ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 517.98 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-48-62

Оператор сплетения для обобщенного преобразования Данкля на прямой[1]

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула); Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В гармоническом анализе на прямой со степенным весом сначала появилось унитарное преобразование Данкля, зависящее от одного параметра $k \geqslant 0$, а затем двупараметрическое (k, a)-обобщенное преобразование Фурье, частным случаем которого является преобразование Данкля ($a = 2$). Наличие параметра $a > 0$ при $a \neq 2$ приводит к появлению деформационных свойств, например, для функций из пространства Шварца обобщенное преобразование Фурье может не быть бесконечно дифференцируемым или быстро убывающим на бесконечности. В случае последовательности $a = 2/(2r + 1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, деформационные свойства обобщенного преобразования Фурье весьма слабые и после некоторой замены переменных они исчезают. Получаемое унитарное преобразование при $r = 0$ дает обычное преобразование Данкля и обладает многими его свойствами. Оно названо обобщенным преобразованием Данкля. В работе определен оператор сплетения, устанавливающий связь дифференциально-разностного оператора второго порядка, для которого ядро обобщенного преобразования Данкля является собственной функцией, с одномерным оператором Лапласа и позволяющий записать ядро в удобном для его оценок виде. В отличие от оператора сплетения для преобразования Данкля он имеет ненулевое ядро. В работе также на основе свойств обобщенного преобразования Данкля устанавливаются свойства (k, a)-обобщенного преобразования Фурье при $a = 2/(2r + 1)$.

Ключевые слова: (k, a)-обобщенное преобразование Фурье, обобщенное преобразование Данкля, оператор обобщенного сдвига, свертка, обобщенные средние.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:
В. И. Иванов. Оператор сплетения для обобщенного преобразования Данкля на прямой // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 48–62.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-71-30001) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 517.98 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-48-62

The intertwining operator for the generalized Dunkl transform on the line[2]

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Tula State University (Tula); Lomonosov Moscow State University Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

In harmonic analysis on a line with power weight, the unitary Dunkl transform first appeared. It depends on only one parameter $k \geqslant 0$. Then the two-parameter (k, a)-generalized Fourier transform appeared, a special case of which is the Dunkl transform ($a = 2$). The presence of the parameter $a > 0$ at $a \neq 2$ leads to the appearance of deformation properties. For example, for functions in Schwarz space, the generalized Fourier transform may not be infinitely differentiable or decay rapidly at infinity. In the case of the sequence $a = 2/(2r + 1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, the deformation properties of the generalized Fourier transform are very weak and after some change of variables they disappear. The resulting unitary transform for $r = 0$ gives the usual Dunkl transform and has many of its properties. It is called the generalized Dunkl transform. We define the intertwining operator that establishes a connection between the second-order differential-difference operator, for which the kernel of the generalized Dunkl transform is an eigenfunction, and the one-dimensional Laplace operator and allows us to write the kernel in a form convenient for its estimates. Unlike the intertwining operator for the Dunkl transform, it has a nonzero kernel. In the paper, also on the basis of the properties of the generalized Dunkl transform, the properties of the (k, a)-generalized Fourier transform for $a = 2/(2r + 1)$ are established.

Keywords: (k, a)-generalized Fourier transform, generalized Dunkl transform, generalized translation operator, convolution, generalized means.

Bibliography: 13 titles.

For citation:
Ivanov V. I., 2023, “The intertwining operator for the generalized Dunkl transform on the line”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 48–62.

1. Введение

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ и быстро убывающих на бесконечности функций, $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\alpha \geqslant -1/2$, $j_\alpha(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) x^{-\alpha} J_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя, Π — множество алгебраических многочленов, $\{P_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^\infty$ — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1 - t^2)^\alpha$, $\alpha > -1$, и нормированные условием $P_n^{(\alpha)}(1) = 1$,

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1), \quad n \geqslant 1,$$

[2]The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 23-71-30001) at Lomonosov Moscow State University.

— символ Похгаммера.

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda > -1/2$, $d\nu_\lambda(x) = c_\lambda |x|^{2\lambda+1}\,dx$ — нормированная мера на прямой $\mathbb{R}$ со степенным весом, $c_\lambda^{-1} = 2^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)$, $dm_\lambda(t) = \widetilde{c}_\lambda(1-t^2)^{\lambda-1/2}\,dt$ — вероятностная мера на отрезке $[-1,1]$, $(\widetilde{c}_\lambda)^{-1} = \sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)/\Gamma(\lambda+1)$.

В статье [1] начато, а в статье [2] продолжено изучение двупараметрического (r,λ)-обобщенного унитарного преобразования Данкля на прямой

$$\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_{r,\lambda}(-xy)\,d\nu_\lambda(x), \tag{1}$$

у которого ядро

$$e_{r,\lambda}(xy) = j_\lambda(xy) + i(-1)^r \frac{(xy)^{2r+1}}{2^{2r+1}(\lambda+1)_{2r+1}} j_{\lambda+2r+1}(xy) \tag{2}$$

является целой функцией экспоненциального типа 1 по каждой переменной. Оно имеет интегральное представление (см. [1, 2])

$$e_{r,\lambda}(xy) = \int_{-1}^{1} (1 + P_{2r+1}^{\lambda-1/2}(t)) e^{ixyt}\,dm_\lambda(t). \tag{3}$$

Одномерное преобразование Данкля $\mathcal{F}_\lambda(f)$ получается из (1) при $r=0$ (см., например, [3]).

