

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 4.

УДК 517.968

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-85-103

Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра произвольного порядка со степенной нелинейностью¹

С. Н. Асхабов

Асхабов Султан Нажмудинович — доктор физико-математических наук, Чеченский государственный педагогический университет; Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова; Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Грозный).
e-mail: askhabov@yandex.ru

Аннотация

В конусе пространства непрерывных функций методом весовых метрик (аналог метода Белецкого) доказывается глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения нетривиального решения начальной задачи для однородного интегро-дифференциального уравнения n -го порядка с разностным ядром и степенной нелинейностью. Показано, что это решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа и дана оценка скорости их сходимости к решению в терминах весовой метрики. Исследование основано на сведении начальной задачи к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению Вольтерра. Получены точная нижняя и верхняя априорные оценки решения, на основе которых построено полное весовое метрическое пространство, инвариантное относительно нелинейного оператора, порожденного этим интегральным уравнением Вольтерра. В отличие от линейного случая, установлено, что нелинейное однородное интегральное уравнение Вольтерра помимо тривиального решения может иметь еще и нетривиальное решение. Анализ полученных результатов показывает, что с ростом порядка интегро-дифференциального уравнения со степенной нелинейностью показатель степени уменьшается. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, степенная нелинейность, априорные оценки.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

С. Н. Асхабов. Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра произвольного порядка со степенной нелинейностью // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 85–103.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-11-00177).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 517.968

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-85-103

Volterra integro-differential equation of arbitrary order with power nonlinearity

S. N. Askhabov

Askhabov Sultan Najmudinovich — doctor of physical and mathematical sciences, Chechen State Pedagogical University, Kadyrov Chechen State University, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (Grozny).

e-mail: askhabov@yandex.ru

Abstract

In the cone of the space of continuous functions, the method of weight metrics (analogous to Bielecki's method) is used to prove a global theorem on the existence, uniqueness, and method of finding a nontrivial solution to the initial problem for a homogeneous n -order integro-differential equation with a difference kernel and power nonlinearity. It is shown that this solution can be found by the method of successive approximations of the Picard type and an estimate is given for the rate of their convergence to the solution in terms of the weight metric. The study is based on the reduction of the initial problem to the equivalent nonlinear Volterra integral equation. Exact lower and upper a priori estimates for the solution are obtained, on the basis of which a complete weighted metric space is constructed that is invariant with respect to the nonlinear operator generated by this Volterra integral equation. In contrast to the linear case, it has been established that, in addition to the trivial solution, the non-linear homogeneous Volterra integral equation can also have a non-trivial solution. An analysis of the results obtained shows that with an increase in the order of an integro-differential equation with a power nonlinearity, the exponent decreases. Examples are given to illustrate the results obtained.

Keywords: Volterra integro-differential equation, power nonlinearity, a priori estimates.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

S. N. Askhabov, 2023, "Volterra integro-differential equation of arbitrary order with power nonlinearity", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 85–103.

Посвящается профессору Белову Алексею Яковлевичу
в связи с его 60-летием

1. Введение

Метод весовых метрик хорошо известен применительно к интегральным уравнениям Вольтерра со степенной нелинейностью (см., например, [1]–[6]). Такие уравнения возникают при описании различных процессов, изучаемых в гидро-аэродинамике, а также в теории переноса тепла излучением, в моделях популяционной генетики и других [1]–[8], при этом особый интерес представляют непрерывные на $[0, \infty)$ положительные при $x > 0$ решения. В данной работе метод весовых метрик применяется к интегро-дифференциальному уравнению

$$u^\alpha(x) = \int_0^x K(x-t) \cdot u^{(n)}(t) dt, \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

при начальных условиях

$$u(0) = u'(+0) = u''(+0) = \dots = u^{(n-1)}(+0) = 0. \quad (2)$$

Всюду предполагается, что ядро $K(x)$ удовлетворяет условию

$$K \in C^{2n-1}[0, \infty), \quad K^{(2n-1)}(x) \text{ не убывает на } [0, \infty),$$

$$K(0) = K'(0) = K''(0) = \dots = K^{(2n-2)}(0) = 0, \quad K^{(2n-1)}(0) = p > 0. \quad (3)$$

Наряду с задачей (1)-(2) изучается тесно связанное с ней интегральное уравнение

$$u^\alpha(x) = \int_0^x K^{(n)}(x-t) \cdot u(t) dt, \quad \alpha > 1, \quad x > 0. \quad (4)$$

В связи с отмеченными выше приложениями уравнения (4) в различных задачах гидроаэродинамики и других, его решения разыскиваются в конусе

$$Q_0 = \{u(x) : u(x) \in C[0, \infty), \quad u(0) = 0, \quad u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Следует отметить, что метод весовых метрик является аналогом метода польского математика Белецкого (Adam Bielecki, 1910–2003), который впервые применил [9] свой метод к обыкновенному дифференциальному уравнению $y' = f(x, y)$ в предположении, что функция $f(x, y)$ непрерывна в области $0 \leq x < \alpha \leq \infty$, $0 \leq y < \beta \leq \infty$ и удовлетворяет условиям: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L(x) \cdot |y_1 - y_2|$; $|f(x, 0)| \leq L(x)$, где функция $L(x)$ неотрицательна и непрерывна в промежутке $[0, \alpha)$. Введя во множестве всех непрерывных на $[0, \alpha)$ функций весовую норму

$$\|u\| = \sup_{0 \leq x < \alpha} \left[|u(x)| \cdot \exp \left(-\kappa \int_0^x L(t) dt \right) \right],$$

где κ положительная константа, Белецкий доказал глобальную (без ограничений на область существования решения) теорему о существовании и единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$. В работе [10] он применил свой метод к дифференциальному уравнению в частных производных. Позже к этому методу в своих работах приходили и другие авторы в связи с чем Кордунеану опубликовал статью [11] (см., также, [12], [13]), в которой обосновал приоритет Белецкого в разработке данного метода. Метод Белецкого изложен в монографии Эдвардса [14], в которой подчеркнуто, что он является более эффективным по сравнению с другими ранее применявшимися методами так как дает возможность доказывать непосредственно глобальную теорему существования и единственности.

Применяемый нами метод весовых метрик существенно отличается от метода Белецкого, так как он основан на получении точных двусторонних априорных оценок решения, используемых при построении полного весового метрического пространства, инвариантного относительно оператора, порожденного исследуемым нелинейным уравнением, и не предполагает выполнения условия Липшица для заданной нелинейности. Двусторонние априорные оценки представляют и самостоятельный интерес, так как определяют конусный отрезок, в котором заведомо будет находиться искомое решение, и позволяют априори судить о поведении, в том числе и асимптотическом, этого решения. Введение весовой метрики также дает возможность доказывать непосредственно глобальные теоремы существования и единственности для дискретных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений со степенной нелинейностью.

