^* + \theta_1}} \right\} > \\
& > \frac{1}{2} \text{mes } \mathcal{D} \cdot T.
\end{aligned}$$

Применяя теорему П.8.3 (см. стр. 348 [5]), отсюда получим, что

$$\begin{aligned}
& \text{mes} \left\{ \tau \left| \tau \in V_T, \max_{|\alpha| \leq \gamma_1 r} \left| \ln \zeta_Q(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) - \ln \zeta_{T_k(M, y_k)}(\alpha + \sigma_M^* + i\tau, \vec{0}) \right|^2 < \frac{1}{y_k^{2\sigma_M^* + \theta_1}} \right\} > \\
& > \frac{1}{2} \text{mes } \mathcal{D} \cdot T.
\end{aligned} \quad (30)$$

Если теперь взять $\varepsilon_2 < \frac{1}{2} \text{mes } \mathcal{D}$, то в силу неравенств (21) $\text{mes}(A_T \cap V_T) > 0$ и для $\tau \in A_T \cap V_T$ из соотношений (23), (25), (30) и (20) следует утверждение теоремы. $\square$

Доказательство следующей теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 2 из монографии [5] (см. стр. 249–250). Приведём его для полноты изложения.

ТЕОРЕМА 8. (об универсальности дзета-функции моноида натуральных чисел). Пусть $0 < r < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}$, $f(\alpha)$ аналитична при $|\alpha| < r$ и непрерывна при $|\alpha| \leq r$. Если $f(\alpha) \neq 0$ при $|\alpha| < r$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $T = T(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leq r} |f(\alpha) - \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + iT)| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon_1 > 0$. Пусть $\gamma > 1$ таково, что $\gamma r < \frac{\sigma_M - \theta_1}{4}$ и

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| f(\alpha) - f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) \right| < \varepsilon_1.$$

В силу теоремы 7 для заданного $\varepsilon \in (0, 1)$ найдётся $T = T(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| g\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - \ln \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + iT) \right| < \varepsilon,$$

где $f(\alpha) = e^{g(\alpha)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \max_{|\alpha| \leq r} \left| f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + iT) \right| &= \max_{|\alpha| \leq r} \left| e^{g\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)} - \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + iT) \right| = \\ &= \max_{|\alpha| \leq r} \left| e^{g\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)} \cdot \left| e^{\ln \zeta(M|\alpha + \sigma_M^* + iT) - g\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)} - 1 \right| \right| \ll \max_{|\alpha| \leq r} \left| f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) \right| \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε_1 и ε получаем утверждение теоремы. $\square$

5. Заключение

Из сравнения доказательства теоремы универсальности С. М. Воронина и теоремы универсальности для дзета-функций моноидов натуральных чисел, представленной в данной работе, мы видим, что все основные элементы доказательства С. М. Воронина непосредственно переносятся на класс дзета-функций регулярных моноидов Сельберга — Бредихина натуральных чисел.

Можно высказать предположение, что указанная теорема будет справедлива для широкого класса рядов Дирихле с эйлеровым произведением, соответствующих регулярным моноидам Сельберга — Бредихина натуральных чисел.

Авторы выражают свою благодарность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965.
2. Б. М. Бредихин, "Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями", Докл. АН СССР, 118:5 (1958), 855–857.
3. Б. М. Бредихин, Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полугрупп, Матем. сб., 1960, том 50(92), номер 2, 221–232.
4. Воронин С. М. Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1975. — Т. 39, № 3. — С. 475–486.
5. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

6. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.
7. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.
8. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.
9. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.
10. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.
11. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.
12. Н. Н. Добровольский. Распределение простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Матем. заметки (в печати).
13. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.
14. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.
15. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.
16. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.
17. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник, 2020, Т. 21, вып. 1, С. 165–185.
18. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Энтропия для некоторых моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 57–71.
19. Зигмунд А., Тригонометрические ряды. Том. II, М., «Мир», 1965.
20. А. В. Кирилина. О слабой теореме универсальности // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 308–313.
21. Лауринчикас А. П., Матсумото К., Стеудинг Й. "Универсальность L-функций, связанных с новыми формами". Изв. РАН. Сер. матем. — Т. 67, № 1 (2003). — С. 83–98; *Izv. Math.*, 67:1 (2003). — P. 77–90.
22. Печерский Д. В. О перестановках членов в функциональных рядах // Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 6, с. 1285–1287.

23. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.
24. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L -функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

REFERENCES

1. Bredikhin, B.M., 1958, "Free numerical semigroups with power densities", *Doklady Akademii nauk SSSR*, 118:5, pp. 855–857.
2. Voronin, S. M. 1975, "Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function", *Math. USSR Izv.*, vol. 9, pp. 443–453.
3. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, "Dzeta-funkcija Rimana", *Izd-vo Fiz-matlit, Moskva*, 376 p.
4. Gurvic A., Kurant R., 1968, "Teorija funkcij", *Izd-vo Nauka, Moskva*, 618 p.
5. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.
6. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.
7. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.
8. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 142–150.
9. N. N. Dobrovolsky. Distribution of simple elements in some monoids of natural numbers // Math. notes (in print).
10. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebroya, 2018, "About "zagrobelna the series" for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.
11. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.
12. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.
13. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.
14. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebroya, N. M. Dobrovol'skii, 2020, "Inverse problem for a monoid with an exponential sequence of Prime numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 165–185.
15. N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebroya, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "Entropy for some monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 57–71.

16. A. V. Kirilina, 2020, “On the weak universality theorem” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 308–313.
17. Laurinćikas, A., Matsumoto, K., Steuding, J. 2003, “The universality of L -functions associated with newforms”, *Izv. RAN, Ser. Mat.*, vol. 67 (1), pp. 83–98 (in Russian) $\equiv$ *Izv. Math.*, vol. 67 (1), pp. 77–90.
18. Chandrasekharan K., 1974, “Vvedenie v analiticheskiju teoriju chisel”, *Izd-vo Mir, Moskva*, 188 p.
19. Chudakov N. G., 1947, “Introduction to the theory of L -Dirichlet functions”, *M.-L.: OGIZ*, — 204 p.

Получено: 13.08.2023

Принято в печать: 11.12.2023