В одномерном гармоническом анализе Данкля аналогами первой производной $f'(x)$ и одномерного оператора Лапласа $\Delta f(x) = f''(x)$ являются дифференциально-разностный оператор первого порядка

$$T_\lambda f(x) = f'(x) + \Big(\lambda + \frac{1}{2}\Big)\frac{f(x) - f(-x)}{x}$$

и лапласиан Данкля

$$\Delta_\lambda f(x) = T_\lambda^2 f(x) = f''(x) + \big(2\lambda+1\big)\frac{f'(x)}{x} - \Big(\lambda+\frac{1}{2}\Big)\frac{f(x)-f(-x)}{x^2}.$$

Ядро преобразования Данкля $e_\lambda(xy) = e_{0,\lambda}(xy)$ является собственной функцией этих операторов. В статье [4] определен важный оператор гармонического анализа Данкля — оператор сплетения V_λ. В одномерном случае он может быть записан в явном виде

$$V_\lambda f(x) = \int_{-1}^{1} f(xt)(1+t)\,dm_\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Оператор V_λ положительный, действует в пространстве $C[-R,R]$, $\forall R > 0$ и устанавливает связь между дифференциально-разностными операторами Данкля и обычными дифференциальными операторами

$$V_\lambda f'(x) = T_\lambda V_\lambda f(x), \quad V_\lambda \Delta f(x) = \Delta_\lambda V_\lambda f(x), \quad f'' \in C(\mathbb{R}).$$

Он также позволяет записать ядро преобразования Данкля

$$e_\lambda(xy) = V_\lambda\big(e^{i(\cdot)y}\big)(x), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Ядро $e_{r,\lambda}(xy)$ (2) обобщенного преобразования Данкля $\mathcal{F}_{r,\lambda}$ (1) является собственной функцией дифференциально-разностного оператора (см. [1, 2])

$$\begin{aligned}\Delta_{r,\lambda} f(x) &= \Delta_\lambda f(x) - 2r(r+\lambda+1)\,\frac{f(x)-f(-x)}{x^2} \\ &= f''(x) + \big(2\lambda+1\big)\frac{f'(x)}{x} - \Big(2r(r+\lambda+1) + \lambda + \frac{1}{2}\Big)\frac{f(x)-f(-x)}{x^2}.\end{aligned}$$

Пусть

$$V_{r,\lambda}f(x)=\int_{-1}^{1}f(xt)(1+P_{2r+1}^{\lambda-1/2}(t))\,dm_\lambda(t),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Оператор $V_{r,\lambda}$ действует в пространстве $C[-R,R]$, $\forall R>0$ и согласно (3)

$$e_{r,\lambda}(xy)=V_{r,\lambda}\big(e^{i(\cdot)y}\big)(x).$$

Если $\lambda\geqslant 0$, то оператор $V_{r,\lambda}$ положительный. Так как $P_1^{\lambda-1/2}(t)=t$, то $V_{0,\lambda}=V_\lambda$.

Наша цель — доказать, что $V_{r,\lambda}$ является оператором сплетения для обобщенного преобразования Данкля. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $r\in\mathbb{N}$, $\lambda>-1/2$, $f^{''}\in C(\mathbb{R})$, то*

$$V_{r,\lambda}\Delta f(x)=\Delta_{r,\lambda}V_{r,\lambda}f(x),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Замечание. *Оператор сплетения V_λ (4) является изоморфизмом на* Π. *Оператор сплетения $V_{r,\lambda}$ (5) при $r\geqslant 1$ имеет ненулевое ядро*

$$\mathrm{Ker}V_{r,\lambda}=\{p\in\Pi\colon p(x)=\sum_{s=0}^{r-1}a_sx^{2s+1}\}.$$

Пусть $a>0$, $k\geqslant 0$, $2k+a-1>0$, $\lambda=(2k-1)/a$, $v_{k,a}(x)=|x|^{2k+a-2}$ – степенной вес, $d\mu_{k,a}(x)=c_{k,a}v_{k,a}(x)dx$ – нормированная мера на прямой, $c_{k,a}^{-1}=2a^\lambda\Gamma(\lambda+1)$.

В статье [5] определено двупараметрическое (k,a)-обобщенное унитарное преобразование Фурье, которое в одномерном случае имеет вид

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y)=\int_{\mathbb{R}}f(x)b_{k,a}(xy)\,d\mu_{k,a}(x), \tag{7}$$

где ядро

$$b_{k,a}(xy)=j_\lambda\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{a/2}\Big)+\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+2/a)}\,\frac{xy}{(ai)^{2/a}}\,j_{\lambda+\frac{2}{a}}\Big(\frac{2}{a}\,|xy|^{a/2}\Big). \tag{8}$$

Оно является обобщением классического преобразования Фурье на случай степенного веса на прямой ($a=2,k=0$), а также обобщением преобразования Данкля ($a=2$) (см. [3]). Но в отличие от преобразований Фурье и Данкля, для которых пространство Шварца является инвариантным, обобщенное преобразование Фурье при $a\neq 2$ обладает деформационными свойствами и пространство Шварца для него не является инвариантным (см. [1]). В частности, $\mathcal{F}_{k,a}(f)$ быстро убывает на бесконечности для любой $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, если только $a=2/n$, $n\in\mathbb{N}$.