2. Свойства неотрицательных решений

Выясним сначала какими свойствами заведомо должно обладать нетривиальное решение нелинейного интегрального уравнения (4), если оно существует.

Лемма 1. Пусть $\alpha > 1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Если $u \in Q_0$ является решением уравнения (4), то $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$ и n раз непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$, т.е. $u \in C^n(0, \infty)$.

Доказательство. Так как $K^{(2n-1)}(x) \geq K^{(2n-1)}(0) = p > 0$, то $K^{(2n-2)}(x)$ возрастает на $[0, \infty)$ и, значит, $K^{(2n-2)}(x) \geq K^{(2n-2)}(0) = 0$. Но тогда $K^{(2n-3)}(x)$ не убывает на $[0, \infty)$. Продолжая это рассуждение получим, что $K^{(n)}(x)$ не убывает на $[0, \infty)$. Поэтому для любых $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ таких, что $x_1 < x_2$, с учетом, что функции $u(x)$ и $K^{(n)}(x)$ неотрицательны на $[0, \infty)$ и $K^{(n)}(x)$ не убывает на $[0, \infty)$, имеем

$$u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) = \int_0^{x_1} [K^{(n)}(x_2 - t) - K^{(n)}(x_1 - t)] u(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} K^{(n)}(x_2 - t) u(t) dt \geq 0,$$

откуда получаем, что $u(x_1) \leq u(x_2)$, т.е. $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$.

Осталось доказать, что $u \in C^n(0, \infty)$. Из тождества (4) с учетом условия (3), получаем

$$\alpha u^{\alpha-1}(x) u'(x) = \int_0^x K^{(n+1)}(x-t) u(t) dt, \quad (5)$$

откуда

$$u'(x) = \alpha^{-1} u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(n+1)}(x-t) u(t) dt. \quad (6)$$

Значит $u''(x)$ существует и непрерывна на $(0, \infty)$ как производная произведения двух непрерывно дифференцируемых функций. Поэтому для любого $x > 0$ из (5) имеем

$$\alpha(\alpha-1) u^{\alpha-2}(x) u'^2(x) + \alpha u^{\alpha-1}(x) u''(x) = \int_0^x K^{(n+2)}(x-t) u(t) dt, \quad (7)$$

откуда

$$u''(x) = \alpha^{-1} u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(n+2)}(x-t) u(t) dt - (\alpha-1) u^{-1}(x) u'^2(x). \quad (8)$$

Следовательно, $u'''(x)$ существует и непрерывна на $(0, \infty)$, поскольку непрерывно дифференцируема правая часть тождества (8).

Продолжая этот процесс получим, что $u^{(n-1)}(x)$ с помощью элементарных действий выражается через непрерывно дифференцируемые на $(0, \infty)$ функции, не равные нулю при $x > 0$,

$$u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^{(n-2)}(x) \text{ и } \int_0^x K^{(2n-1)}(x-t) u(t) dt.$$

Поэтому $u^{(n)}(x)$ существует и непрерывна на $(0, \infty)$, т.е. $u \in C^n(0, \infty)$.

Лемма 1 доказана.

Заметим, что лемма 1 справедлива и при $0 < \alpha \leq 1$.

Далее нам понадобится следующая теорема подробно доказанная в монографии [4, с. 151].

Теорема 1. Пусть ядро $k(x)$ определено на полуоси $[0, \infty)$ и удовлетворяет условию:

$$k(x) \geq A \cdot x^{\gamma-1},$$

где $A > 0$ и $\gamma > 0$ - любые постоянные. Если $u \in Q_0$ и является решением уравнения

$$u^\alpha(x) = \int_0^x k(x-t) u(t) dt, \quad \alpha > 1, \quad x > 0,$$

то

$$u(x) \geq \left[A \cdot B \left(\gamma, \frac{\gamma-1+\alpha}{\alpha-1} \right) \right]^{1/(\alpha-1)} x^{\gamma/(\alpha-1)}, \quad (9)$$

где B есть бета-функция Эйлера.

С помощью леммы 1 и теоремы 1 доказывается следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $\alpha > 1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Если $u \in Q_0$ является решение уравнения (4), то

$$c(\alpha, n) \cdot x^{n/(\alpha-1)} \leq u(x) \leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} K^{(n-1)}(x) \right)^{1/(\alpha-1)}, \quad (10)$$

где

$$c(\alpha, n) = \left[\frac{p}{(n-1)!} \cdot B \left(n, \frac{n-1+\alpha}{\alpha-1} \right) \right]^{1/(\alpha-1)}. \quad (11)$$

Доказательство. Интегрируя $(n-1)$ раз функцию $K^{(2n-1)}(x)$ по формуле Коши, с учетом условия (3), имеем

$$K^{(n)}(x) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x (x-t)^{n-2} K^{(2n-1)}(t) dt. \quad (12)$$

Следовательно, так как $K^{(2n-1)}(x)$ не убывает на $[0, \infty)$,

$$K^{(n)}(x) \geq \frac{K^{(2n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} = \frac{p}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 при $k(x) = K^{(n)}(x)$, $A = p/[(n-1)!]$ и $\gamma = n$. Поэтому нижняя оценка в (10) является прямым следствием неравенства (9).

Осталось доказать верхнюю оценку из (10). Так как $u(x)$ и $K^{(n)}(x)$ не убывают (см. доказательство леммы 1) на $[0, \infty)$, то в силу интегрального неравенства Чебышева (см., например, [4, с. 121]) из тождества (4) получаем

$$u^\alpha(x) \leq \int_0^x K^{(n)}(t) u(t) dt,$$

откуда

$$u(x) \leq \left(\int_0^x K^{(n)}(t) u(t) dt \right)^{1/\alpha}, \quad \forall x \in [0, \infty), \quad (13)$$

или, что то же самое,

$$u(t) \leq \left(\int_0^t K^{(n)}(s) u(s) ds \right)^{1/\alpha}, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Следовательно, с учетом, что $K^{(n)}(x) > 0$ при всех $x > 0$, имеем

$$K^{(n)}(t) \cdot u(t) \cdot \left(\int_0^t K^{(n)}(s)u(s) ds \right)^{-1/\alpha} \leq K^{(n)}(t), \quad \forall t \in (0, \infty).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x получаем

$$\left(\int_0^x K^{(n)}(s)u(s) ds \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x K^{(n)}(t) dt = \frac{\alpha-1}{\alpha} K^{(n-1)}(x)$$

или

$$\left(\int_0^x K^{(n)}(t)u(t) dt \right)^{1/\alpha} \leq \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} K^{(n-1)}(x) \right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Но тогда, в силу неравенства (13), справедлива верхняя оценка из (10).