Понятно, что деформационные свойства во многом связаны с аргументом $|xy|^{a/2}$ в ядре (2). Преобразование (1) и ядро (2) получаются из (7) и (8) при $a=2/(2r+1)$, $r\in\mathbb{R}$, $k=(\lambda a+1)/2$, $\lambda>-1/2$, заменой переменных

$$(2r+1)^{1/2}x^{\frac{1}{2r+1}}\to x,\quad (2r+1)^{1/2}y^{\frac{1}{2r+1}}\to y.$$

Здесь $x^{\frac{1}{2r+1}}$ — обратная функция для x^{2r+1} на $\mathbb{R}$. При этом мера $d\mu_{k,a}(x)$ перейдет в меру $d\nu_\lambda(x)$. Преобразование $\mathcal{F}_{r,\lambda}$ с ядром $e_{r,\lambda}(xy)$ становится проще и удобнее для изучения. Установив его свойства, с помощью обратных замен переменных мы получим аналогичные свойства для преобразования $\mathcal{F}_{k,a}$. Возможно и обратное. Следуя этой методологии в работе устанавливаются свойства (k,a)-обобщенного преобразования Фурье при $a=2/(2r+1)$ на основе свойств обобщенного преобразования Данкля, полученных в статьях [1, 2]. В дальнейшем всегда $a=2/(2r+1)$, $r\in\mathbb{Z}_+$.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\mathbb{R}, d\mu)$ — лебегово пространство μ-измеримых комплекснозначных функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,d\mu} = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p}, \ 1 \leqslant p < \infty, \quad \|f\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup_{\mathbb{R}} |f(x)|, \ p = \infty,$$

$C_b(\mathbb{R})$ — множество непрерывных ограниченных функций, $C_0(\mathbb{R})$ — множество непрерывных бесконечно малых на бесконечности функций,

Мы будем писать $A \lesssim B$, если выполнено неравенство $A \leqslant cB$ с константой $c > 0$, зависящей только от несущественных параметров.

В секции 2 доказывается теорема 1. В секции 3 для преобразования $\mathcal{F}_{k,a}$ определяются операторы обобщенного сдвига и устанавливаются их свойства. В секции 4 для преобразования $\mathcal{F}_{k,a}$ определяются свертки и обобщенные средние. Для обобщенных средних исследуется L_p-сходимость и сходимость почти всюду.

2. Доказательство теоремы 1

Равенство (6) достаточно доказать для системы степеней $\{x^n\}_{n=0}^\infty$.

Если функция $f(x)$ — четная, то

$$\Delta_{r,\lambda} f(x) = \Delta_\lambda f(x), \quad V_{r,\lambda} f(x) = V_\lambda f(x),$$

поэтому равенство (6) верно для мономов x^{2s}. Отметим, что (см. [3, Chap. 16, 16.3(2)])

$$V_{r,\lambda} x^{2s} = V_\lambda x^{2s} = \frac{(1/2)_s}{(\lambda+1)_s}.$$

Пусть $n = 2s+1$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Применяя [6, Гл.16, 16.3(2)], получим

$$V_{r,\lambda} x^{2s+1} = x^{2s+1} \widetilde{c}_\lambda \int_{-1}^{1} t^{2s+1} P_{2r+1}^{\lambda-1/2}(t)(1-t^2)^{\lambda-1/2} \, dt$$

$$= x^{2s+1} \begin{cases} 0, \ s = 0, 1, \ldots, r-1, \\ \frac{(1/2)_{s+1}(s-r+1)_r}{(\lambda+1)_{s+r+1}}, \ s \geqslant r. \end{cases} \tag{9}$$

Так как $\Delta x = 0$ и в силу (9) $V_{r,\lambda} x = 0$, то для монома x равенство (6) выполнено.

Если $1 \leqslant s \leqslant r-1$, то согласно (9) $V_{r,\lambda} x^{2s+1} = 0$, $0 \leqslant s-1 < r-1$, и вновь применяя (9), получим

$$V_{r,\lambda} \Delta x^{2s+1} = 2s(2s+1) V_{r,\lambda} x^{2(s-1)+1} = 0.$$

Следовательно, равенство (6) для x^{2s+1} при $1 \leqslant s \leqslant r-1$ выполнено.

Для $s \geqslant r$

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\lambda} x^{2s+1} &= [2s(2s+1) + (2\lambda+1)(2s+1) - (4r(r+\lambda+1) + 2\lambda + 1)] x^{2s-1} \\ &= 4(s-r)(s+r+\lambda+1) x^{2s-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Если $s = r$, то в силу (10) $\Delta_{r,\lambda} x^{2r+1} = 0$ и применяя (9), получим

$$\Delta_{r,\lambda} V_{r,\lambda} x^{2r+1} = \frac{(1/2)_{r+1} r!}{(\lambda+1)_{2r+1}} \Delta_{r,\lambda} x^{2r+1} = 0.$$

Опять применяя (9), получим

$$V_{r,\lambda} \Delta x^{2r+1} = 2r(2r+1) V_{r,\lambda} x^{2(r-1)+1} = 0.$$

Следовательно, равенство (6) для x^{2r+1} выполнено.

Если $s \geqslant r+1$, то $s-1 \geqslant r$ и применяя (9), (10), получим

$$V_{r,\lambda}\Delta x^{2s+1} = 2s(2s+1)V_{r,\lambda}x^{2(s-1)+1} = \frac{2s(2s+1)(1/2)_s(s-r)_r}{(\lambda+1)_{s+r}}x^{2s-1} = \frac{4(1/2)_{s+1}(s-r)_{r+1}}{(\lambda+1)_{s+r}}x^{2s-1}.$$

Аналогично, применяя (9), (10), получим

$$\Delta_{r,\lambda}V_{r,\lambda}x^{2s+1} = \frac{(1/2)_{s+1}(s-r+1)_r}{(\lambda+1)_{s+r+1}}\delta_{r,\lambda}x^{2s+1}$$

$$= \frac{4(1/2)_{s+1}(s-r+1)_r(s-r)(s+r+\lambda+1)}{(\lambda+1)_{s+r+1}}x^{2s-1} = \frac{4(1/2)_{s+1}(s-r)_{r+1}}{(\lambda+1)_{s+r}}x^{2s-1}.$$

Равенство (6) для x^{2s+1} при $s \geqslant r+1$ также выполнено.

Все случаи разобраны. Теорема 1 доказана.

3. Операторы обобщенного сдвига

Пусть $\lambda = (2k-1)/a = (2r+1)(k-1/2) > -1/2$. Преобразование $\mathcal{F}_{k,a}$ (7) запишем в виде

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e_{k,a}(-xy)\,d\mu_{k,a}(x),$$

где ядро

$$e_{k,a}(xy) = j_\lambda\big((2r+1)(xy)^{\frac{1}{2r+1}}\big) + i(-1)^r\frac{(2r+1)^{2r+1}xy}{2^{2r+1}(\lambda+1)_{2r+1}}\,j_{\lambda+2r+1}\big((2r+1)(xy)^{\frac{1}{2r+1}}\big).$$

Делая замены

$$\begin{gathered} u = (2r+1)^{1/2}x^{\frac{1}{2r+1}}, \quad x = (2r+1)^{-(r+1/2)}u^{2r+1}, \quad v = (2r+1)^{1/2}y^{\frac{1}{2r+1}}, \\ y = (2r+1)^{-(r+1/2)}v^{2r+1}, \quad f(x) = f((2r+1)^{-(r+1/2)}u^{2r+1}) = h(u), \end{gathered} \tag{11}$$

получим

$$e_{k,a}(xy) = e_{r,\lambda}(uv), \quad \mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = \mathcal{F}_{r,\lambda}(h)(v), \quad \|f\|_{p,d\mu_{k,a}} = \|h\|_{p,d\nu_\lambda}. \tag{12}$$

Пусть $w = (2r+1)^{1/2}z^{\frac{1}{2r+1}}$, $z = (2r+1)^{-(r+1/2)}w^{2r+1}$,

$$\tau^y_{k,a}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{k,a}(yz)e_{k,a}(xz)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)\,d\mu_{k,a}(z), \tag{13}$$

$$T^y_{k,a}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} j_\lambda\big((2r+1)(yz)^{\frac{1}{2r+1}}\big)e_{k,a}(xz)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)\,d\mu_{k,a}(z), \tag{14}$$

$$\tau^v_{r,\lambda}h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{r,\lambda}(vw)e_{r,\lambda}(uw)\mathcal{F}_{r,\lambda}(h)(w)\,d\nu_\lambda(w),$$

$$T^v_{r,\lambda}h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} j_\lambda(vw)e_{r,\lambda}(uw)\mathcal{F}_{r,\lambda}(h)(w)\,d\nu_\lambda(w)$$

— операторы обобщенного сдвига для преобразований $\mathcal{F}_{k,a}$ и $\mathcal{F}_{r,\lambda}$ соответственно. Согласно формулам (11), (12)

$$\tau^y_{k,a}f(x) = \tau^v_{r,\lambda}h(u), \quad T^y_{k,a}f(x) = T^v_{r,\lambda}h(u). \tag{15}$$

Пусть

$$\lambda_0 = \lambda - 1/2, \quad A = (u^2 + v^2 - 2uvt)^{1/2}, \quad A_r = \big(x^{\frac{2}{2r+1}} + y^{\frac{2}{2r+1}} - 2(xy)^{\frac{1}{2r+1}}t\big)^{1/2}. \tag{16}$$

Для операторов обобщенного сдвига $\tau^v_{r,\lambda}$, $T^v_{r,\lambda}$ известны представления (см. [2])

$$\tau^v_{r,\lambda}h(u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big\{h(A)\Big(1 - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}(t) + P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{u-vt}{A}\Big) + P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{v-ut}{A}\Big)\Big)$$

$$+h(-A)\Big(1 - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}(t) - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{u-vt}{A}\Big) - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{v-ut}{A}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t), \tag{17}$$

$$T^v_{r,\lambda}h(u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big\{h(A)\Big(1 + P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{u-vt}{A}\Big)\Big) + h(-A)\Big(1 - P^{(\lambda_0}_{2r+1}\Big(\frac{u-vt}{A}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t). \tag{18}$$

В силу формул (11)

$$h(A) = f((2r+1)^{-(r+1/2)}A^{2r+1}) = f(A_r^{2r+1}),$$

поэтому, делая замены (11) в (17), (18) и применяя (15), придем к утверждению.

Теорема 2. *Пусть $\lambda_0 > 0$, A_r определено в (16). Для операторов обобщенного сдвига $\tau^y_{k,a}$, $T^y_{k,a}$ справедливы представления*

$$\tau^y_{k,a}f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big\{f(A_r^{2r+1})\Big(1 - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}(t) + P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{x^{\frac{1}{2r+1}} - y^{\frac{1}{2r+1}}t}{A_r}\Big)$$

$$+P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{y^{\frac{1}{2r+1}} - x^{\frac{1}{2r+1}}t}{A_r}\Big)\Big) + f(-A_r^{2r+1})\Big(1 - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}(t)$$

$$-P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{x^{\frac{1}{2r+1}} - y^{\frac{1}{2r+1}}t}{A_r}\Big) - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{y^{\frac{1}{2r+1}} - x^{\frac{1}{2r+1}}t}{A_r}\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t), \tag{19}$$

$$T^y_{k,a}f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big\{f(A_r^{2r+1})\Big(1 + P^{(\lambda_0)}_{2r+1}\Big(\frac{x^{\frac{1}{2r+1}} - y^{\frac{1}{2r+1}}t}{A_r}\Big)\Big)$$

$$+f(-A_r^{2r+1})\Big(1 - P^{(\lambda_0}_{2r+1}\Big(\frac{x^{\frac{1}{2r+1}} - y^{\frac{1}{2r+1}}t}{A_r}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t). \tag{20}$$