Лемма 2 доказана.

Заметим, что используя известную формулу для вычисления значений бета-функции Эйлера (см., например, [15, с. 752]), равенство (11) можно записать в виде:

$$c(\alpha, n) = \left[\frac{p \cdot (\alpha-1)^n}{(\alpha+n-1) \cdot (2\alpha+n-2) \cdot (3\alpha+n-3) \cdot \dots \cdot n \cdot \alpha} \right]^{1/(\alpha-1)}.$$

В силу этого равенства, нижние априорные оценки решения уравнения (4), полученные в работах [16]-[18] при $n = 1, 2, 3$, соответственно, содержатся в лемме 2.

Пример 1. Функция $u^*(x) = c(\alpha, n) \cdot x^{n/(\alpha-1)}$ является решением уравнения (4) при $K(x) = x^{2n-1}$, т.е. $u^*(x)$ является решением интегрального уравнения

$$u^\alpha(x) = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t) dt, \quad \alpha > 1.$$

В самом деле, в этом случае $K^{(n)}(x) = (x^{2n-1})^{(n)} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} x^{n-1}$ и поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^x K^{(n)}(x-t) u(t) dt &= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} c(\alpha, n) \int_0^x (x-t)^{n-1} t^{n/(\alpha-1)} dt = \\ &= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} c(\alpha, n) B\left(n, \frac{n}{\alpha-1} + 1\right) x^{n\alpha/(\alpha-1)} = \left[c(\alpha, n) \cdot x^{n/(\alpha-1)} \right]^\alpha = [u^*(x)]^\alpha. \end{aligned}$$

Заметим, что при $\alpha = 2$ и $K(x) = x^{2n-1}$ функция $u(x) = c(2, n) \cdot x^n$ является как решением уравнения (4), так и решением задачи (1)-(2).

Кроме того, $u^*(x) = c(\alpha, n) \cdot x^{n/(\alpha-1)} \equiv F(x)$ при $K(x) = x^{2n-1}$, что свидетельствует о точности нижней априорной оценки решения, полученной в лемме 2.

Пример 1 показывает, что кроме тривиального решения $u(x) \equiv 0$ однородное нелинейное интегральное уравнение (4) может иметь и нетривиальное решение – в этом состоит принципиальное отличие от теории линейных однородных интегральных уравнений Вольтерра, которые могут иметь лишь тривиальное решение.

Из леммы 2 вытекает, что решения уравнения (4) следует искать в конусном отрезке

$$P = \{u(x) : u \in C[0, \infty) \quad \text{и} \quad F(x) \leq u(x) \leq G(x)\},$$

где

$$F(x) \equiv c(\alpha, n) \cdot x^{n/(\alpha-1)}, \quad G(x) \equiv \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} K^{(n-1)}(x) \right)^{1/(\alpha-1)}, \quad (14)$$

а $c(\alpha, n)$ определено в (11).

3. Интегральное уравнение

Прежде чем приступить к исследованию нелинейного интегрального уравнения (4), рассмотрим оператор T , порожденный этим уравнением. А именно, докажем сначала следующую лемму.

Лемма 3. Если $\alpha > 1$ и выполнено условию (3), то оператор

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x K^{(n)}(x-t) u(t) dt \right)^{1/\alpha}$$

переводит класс P в себя.

Доказательство. Пусть $u \in P$. То, что $Tu \in C[0, \infty)$ очевидно. Докажем сначала, что $(Tu)(x) \geq F(x)$. Так как $u(x) \geq F(x)$, то

$$\begin{aligned} [(Tu)(x)]^\alpha &\geq c(\alpha, n) \cdot \int_0^x K^{(n)}(x-t) t^{n/(\alpha-1)} dt = \\ &= c(\alpha, n) \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha+n-1} \int_0^x K^{(n)}(x-t) dt t^{(\alpha+n-1)/(\alpha-1)} = \\ &= c(\alpha, n) \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha+n-1} \int_0^x K^{(n+1)}(x-t) t^{(\alpha+n-1)/(\alpha-1)} dt = \\ &= c(\alpha, n) \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha+n-1} \cdot \frac{\alpha-1}{2\alpha+n-2} \int_0^x K^{(n+1)}(x-t) dt t^{(2\alpha+n-2)/(\alpha-1)} = \\ &= c(\alpha, n) \cdot \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+n-1)(2\alpha+n-2)} \int_0^x K^{(n+2)}(x-t) t^{(2\alpha+n-2)/(\alpha-1)} dt = \\ &= c(\alpha, n) \cdot \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+n-1)(2\alpha+n-2)} \cdot \frac{\alpha-1}{3\alpha+n-3} \int_0^x K^{(n+2)}(x-t) dt t^{(3\alpha+n-3)/(\alpha-1)} = \\ &= c(\alpha, n) \cdot \frac{(\alpha-1)^3}{(\alpha+n-1)(2\alpha+n-2)(3\alpha+n-3)} \int_0^x K^{(n+3)}(x-t) t^{(3\alpha+n-3)/(\alpha-1)} dt = \dots = \\ &= \frac{c(\alpha, n) \cdot (\alpha-1)^{n-1}}{(\alpha+n-1)(2\alpha+n-2) \dots [(n-1)\alpha+n+(n-1)]} \int_0^x K^{(2n-1)}(x-t) t^{[(n-1)\alpha+n]/(\alpha-1)} dt \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq K^{(2n-1)}(0) \cdot c(\alpha, n) \cdot \frac{(\alpha-1)^{n-1}}{(\alpha+n-1)(2\alpha+n-2) \dots [(n-1)\alpha+1]} \int_0^x t^{[(n-1)\alpha+1]/(\alpha-1)} dt = \\
&= c(\alpha, n) \cdot \frac{(\alpha-1)^{n-1} p}{(\alpha+n-1)(2\alpha+n-2) \dots [(n-1)\alpha+1]} \cdot \frac{\alpha-1}{n\alpha} \cdot x^{n\alpha/(\alpha-1)} = \\
&= c(\alpha, n) \cdot [c(\alpha, n)]^{\alpha-1} \cdot x^{n\alpha/(\alpha-1)} \equiv [F(x)]^\alpha.
\end{aligned}$$

Следовательно, $(Tu)(x) \geq F(x)$.