Следствие 1. *На подпространстве четных функций*

$$\tau^y_{k,a}f(x) = \int_{-1}^{1} f(A_r^{2r+1})(1 - P^{(\lambda_0)}_{2r+1}(t))\,dm_\lambda(t).$$

Пусть $\|e_{r,\lambda}(uv)\|_\infty = \|e_{k,a}(xy)\|_\infty = M_{r,\lambda}$, $d_{n,\alpha} = \max\limits_{[-1,1]}|P_n^{(\alpha)}(t)|$. Справедливы оценки (см. [1, 2])

$$M_{r,\lambda} \leqslant 1 + d_{2r,\lambda_0},\ -1/2 < \lambda < 0; \quad M_{r,\lambda} = 1,\ \lambda \geqslant 0.$$

Из формулы (3) для ядра $e_{r,\lambda}(xy)$ вытекает оценка

$$|(e_{r,\lambda}(xy))^{(n)}_x| \leqslant M_{r,\lambda}|y|^n, \quad y \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть

$$M^\tau_{r,\lambda} = \begin{cases} 1 + 3d_{2r+1,\lambda_0},\ -1/2 < \lambda < 0, \\ 4,\ \lambda \geqslant 0, \end{cases}$$

$$M_{r,\lambda}^T = \begin{cases} 1 + d_{2r+1,\lambda_0}, & -1/2 < \lambda < 0, \\ 1, & \lambda \geqslant 0. \end{cases}$$

Учитывая оценки L^p-норм операторов $\tau_{r,\lambda}^v$, $T_{r,\lambda}^v$ (см. [2]), равенства (15), получим утверждение.

Теорема 3. *Для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $y \in \mathbb{R}$, линейные операторы* (13) *и* (14) *ограничены в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ и для их норм справедливы оценки*

$$\|\tau_{k,a}^y\|_{p\to p} \leqslant M_{r,\lambda}^\tau, \quad \|T_{k,a}^y\|_{p\to p} \leqslant M_{r,\lambda}^T. \tag{21}$$

На подпространстве четных функций $\|\tau_{k,a}^y\|_{p\to p} \leqslant M_{r,\lambda}^T$.
Для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ и любого $x \in \mathbb{R}$

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |T_{k,a}^y f(x)|^p \, d\mu_{k,a}(y)\Big)^{1/p} \leqslant \big(1 + d_{2r+1,\lambda_0}\big)\big\|f\big\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |T_{k,a}^y f(x)|^p \, d\mu_{k,a}(y)\Big)^{1/p} \leqslant \big\|f\big\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Неравенство (21) для оператора $\tau_{k,a}^y$ при $\lambda \geqslant 0$ доказано в статье [7]. Выражение A_r для записи оператора $\tau_{k,a}^y$ применялось в статьях [8, 9].

Свойства операторов обобщенного сдвига $\tau_{k,a}^y$, $T_{k,a}^y$, вытекающие из свойств операторов $\tau_{r,\lambda}^y$, $T_{r,\lambda}^y$ в статье [2], собраны в следующем предложении.

Предложение 1. *Для операторов обобщенного сдвига* (13), (14) *справедливы следующие свойства:*

1) *если* $\lambda \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$, *то* $T_{k,a}^y f(x) \geqslant 0$;
2) $\tau_{k,a}^0 f(x) = T_{k,a}^0 f(x) = f(x)$;
3) $\tau_{k,a}^y 1 = T_{k,a}^y 1 = 1$;
4) $\tau_{k,a}^y e_{k,a}(xz) = e_{k,a}(yz) e_{k,a}(xz)$, $T_{k,a}^y e_{k,a}(xz) = j_\lambda((2r+1)(yz)^{\frac{1}{2r+1}}) e_{k,a}(xz)$;
5) *если* $f, g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, *то*
$$\int_{\mathbb{R}} \tau_{k,a}^y f(x) g(x) \, d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \tau_{k,a}^{-y} g(x) \, d\mu_{k,a}(x),$$
$$\int_{\mathbb{R}} T_{k,a}^y f(x) g(x) \, d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) T_{k,a}^y g(x) \, d\mu_{k,a}(x);$$
6) *если* $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, *то*
$$\int_{\mathbb{R}} \tau_{k,a}^t f(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{k,a}(x),$$
$$\int_{\mathbb{R}} T_{k,a}^t f(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{k,a}(x);$$
7) если $\delta > 0$, $\operatorname{supp} f \subset [-\delta, \delta]$, $|y| \leqslant \delta$ и $\delta_1 = \big(|y|^{\frac{1}{2r+1}} + \delta^{\frac{1}{2r+1}}\big)^{2r+1}$, то
$\operatorname{supp} \tau_{k,a}^y f$, $\operatorname{supp} T_{k,a}^y f \subset [-\delta_1, \delta_1]$; если $|y| > \delta$ и $\delta_2 = \big(|y|^{\frac{1}{2r+1}} - \delta^{\frac{1}{2r+1}}\big)^{2r+1}$, то
$\operatorname{supp} \tau_{k,a}^y f$, $\operatorname{supp} T_{k,a}^y f \subset [-\delta_1, -\delta_2] \cup [\delta_2, \delta_1]$.

Пусть

$$\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}) = \{f(x) = F_1(x^{\frac{1}{2r+1}}) + xF_2(x^{\frac{1}{2r+1}}) \colon \ F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \ F_1, F_2 - \text{четные}\},$$

$$\mathcal{S}_{r,\lambda}(\mathbb{R}) = \{h(u) = F_1(u) + u^{2r+1}F_2(u)\colon\ F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ F_1, F_2 - \text{четные}\}.$$

Известно, что (см. [1, 10])

$$\mathcal{F}_{r,\lambda}(\mathcal{S}_{r,\lambda}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}_{r,\lambda}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}). \tag{22}$$

Так как для $f \in \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}$ произведение

$$e_{k,a}(xz)f(z)$$

$$= (j_\lambda((2r+1)(xz)^{\frac{1}{2r+1}}) + cxzj_{\lambda+2r+1}((2r+1)(xz)^{\frac{1}{2r+1}}))(F_1(z^{\frac{1}{2r+1}}) + zF_2(z^{\frac{1}{2r+1}}))$$

$$= \{(j_\lambda(2r+1)(xz)^{\frac{1}{2r+1}})F_1(z^{\frac{1}{2r+1}}) + cx(z^{\frac{1}{2r+1}})^{4r+2}j_{\lambda+2r+1}((2r+1)(xz)^{\frac{1}{2r+1}}))F_2(z^{\frac{1}{2r+1}})\}$$

$$+z\{j_\lambda((2r+1)(xz)^{\frac{1}{2r+1}})F_2(z^{\frac{1}{2r+1}}) + cxj_{\lambda+2r+1}((2r+1)(xz)^{\frac{1}{2r+1}})F_1(z^{\frac{1}{2r+1}})\}$$

принадлежит $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$ по переменной z, то в силу (22)

$$\tau^y_{k,a}f(x) = \mathcal{F}_{k,a}(e_{k,a}(xz)\mathcal{F}_{k,a}(f)(z))(-y) \in \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$$

по переменной y. В силу симметрии $\tau^y_{k,a}f(x)$ по x и y, $\tau^y_{k,a}f(x) \in \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$ по переменной x. Аналогично разбираются случаи операторов обобщенного сдвига $T^y_{k,a}f(x)$, $\tau^v_{r,\lambda}h(u)$, $T^v_{r,\lambda}h(u)$. Таким образом, справедливо утверждение.

Предложение 2. Если $f \in \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{S}_{r,\lambda}(\mathbb{R})$, то по всем переменным

$$\tau^y_{k,a}f(x) \in \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}), \quad T^y_{k,a}f(x) \in \mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}), \quad \tau^v_{r,\lambda}h(u) \in \mathcal{S}_{r,\lambda}(\mathbb{R}), \quad T^v_{r,\lambda}h(u) \in \mathcal{S}_{r,\lambda}(\mathbb{R}).$$

4. Свертки и обобщенные средние

Пусть x и u, y и v связаны соотношениями (11), функции $f(x)$ и $h(u)$, $g(x)$ и $l(u)$ связаны соотношениями

$$f(x) = f((2r+1)^{-(r+1/2)}u^{2r+1}) = h(u), \quad g(x) = g((2r+1)^{-(r+1/2)}u^{2r+1}) = l(u).$$

Определим четыре свертки

$$(f *_{\tau_{k,a}} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^{-x}_{k,a}g(y)\,d\mu_{k,a}(y), \quad (f *_{T_{k,a}} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y_{k,a}f(x)g(y)\,d\mu_{k,a}(y),$$

$$(h *_{\tau_{r,\lambda}} l)(u) = \int_{\mathbb{R}} h(v)\tau^{-u}_{r,\lambda}l(v)\,d\nu_\lambda(v), \quad (h *_{T_{r,\lambda}} l)(u) = \int_{\mathbb{R}} T^v_{r,\lambda}h(u)l(v)\,d\nu_\lambda(v).$$

Функция $g(y)$ в свертке, определяемой оператором $T^y_{k,a}$, предполагается четной. Тогда функция $l(v)$ также будет четной.

Так как $\tau^{-x}_{k,a}g(y) = \tau^{-u}_{r,\lambda}l(v)$, $T^y_{k,a}f(x) = T^v_{r,\lambda}h(u)$ (15), то

$$(f *_{\tau_{k,a}} g)(x) = (h *_{\tau_{r,\lambda}} l)(u), \quad (f *_{T_{k,a}} g)(x) = (h *_{T_{r,\lambda}} l)(u).$$

Следовательно, свойства сверток, определяемых с помощью преобразования $\mathcal{F}_{r,\lambda}$, установленные в статье [2], будут справедливы и для сверток, определяемых с помощью преобразования $\mathcal{F}_{k,a}$.

Теорема 4. *Пусть* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $1/p+1/q \geqslant 1$ *и* $1/s = 1/p+1/q-1$. *Если* $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $g \in L^q(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, *то*

$$\|(f *_{\tau_{k,a}} g)\|_{s,d\mu_{k,a}} \leqslant M^\tau_{r,\lambda}\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}\|g\|_{q,d\mu_{k,a}},$$

$$\|(f *_{T_{k,a}} g)\|_{s,d\mu_{k,a}} \leqslant M^T_{r,\lambda}\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}\|g\|_{q,d\mu_{k,a}}.$$

Пусть

$$\mathcal{A}_{k,a} = \{f \in C_b(\mathbb{R}):\ f,\, \mathcal{F}_{k,a}(f) \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})\}.$$

Предложение 3. *Если $f \in \mathcal{A}_{k,a}$, $g \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ и g — четная, то для всех $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$(f *_{\tau_{k,a}} g)(x) = (f *_{T_{k,a}} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y_{k,a} f(x) g(y)\, d\mu_{k,a}(y),$$

$$\mathcal{F}_{k,a}(f *_{\tau_{k,a}} g)(y) = \mathcal{F}_{k,a}(f *_{T_{k,a}} g)(y) = \mathcal{F}_{k,a}(f)(y)\mathcal{F}_{k,a}(g)(y).$$

Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leqslant p < \infty$, то $(f *_{\tau_{k,a}} g)(x) = (f *_{T_{k,a}} g)(x)$ почти всюду.