Осталось доказать, что $(Tu)(x) \leq G(x)$. Так как $u(x) \leq G(x)$ и $K^{(n)}(x)$ не убывает на $[0, \infty)$, то применяя интегральное неравенство Чебышева, получаем

$$\begin{aligned}
[(Tu)(x)]^\alpha &= \int_0^x K^{(n)}(x-t)u(t) dt \leq \int_0^x K^{(n)}(x-t)G(t) dt = \\
&= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x K^{(n)}(x-t)[K^{(n-1)}(t)]^{1/(\alpha-1)} dt \leq \\
&\leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x K^{(n)}(t)[K^{(n-1)}(t)]^{1/(\alpha-1)} dt = \\
&= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \frac{\alpha-1}{\alpha} [K^{(n-1)}(x)]^{\alpha/(\alpha-1)} \equiv [G(x)]^\alpha,
\end{aligned}$$

т.е. $(Tu)(x) \leq G(x)$.

Лемма 3 доказана.

Пусть $b > 0$ - произвольное число. Выберем достаточно малое число $\eta \in (0, b)$ так, чтобы выполнялось условие:

$$K^{(2n-1)}(\eta) < \alpha \cdot K^{(2n-1)}(0) = \alpha \cdot p. \quad (15)$$

Очевидно, что такое η существует, так как $K^{(2n-1)}(0) = p > 0$, $\alpha > 1$ и функция $K^{(2n-1)}(x)$ непрерывна по условию (3).

Положим

$$\beta = \frac{1}{p} \cdot \sup_{\eta \leq x \leq b} \frac{K^{(2n-1)}(x) - p}{x}, \quad (16)$$

где $\eta > 0$ определено в условии (15).

Лемма 4. Если выполнено условие (3), то для любого $x \in [0, b]$ справедливо неравенство

$$K^{(n)}(x) \cdot e^{-\beta x} \leq \frac{1}{(n-1)!} K^{(2n-1)}(\eta) x^{n-1}. \quad (17)$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$K^{(2n-1)}(x) \cdot e^{-\beta x} \leq K^{(2n-1)}(\eta) \text{ для любого } x \in [0, b]. \quad (18)$$

Если $x \in [0, \eta]$, то неравенство (18) очевидно, так как $e^{-\beta x} \leq 1$. Если же $x \in [\eta, b]$, то аналогично [1], получаем

$$K^{(2n-1)}(x) = p + px \frac{1}{p} \frac{K^{(2n-1)}(x) - p}{x} \leq p + px \beta = p(1 + \beta x) \leq K^{(2n-1)}(\eta) e^{\beta x},$$

т.е. неравенство (18) выполняется и при $x \in [0, \eta]$.

Так как, в силу равенства (12),

$$K^{(n)}(x) \leq \frac{1}{(n-2)!} K^{(2n-1)}(x) \int_0^x (x-t)^{n-2} dt = \frac{1}{(n-1)!} K^{(2n-1)}(x) x^{n-1},$$

то

$$K^{(n)}(x) \cdot e^{-\beta x} \leq \frac{1}{(n-1)!} K^{(2n-1)}(x) \cdot e^{-\beta x} x^{n-1}. \quad (19)$$

Используя неравенство (18), из (19) сразу получаем неравенство (17).

Лемма 4 доказана.

Рассмотрим теперь класс

$$P_b = \{u(x) : u(x) \in C[0, b] \text{ и } F(x) \leq u(x) \leq G(x)\},$$

где $F(x)$ и $G(x)$ определены в лемме 2, а $b > 0$ - любое число.

Введем в этом классе метрику ϱ , положив

$$\varrho(u, v) = \sup_{0 < x \leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{x^{n/(\alpha-1)} \cdot e^{\beta x}}, \quad (20)$$

где β определено в (16).

Покажем, что метрика (20) определена корректно. Из равенства (12) для любого $x \in [0, b]$ с учетом, что функция $K^{(2n-1)}(x)$ не убывает, имеем

$$K^{(n)}(x) \leq \frac{1}{(n-2)!} K^{(2n-1)}(b) \int_0^x (x-t)^{n-1} dt = \frac{1}{(n-1)!} K^{(2n-1)}(b) \cdot x^{n-1}$$

или, что то же самое,

$$K^{(n)}(t) \leq \frac{1}{(n-1)!} K^{(2n-1)}(b) \cdot t^{n-1} \quad \text{для любого } t \in [0, b].$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x с учетом, что $K^{(n-1)}(0) = 0$, получаем

$$K^{(n-1)}(x) \leq \frac{1}{n!} K^{(2n-1)}(b) \cdot x^n \quad \text{для любого } x \in [0, b].$$

Поэтому, для любых $x \in [0, b]$ и $u, v \in P_b$, имеем

$$\frac{|u(x) - v(x)|}{x^{n/(\alpha-1)} e^{\beta x}} \leq \frac{G(x) - F(x)}{x^{n/(\alpha-1)}} \leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n!} K^{(2n-1)}(b) \right)^{1/(\alpha-1)} - c(\alpha, n),$$

т.е. расстояние $\varrho(u, v)$ конечно для любых $u, v \in P_b$.

Точно так же как и в теореме 17.13 [4] проверяется полнота метрического пространства P_b .

Теорема 2. Пусть $\alpha > 1$ и выполнено условие (3). Тогда оператор $T : P_b \rightarrow P_b$ и является сжимающим, причем для любых $u, v \in P_b$ выполняется неравенство

$$\varrho(Tu, Tv) \leq \frac{K^{(2n-1)}(\eta)}{\alpha \cdot p} \cdot \varrho(u, v). \quad (21)$$

Доказательство. То что оператор $T : P_b \rightarrow P_b$, т.е. действует из P_b в P_b , вытекает из леммы 3. Как и при доказательстве теоремы 17.14 [4], применяя теорему Лагранжа, получаем

$$\varrho(Tu, Tv) \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{0 < x \leq b} \frac{|(k * [u - v])(x)|}{\{F(x)\}^{\alpha-1} x^{n/(\alpha-1)} e^{\beta x}} \leq \frac{1}{\alpha} \cdot [c(\alpha, n)]^{1-\alpha} \sup_{0 < x \leq b} \frac{(K^{(n)} * |u - v|)(x)}{x^n x^{n/(\alpha-1)} e^{\beta x}}. \quad (22)$$

Так как, в силу неравенства (17) и известного равенства

$$\int_0^x (x-t)^\nu t^\mu dt = B(\nu+1, \mu+1) \cdot x^{\nu+\mu+1}, \quad \text{где } \nu > -1, \mu > -1,$$