Пусть $\varepsilon > 0$, $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{k,a}(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{A}_{k,a}$, $\varphi(0) = 1$, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \mathcal{F}_{k,a}(\varphi(\varepsilon(\cdot)))(y)$. Тогда

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-(2k+a-1)}\widehat{\varphi}\big(\varepsilon^{-1}y\big), \quad \widehat{\varphi}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) \cap C_0(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\mu_{k,a}(y) = 1.$$

Под $L^\infty(\mathbb{R})$ далее будем понимать $C_0(\mathbb{R})$. Для $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, определим (k,a)-обобщенные средние

$$\Phi^\tau_\varepsilon f(x) = (f *_{\tau_{k,a}} \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^{-x}_{k,a}\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\mu_{k,a}(y). \tag{23}$$

Функция φ — генератор обобщенных средних (23). Если функция $\varphi(x)$ — четная, то согласно теореме 4 почти всюду

$$\Phi^\tau_\varepsilon f(x) = \Phi^T_\varepsilon f(x) = (f *_{T_{k,a}} \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y_{k,a} f(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\mu_{k,a}(y).$$

При рассмотрении средних $\Phi^T_\varepsilon f(x)$ будем всегда предполагать, что генератор четный.

В силу теоремы 4

$$\|\Phi^\tau_\varepsilon f\|_{p,d\mu_{k,a}} \leqslant M^\tau_{r,\lambda}\|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\mu_{k,a}}\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad \|\Phi^T_\varepsilon f\|_{p,d\mu_{k,a}} \leqslant M^T_{r,\lambda}\|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\mu_{k,a}}\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}.$$

Пусть $\psi(u) = \varphi((2r+1)^{-(r+1/2)}u^{2r+1}) = \varphi(x)$, $\widehat{\psi}(v) = \mathcal{F}_{r,\lambda}(\psi)(v)$, $\widehat{\psi}_\varepsilon(v) = \mathcal{F}_{r,\lambda}(\psi(\varepsilon(\cdot)))(v)$. Для четной φ функция ψ тоже четная. Согласно (11), (12), (15)

$$\widehat{\psi}(v) = \widehat{\varphi}(y), \quad \psi, \widehat{\psi} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda), \quad \psi(0) = 1, \quad \widehat{\psi}_\varepsilon(v) = \varepsilon^{-2(\lambda+1)}\widehat{\psi}\big(\varepsilon^{-1}v\big),$$

$$\widehat{\psi}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_0(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_\varepsilon(v)\, d\nu_\lambda(v) = 1, \quad \tau^{-u}_{r,\lambda}\widehat{\psi}_\varepsilon(v) = \tau^{-x}_{k,a}\widehat{\varphi}_\varepsilon(y).$$

Если $h(u) = \varphi((2r+1)^{-(r+1/2)}u^{2r+1}) = f(x)$, то для (r,λ)-обобщенных средних

$$\Psi^\tau_\varepsilon h(u) = (f *_{\tau_{r,\lambda}} \widehat{\psi}_\varepsilon)(u) = (f *_{\tau_{k,a}} \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \Phi^\tau_\varepsilon f(x). \tag{24}$$

Таким образом, для (k,a)-обобщенных средних справедливы те же свойства, что и для (r,λ)-обобщенных средних. Используя результаты статьи [2], получим следующие утверждения.

Теорема 5. *Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_{k,a}$, $\varphi(0) = 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ при $1 \leqslant p < \infty$ или $f \in C_0(\mathbb{R})$ при $p = \infty$, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - \Phi^\tau_\varepsilon f\|_{p,d\mu_{k,a}} = 0.$$

Обобщенные средние, для которых выполняется теорема 4 называются регулярными.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы 4 функция φ — четная, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f-\Phi_\varepsilon^T f\|_{p,d\mu_{k,a}}=0.$$

При доказательстве теоремы 4 для обобщенного преобразования Данкля в статье [2] использовались модули непрерывности

$$\omega_\tau(\delta,h)_{p,d\nu_\lambda}=\sup_{|v|\leqslant\delta}\|\tau_{r,\lambda}^v h-h\|_{p,d\nu_\lambda},\quad \omega_T(\delta,h)_{p,d\nu_\lambda}=\sup_{|v|\leqslant\delta}\|T_{r,\lambda}^v h-h\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Для деформированного обобщенного преобразования Данкля они будут иметь вид

$$\omega_\tau(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}=\sup_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_{k,a}^y f-f\|_{p,d\mu_{k,a}},\quad \omega_T(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}=\sup_{|y|\leqslant\delta}\|T_{k,a}^y f-f\|_{p,d\mu_{k,a}}.$$

Если h и f связаны соотношением (11), то между модулями непрерывности имеет место простая связь

$$\omega_\tau(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}=\omega_\tau((2r+1)^{1/2}\delta^{\frac{1}{2r+1}},h)_{p,d\nu_\lambda},$$

$$\omega_T(\delta,f)_{p,d\mu_{k,a}}=\omega_T((2r+1)^{1/2}\delta^{\frac{1}{2r+1}},h)_{p,d\nu_\lambda},$$

то есть они стремятся к нулю при $\delta\to 0$ одновременно.