имеем

$$\begin{aligned} (K^{(n)} * |u-v|)(x) &= e^{\beta x} \int_0^x K^{(n)}(x-t) \frac{|u(t)-v(t)|}{t^{n/(\alpha-1)} e^{\beta t}} e^{-\beta(x-t)} t^{n/(\alpha-1)} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{(n-1)!} \varrho(u, v) e^{\beta x} K^{(2n-1)}(\eta) \int_0^x (x-t)^{n-1} t^{n/(\alpha-1)} dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \varrho(u, v) e^{\beta x} K^{(2n-1)}(\eta) \cdot B\left(n, \frac{\alpha+n-1}{\alpha-1}\right) \cdot x^{n+n/(\alpha-1)}, \end{aligned}$$

то, подставив в (22), получаем

$$\begin{aligned} \varrho(Tu, Tv) &\leq \frac{1}{\alpha} \cdot [c(\alpha, n)]^{1-\alpha} \frac{1}{(n-1)!} \varrho(u, v) K^{(2n-1)}(\eta) \cdot B\left(n, \frac{\alpha+n-1}{\alpha-1}\right) = \\ &= \frac{K^{(2n-1)}(\eta)}{\alpha \cdot p} \cdot \varrho(u, v), \end{aligned}$$

т.е. выполнено неравенство (21). Поскольку число $\eta > 0$ выбрано так, что выполнено условие (15), то оператор T является сжимающим. Замечая, что коэффициент сжатия в (21) не зависит от b , на основании метода весовых метрик получаем следующую теорему.

Теорема 3. Если $\alpha > 1$ и выполнено условие (3), то нелинейное интегральное уравнение типа свертки (4) имеет единственное решение в Q_0 (u в P_b при любом $b > 0$). Это решение в P_b может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (20) при любом $b < \infty$.

4. Начальная задача

Приступим, наконец, к исследованию начальной задачи (1)-(2). Ее решение будем разыскивать в классе

$$Q_0^n = \{u(x) : u \in C[0, \infty) \cap C^n(0, \infty), u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Следующая лемма устанавливает связь между начальной задачей (1)-(2) и нелинейным интегральным уравнением (4).

Лемма 5. Пусть $\alpha > 1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Если $u \in Q_0^n$ является решением начальной задачи (1)-(2), то $u \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (4).

Доказательство. Пусть $u \in Q_0^n$ есть решение начальной задачи (1)-(2). Тогда очевидно, что $u \in Q_0$ и, в силу формулы интегрирования по частям, из тождества (1) с учетом условий (2) и (3), имеем

$$u^\alpha(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x K(x-t) du^{(n-1)}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x u^{(n-1)}(t) K'(x-t) dt = \dots =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^x u'(t) K^{(n-1)}(x-t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^x K^{(n)}(x-t) u(t) dt = \int_0^x K^{(n)}(x-t) u(t) dt,$$

т.е. $u(x)$ является решением интегрального уравнения (4).

Приведем примеры, соответствующие интегро-дифференциальным уравнениям первого, второго и третьего порядков.

Пример 2. Начальная задача

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x (x-t) u'(t) dt, \quad 1 < \alpha < \infty, \quad u(0) = 0,$$

имеет в классе Q_0^1 (см. [16]) единственное решение

$$u(x) = C_1 \cdot x^{1/(\alpha-1)}, \quad \text{где} \quad C_1 = \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Пример 3. Начальная задача

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x (x-t)^3 u''(t) dt, \quad 1 < \alpha < 3, \quad u(0) = u'(+0) = 0,$$

имеет в классе Q_0^2 (см. [17]) единственное решение

$$u(x) = C_2 \cdot x^{2/(\alpha-1)}, \quad \text{где} \quad C_2 = \left[\frac{3(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha+1)} \right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Ограничение $1 < \alpha < 3$ необходимо для выполнения начального условия $u'(+0) = 0$, поскольку $u'(x) = 2(\alpha-1)^{-1} C_2 \cdot x^{(3-\alpha)/(\alpha-1)}$. Это ограничение необходимо также для выполнения условия (14) из [17] при $K(x) = x^3$.

Пример 4. Начальная задача

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x (x-t)^5 u'''(t) dt, \quad 1 < \alpha < 2,5, \quad u(0) = u'(+0) = u''(+0) = 0,$$

имеет в классе Q_0^3 (см. [18]) единственное решение

$$u(x) = C_3 \cdot x^{3/(\alpha-1)}, \quad \text{где} \quad C_3 = \left[\frac{40(\alpha-1)^3}{\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)} \right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Ограничение $1 < \alpha < 2,5$ необходимо как для выполнения условия $u''(+0) = 0$, поскольку $u''(x) = 3(4-\alpha)(\alpha-1)^{-2} C_3 \cdot x^{(5-2\alpha)/(\alpha-1)}$, так и для выполнения условий (5) и (6) из [18] при $K(x) = x^5$.

Из работ [16]-[18] следует, что с ростом порядка n интегро-дифференциального уравнения (1) растет число ограничений на ядро $K(x)$ и показатель степени α (см. примеры 2-4), что связано с начальными условиями (2). Кроме того, при $n = 2$ и $n = 3$ доказательство априорной оценки снизу решения приводит [17], [18] к нелинейным дифференциальным неравенствам второго и третьего порядков, соответственно. В этой связи, ввиду громоздкости получаемых результатов, ограничимся далее при исследовании задачи (1)-(2) рассмотрением случая $n = 4$.

Итак, рассмотрим начальную задачу

$$u^\alpha(x) = \int_0^x K(x-t) \cdot u^{(4)}(t) dt, \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \quad (23)$$

$$u(0) = u'(+0) = u''(+0) = u'''(+0) = 0, \quad (24)$$

в конусе

$$Q_0^4 = \{u(x) : u \in C[0, \infty) \cap C^4(0, \infty), u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Лемма 6. Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия

$$K \in C^7[0, \infty), \quad K^{(7)}(x) \text{ не убывает на } [0, \infty),$$

$$K(0) = K'(0) = K''(0) = \dots = K^{(6)}(0) = 0, \quad K^{(7)}(0) = q > 0, \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{4(4/3-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(4)}(x) = 0, \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{4(5/3-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(5)}(x) = 0, \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{4(2-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(6)}(x) = 0. \quad (28)$$

Если $u \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения

$$u^\alpha(x) = \int_0^x K^{(4)}(x-t) \cdot u(t) dt, \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \quad (29)$$

то $u \in Q_0^4$ и является решением начальной задачи (23)-(24).

Доказательство. Пусть $u \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (29). Тогда, по лемме 1, $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$ и $u \in C^4(0, \infty)$. Следовательно, $u \in Q_0^4$.

Покажем, что $u(x)$ удовлетворяет начальным условиям (24). Воспользуемся тождеством (5) при $n = 4$. Поскольку правая часть тождества (5) неотрицательна, то его левая часть также неотрицательна и, значит, $u'(x) \geq 0$ при любом $x > 0$. Поэтому из (6), с учетом леммы 1, имеем

$$0 \leq u'(x) = \alpha^{-1} u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(5)}(x-t) u(t) dt \leq \alpha^{-1} u^{2-\alpha}(x) K^{(4)}(x). \quad (30)$$

Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} u^{2-\alpha}(x) K^{(4)}(x) = 0. \quad (31)$$

При $\alpha \leq 2$ равенство (31) очевидно, так как $u(0) = 0$ и $K^{(4)}(0) = 0$. Если же $\alpha > 2$, то используя оценку $u(x) \geq c(\alpha, 4) \cdot x^{4/(\alpha-1)}$, доказанную в лемме 2, имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq u^{2-\alpha}(x) K^{(4)}(x) &\leq [c(\alpha, 4)]^{2-\alpha} x^{4(2-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(4)}(x) = \\ &= [c(\alpha, 4)]^{2-\alpha} x^{(8/3)/(\alpha-1)} x^{4(4/3-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(4)}(x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $x \rightarrow +0$, в силу условия (26). Следовательно, равенство (31) выполняется и при $\alpha > 2$.

Переходя к пределу при $x \rightarrow +0$ в (30), с учетом равенства (31), получаем

$$u'(+0) = 0. \quad (32)$$

Из тождества (8) при $n = 4$ имеем

$$0 \leq u''(x) + (\alpha - 1)u^{-1}(x)u'^2(x) = \alpha^{-1}u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(6)}(x-t)u(t)dt. \quad (33)$$

Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} u^{-1}(x)u'^2(x) = 0. \quad (34)$$

Из тождества (6) при $n = 4$, с учетом леммы 1, получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq u^{-1}(x)u'^2(x) &= u^{-1}(x)\alpha^{-2}u^{2-2\alpha} \left(\int_0^x K^{(5)}(x-t)u(t)dt \right)^2 \leq \\ &\leq \alpha^{-2}u^{3-2\alpha}(x) \left(K^{(4)}(x) \right)^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (35) непосредственно вытекает равенство (34) при $\alpha \leq 3/2$, так как $u(0) = 0$ и $K^{(4)}(0) = 0$. Если же $\alpha > 3/2$, то используя оценку $u(x) \geq c(\alpha, 4) \cdot x^{4/(\alpha-1)}$ из (35) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq u^{-1}(x)u'^2(x) &\leq \alpha^{-2}[c(\alpha, 4)]^{3-2\alpha}x^{4(3-2\alpha)/(\alpha-1)} \left(K^{(4)}(x) \right)^2 = \\ &= \alpha^{-2}[c(\alpha, 4)]^{3-2\alpha}x^{4/3/(\alpha-1)} \left(x^{4(4/3-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(4)}(x) \right)^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $x \rightarrow +0$, в силу условия (26). Следовательно, равенство (37) выполняется и при $\alpha > 3/2$.

Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(6)}(x-t)u(t)dt = 0. \quad (36)$$

Так как функция $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$, то

$$0 \leq u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(6)}(x-t)u(t)dt \leq u^{2-\alpha}(x)K^{(5)}(x). \quad (37)$$

Из (37) вытекает непосредственно равенство (36) при $\alpha \leq 2$, так как $u(0) = 0$ и $K^{(5)}(0) = 0$. Если же $\alpha > 2$, то используя оценку $u(x) \geq c(\alpha, 4) \cdot x^{4/(\alpha-1)}$ из (37) получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(6)}(x-t)u(t)dt &\leq [c(\alpha, 4)]^{2-\alpha}x^{4(2-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(5)}(x) = \\ &= [c(\alpha, 4)]^{2-\alpha}x^{4/3/(\alpha-1)}x^{4(5/3-\alpha)/(\alpha-1)}K^{(5)}(x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $x \rightarrow +0$, в силу условия (27). Следовательно, равенство (36) выполняется и при $\alpha > 2$.

Переходя к пределу при $x \rightarrow +0$ в (33), с учетом равенств (34) и (36), получаем

$$u''(+0) = 0. \quad (38)$$

Умножив обе части тождества (8) при $n = 4$ на $u^{-1}(x)u'(x)$, получим

$$0 \leq u^{-1}(x)u'(x)u''(x) + (\alpha - 1)u^{-2}(x)u'^3(x) =$$

$$= \alpha^{-1} u^{-\alpha}(x) u'(x) \int_0^x K^{(6)}(x-t) u(t) dt. \quad (39)$$

Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} u^{-2/3}(x) u'(x) = 0. \quad (40)$$

Из тождества (6) при $n = 4$ имеем

$$0 \leq u^{-2/3}(x) u'(x) = \alpha^{-1} u^{1/3-\alpha}(x) \int_0^x K^{(5)}(x-t) u(t) dt \leq \alpha^{-1} u^{4/3-\alpha}(x) K^{(4)}(x). \quad (41)$$

Из (41) вытекает непосредственно равенство (40) при $\alpha \leq 4/3$, так как $u(0) = 0$ и $K^{(4)}(0) = 0$. Если же $\alpha > 4/3$, то используя оценку $u(x) \geq c(\alpha, 4) \cdot x^{4/(\alpha-1)}$ из (41) получаем

$$0 \leq u^{-2/3}(x) u'(x) \leq \alpha^{-1} [c(\alpha, 4)]^{4/3-\alpha} x^{4(4/3-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(4)}(x) \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow +0$, в силу условия (26). Следовательно, равенство (40) выполняется и при $\alpha > 4/3$.

Используя равенство (40), получаем

$$\lim_{x \rightarrow +0} u^{-2}(x) u'^3(x) = \left(\lim_{x \rightarrow +0} u^{-2/3}(x) u'(x) \right)^3 = 0. \quad (42)$$

Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} u^{-\alpha}(x) u'(x) \int_0^x K^{(6)}(x-t) u(t) dt = 0. \quad (43)$$

Так как $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$ и $K^{(5)}(0) = 0$, то

$$\begin{aligned} 0 \leq u^{-\alpha}(x) u'(x) \int_0^x K^{(6)}(x-t) u(t) dt &\leq u^{1-\alpha}(x) u'(x) K^{(5)}(x) = \\ &= u^{-2/3}(x) u'(x) u^{5/3-\alpha}(x) K^{(5)}(x). \end{aligned} \quad (44).$$

Из (44) вытекает непосредственно равенство (43) при $\alpha \leq 5/3$, в силу равенств (40), $u(0) = 0$ и $K^{(5)}(0) = 0$. Если же $\alpha > 5/3$, то используя оценку $u(x) \geq c(\alpha, 4) \cdot x^{4/(\alpha-1)}$ из (44) получаем

$$0 \leq u^{-\alpha}(x) u'(x) \int_0^x K^{(6)}(x-t) u(t) dt \leq u^{-2/3}(x) u'(x) [c(\alpha, 4)]^{5/3-\alpha} x^{4(5/3-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(5)}(x) \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow +0$, в силу равенства (40) и условия (27). Следовательно, равенство (43) выполняется и при $\alpha > 5/3$.

Переходя к пределу при $x \rightarrow +0$ в (39), с учетом равенств (42) и (43), получаем

$$\lim_{x \rightarrow +0} u^{-1}(x) u'(x) u''(x) = 0. \quad (45)$$

Из тождества (7) при $n = 4$ с учетом, что $K^{(6)}(0) = 0$, имеем (после объединения двух слагаемых)

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)u^{\alpha-3}(x)u'^3(x) + 3\alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}(x)u'(x)u''(x) + \alpha u^{\alpha-1}(x)u'''(x) =$$

$$= \int_0^x K^{(7)}(x-t) u(t) dt.$$

Разделив обе части последнего тождества на $\alpha u^{\alpha-1}(x)$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\alpha-1)(\alpha-2)u^{-2}(x)u'^3(x) + 3(\alpha-1)u^{-1}(x)u'(x)u''(x) + u'''(x) = \\ &= \alpha^{-1}u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(7)}(x-t) u(t) dt. \end{aligned} \quad (46)$$

Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(7)}(x-t) u(t) dt = 0. \quad (47)$$

Так как $u(x)$ не убывает на $[0, \infty$ и $K^{(6)}(0) = 0$, то

$$0 \leq u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(7)}(x-t) u(t) dt \leq u^{2-\alpha}(x) K^{(6)}(x). \quad (48).$$

Из (48) вытекает непосредственно равенство (47) при $\alpha \leq 2$ так как $u(0) = 0$ и $K^{(6)}(0) = 0$. Если же $\alpha > 2$, то используя оценку $u(x) \geq c(\alpha, 4) \cdot x^{4/(\alpha-1)}$ из (48) получаем

$$0 \leq u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(7)}(x-t) u(t) dt \leq [c(\alpha, 4)]^{2-\alpha} x^{4(2-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(6)}(x) \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow +0$, в силу условия (28). Следовательно, равенство (47) выполняется и при $\alpha > 2$.

Переходя к пределу при $x \rightarrow +0$ в (46), с учетом равенств (42), (45) и (47), получаем

$$u'''(+0) = 0. \quad (49)$$

Из (32), (38) и (49) вытекает, что любое решение $u \in Q_0$ интегрального уравнения (29) удовлетворяет начальным условиям (24). Осталось доказать, что оно является решением интегро-дифференциального уравнения (23).

Используя формулу интегрирования по частям, из тождества (29) с учетом условия (25) и равенств (24), имеем

$$\begin{aligned} u^\alpha(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x K^{(4)}(x-t) u(t) dt = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x u(t) dK'''(x-t) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x K'''(x-t) u'(t) dt = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x u'(t) dK''(x-t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x K''(x-t) u''(t) dt = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x u''(t) dK'(x-t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x K'(x-t) u'''(t) dt = \int_0^x K(x-t) u^{(4)}(t) dt, \end{aligned}$$

т.е. $u(x)$ является решением интегро-дифференциального уравнения (23).

Из леммы 5, леммы 6 и теоремы 4 непосредственно вытекает основной результат данной работы:

Теорема 4. Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия (25)-(28). Тогда начальная задача (23)-(24) в конусе Q_0^4 имеет единственное решение $u^*(x)$. Это решение удовлетворяет неравенствам

$$F_4(x) \equiv \left[\frac{K^{(7)}(0) \cdot (\alpha - 1)^4}{8\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 3)(3\alpha + 1)} \right]^{1/(\alpha-1)} \leq u^*(x) \leq \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} K'''(x) \right]^{1/(\alpha-1)} \equiv G_4(x)$$

и его можно найти в конусном отрезке $P_b = \{u(x) : u \in C[0, \infty) \text{ и } F_4(x) \leq u(x) \leq G_4(x)\}$ при любом $b > 0$ методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, которые сходятся к нему по метрике

$$\varrho(u, v) = \sup_{0 < x \leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{x^{4/(\alpha-1)} \cdot e^{\beta x}}, \quad \beta = \frac{1}{K^{(7)}(0)} \cdot \sup_{\eta \leq x \leq b} \frac{K^{(7)}(x) - K^{(7)}(0)}{x},$$

причем справедлива оценка скорости их сходимости

$$\rho(u_n, u^*) \leq \frac{q^\alpha}{1 - q} \rho(Tu_0, u_0),$$

где $q = K^{(7)}(\eta)/[\alpha K^{(7)}(0)]$, число $\eta \in (0, b)$ таково, что $K^{(7)}(\eta) < \alpha \cdot K^{(7)}(0)$, а $u_0 \in P_b$ есть начальное приближение.

5. Заключение

В данной работе методом весовых метрик доказана глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения решения начальной задачи для однородного вольтерровского интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка со степенной нелинейностью и разностным ядром. Получены точные двусторонние оценки решения и показано, что это решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа. Приведена оценка скорости сходимости последовательных приближений к точному решению в терминах весовой метрики. Показано, что, в отличие от линейного случая, нелинейное однородное интегральное уравнение Вольтерра помимо тривиального решения может иметь еще и нетривиальное решение. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты. Заметим, что условия (25)-(28) можно заменить на условие:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{4(m/3-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(m)}(x) = 0 \text{ при } m = 4, 5, 6.$$

Это замечание, анализ результатов работ [16]-[18] и доказательства леммы 6 показывает, что начальная задача (1)-(2) аналогично может быть исследована при любых $n \geq 1$. При этом на ядро $K(x)$ кроме условия (3) будет накладываться еще $n - 1$ условие вида (25)-(28). Из полученных результатов вытекает, что показатель степени α степенной нелинейности с ростом порядка n интегро-дифференциального уравнения (1) будет уменьшаться (см. примеры 2-4). Функция $u(x) = c(n, \alpha) \cdot x^{n/(\alpha-1)}$ является решением интегрального уравнения (4) с ядром $K(x) = x^{2n-1}$ при любом $\alpha > 1$ (см. пример 1), однако решением начальной задачи (1)-(2) в случае этого ядра она будет лишь при $1 < \alpha < (2n - 1)/(n - 1)$, так как

$$u^{(n-1)}(x) = c(\alpha, n) \cdot \frac{n(n+1-\alpha)(n+2(1-\alpha)) \dots (n+(n-1)(1-\alpha))}{(\alpha-1)^{n-1}} \cdot x^{(2n-1-(n-1)\alpha)/(\alpha-1)}$$

и поэтому начальное условие $u^{(n-1)}(+0) = 0$ не выполняется при $\alpha \geq (2n - 1)/(n - 1)$.

Доказательство всех основных результатов данной работы существенно использует условие, что $\alpha > 1$. Это связано с тем, что (см. доказательство леммы 24.6 из [4]) при $0 < \alpha \leq 1$ интегральное уравнение (4), а значит и начальная задача (1)-(2), имеют лишь тривиальное решение $u(x) \equiv 0$ в конусе пространства непрерывных на $[0, \infty)$ функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Okraśiński W. Nonlinear Volterra equations and physical applications // *Extracta Math.* 1989. Vol. 4, №2. P. 51-74.
2. Askhabov S.N., Betilgiriev M.A. Nonlinear convolution type equations // *Seminar. Anal. Operator equat. and numer. anal.* 1989/90. Karl-Weierstrass-Institut für Mathematik, Berlin. 1990. P. 1-30.
3. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К., Якубов А.Я. Интегральное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // *Доклады АН СССР*, 1990. Т. 311, №5. С. 1035-1039.
4. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки (Физматлит, М., 2009).
5. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
6. Асхабов С.Н. Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью // *Чебышевский сборник*, 2022. Т. 23, №5. С. 6-19.
7. Keller J. J. Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // *Z. Angew. Math. Phys.* 1981. Vol. 32, №2. P. 170-181.
8. Schneider W.R. The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type // *Z. Angew. Math. Phys.* 1982. Vol. 33, №1. P. 140-142.
9. Bielecki A. Une remarque sur la methode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la theorie des equations differentieless ordinaries // *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Phys. Astr.* 1956. Vol. 4. P. 261-264.
10. Bielecki A. Une remarque sur lapplication de la methode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la theorie de lequation $s = f(x, y, z, p, q)$ // *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Phys. Astr.* 1956. Vol. 4. P. 265-268.
11. Corduneanu C. Bielecki's method in the theory of integral equations // *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A.* 1984. Vol. 38, №2. P. 23-40.
12. Rolewicz S. Functional analysis and control theory. Linear systems (Mathematics and its applications. East European series, 1987).
13. Kwapisz M. Bielecki's method. Existence and uniqueness Results for Volterra integral equations in L^p space // *J. Math. Anal. Appl.* 1991. Vol. 154 P. 403-416.
14. Edwards R. E. Functional analysis. Theory and applications (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1995).
15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II (Наука, М., 1970).
16. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // *Дифференц. уравнения*. 2020. Т. 56, №6. С. 786-795.
17. Askhabov S. N. On an integro-differential sec-ond order equation with difference kernels and power nonlinearity // *Bulletin of the Karaganda University*. 2022. №2(106). P. 38-48.

18. Асхабов С.Н. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки третьего порядка // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения XXXIV: матер. Междун. конф.: Воронежская весенняя математическая школа (3-9 мая 2023 г.). Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2023. С. 54-55.

REFERENCES

1. Okrasinski W. 1989, "Nonlinear Volterra equations and physical applications", *Extracta Math.*, vol. 4, no. 2, pp. 51-74.
2. Askhabov S.N., Betilgiriev M.A. 1990, "Nonlinear convolution type equations", *Seminar. Anal. Operator equat. and numer. anal. 1989/90. Karl-Weierstrass-Institut für Mathematik, Berlin*, pp. 1-30.
3. Askhabov S. N., Karapetyants N. K., Yakubov A. Ya., 1990, "Integral equations of convolution type with power nonlinearity and systems of such equations", *Dokl. Math.*, vol. 41, no. 2, pp. 323-327.
4. Askhabov S. N. 2009, Nonlinear equations of convolution type. (russian) [Nelineinие uravneniya tipa svertki], Fizmatlit, Moscow, 304 p.
5. Brunner H. "Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications". *Cambridge University Press, Cambridge*, 2017.
6. Askhabov S. N. 2022, "Volterra integral equation with power nonlinearity", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 6-19.
7. Keller J. J. 1981, "Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction", *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 32, no. 2, pp. 170-181.
8. Schneider W. R. 1982, "The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type", *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 33, no. 1, pp. 140-142.
9. Bielecki A. 1956, "Une remarque sur la methode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la theorie des equations differentielles ordinaires", *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Phys. Astr.*, vol. 4, pp. 261-264.
10. Bielecki A. 1956, "Une remarque sur l'application de la methode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la theorie de l'equation $s = f(x, y, z, p, q)$ ", *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Phys. Astr.*, vol. 4, pp. 265-268.
11. Corduneanu C. 1984, "Bielecki's method in the theory of integral equations", *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A.*, vol. 38, no. 2, pp. 23-40.
12. Rolewicz S. Functional analysis and control theory. Linear systems (Mathematics and its applications. East European series, 1987).
13. Kwapisz M. 1991, "Bielecki's method. Existence and uniqueness Results for Volterra integral equations in L^p space", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 154, pp. 403-416.
14. Edwards R. E. Functional analysis. Theory and applications (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1995).
15. Fikhtengolts G. M. 1970, Course of differential and integral calculus, volume II (russian) [Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya, tom II], Nauka, Moscow, 800 p.

-
16. Askhabov S.N. 2020, "Integro-differential equation of the convolution type with a power nonlinearity and an inhomogeneity in the linear part", *Differ. Equat.*, vol. 56, no. 6, pp. 775–784.
 17. Askhabov S.N. 2022 "On an integro-differential second order equation with difference kernels and power nonlinearity", *Bulletin of the Karaganda University*, no. 2(106), pp. 38–48.
 18. Askhabov S.N. 2023 "Nonlinear integro-differential equation of the third order type of convolution" (russian) [Nelineynoye integro-differentsial'noye uravneniye tipa svertki tret'yego poryadka], *Modern methods of the theory of boundary value problems. Pontryagin readings XXXIV: mater. Intern. Conf.: Voronezh Spring Mathematical School (May 3-9, 2023)*. Voronezh: Ed. House of VSU. pp. 54–55. (russian)

Получено: 16.09.2023

Принято в печать: 11.12.2023