В статье [2] для обобщенного преобразования Данкля исследованы обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса. Все они порождены четными генераторами. Рассмотрим их аналоги для деформированного обобщенного преобразования Данкля или (k,a)-обобщенного преобразования Фурье при $a=2/(2r+1)$.

Напомним, что $\lambda=(2k-1)/a$. Генератором обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса будет функция $\varphi(x)=e^{-x^a/a}\in\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$. Известно [5, Theorem 5.1], что

$$\widehat{\varphi}=\varphi\in\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}).\tag{25}$$

Следовательно, обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса регулярные.

Для обобщенных средних Пуассона $\varphi(x)=e^{-2|x|^{a/2}/a}\in\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$. Согласно [6, Гл.8, 8.6(4)]

$$\widehat{\varphi}(y)=c_{\lambda,r}\big(1+|y|^a\big)^{-(\lambda+3/2)}\lesssim(1+|y|)^{-(2k-1+3a/2)}\ \text{ и }\ \widehat{\varphi}\in L^1(\mathbb{R},d\mu_{k,a}).\tag{26}$$

Обобщенные средние Пуассона также являются регулярными.

Для обобщенных средних Бохнера–Рисса

$$\varphi(x)=\begin{cases}\big(1-|x|^a\big)^\delta, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}\qquad \widehat{\varphi}(y)=c_{\lambda,r,\delta}j_{\lambda+\delta+1}\big(2|y|^{\frac{a}{2}}/a\big),\quad \delta>0$$

(см. [6, Гл.8, 8.5(33)]). Генератор $\varphi\in L^1(\mathbb{R},d\mu_{k,a})$. Из асимптотики функции Бесселя [11, Гл.7, 7.1]

$$|\widehat{\varphi}(y)|\lesssim(1+|y|)^{-(2k+a-2+a(\delta-\lambda-1/2)/2)}\ \text{ и }\ \widehat{\varphi}\in L^1(\mathbb{R},d\mu_{k,a}),\tag{27}$$

если только $\delta>\delta_0=\lambda+1/2$. Число δ_0 называют критическим показателем. Если $\delta>\delta_0$, то обобщенные средние Бохнера–Рисса являются регулярными.

Если L^p-сходимость Φ_ε^τ-средних мы получали на основе известной информации о L^p-сходимости Ψ_ε^τ-средних, то при исследовании сходимости почти всюду удобнее вначале рассмотреть Φ_ε^τ-средние и изучить их мажоранту

$$\Phi^\tau f(x)=\sup_{\varepsilon>0}|\Phi_\varepsilon^\tau f(x)|.$$

Для этого будем использовать функцию распределения

$$d_{f,\mu}(\alpha) = \int_{\{x\in\mathbb{R}:\ |f(x)|>\alpha\}} d\mu_{k,a}(x) \tag{28}$$

и пространство $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ измеримых функций, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p,\infty,d\mu_{k,a}} = \sup\{\alpha(d_{f,\mu}(\alpha))^{\frac{1}{p}} : \alpha > 0\} \tag{29}$$

(см. [12, Sect. 1.4.1]).

Пространство $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ называют слабым L^p-пространством. Имеет место строгое вложение $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ и $\|f\|_{p,\infty,d\mu_{k,a}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}$.

При исследовании сходимости почти всюду обобщенных средних $\Phi^\tau_\varepsilon f(x)$ будем опираться на следующее утверждение типа теоремы Банаха–Штейнгауза (см., например, [12, Theorem 2.1.14]).

Предложение 4. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, множество $D \subset L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ плотно в $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$. Если для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ выполнено неравенство*

$$\|\Phi^\tau f\|_{p,\infty,d\mu_{k,a}} \lesssim \|f\|_{p,d\mu_{k,a}} \tag{30}$$

и для любой $f \in D$ обобщенные средние $\Phi^\tau_\varepsilon f(x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду, то они сходятся к $f(x)$ почти всюду для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$.

Неравенство (30) называют слабым L^p-неравенством. По теореме 5 в качестве множества D можно взять $C_0(\mathbb{R})$. В этом случае будет иметь место даже равномерная сходимость. Для доказательства неравенства (30) нам понадобится максимальная функция Харди–Литтлвуда.

Пусть $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}$. Для функции $f \in$ $\in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и (k,a)-обобщенного деформированного преобразования Данкля максимальную функцию $\mathcal{M}_{k,a}f$ определим с помощью свертки

$$\mathcal{M}_{k,a}f(x) = \sup_{s>0} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^{-x}_{k,a}\chi_{[-s,s]}(y)\, d\mu_{k,a}(y)\right|}{\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-s,s]}(y) d\mu_{k,a}(y)}.$$

Применяя предложение 4 и четность оператора T^y по y, получим

$$\mathcal{M}_{k,a}f(x) = \sup_{s>0} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}} T^y_{k,a}f(x)\chi_{[-s,s]}(y) d\mu_{k,a}(y)\right|}{\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-s,s]}(y) d\mu_{k,a}(y)} = \sup_{s>0} \frac{\left|\int_0^\infty T^y_{k,a}f(x)\chi_{[0,s]}(y) d\mu_{k,a}(y)\right|}{\int_0^\infty \chi_{[0,s]}(y) d\mu_{k,a}(y)}.$$

Лемма 1. *Если $\lambda \geqslant 0$, $\gamma > 0$, четный генератор $\varphi \in \mathcal{A}_{k,a}$, $\varphi(0) = 1$, справедлива оценка $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1+|y|)^{-(2k+a-1+\gamma)}$ и $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leqslant p < \infty$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$*

$$\Phi^\tau f(x) \lesssim \mathcal{M}_{k,a}|f|(x).$$

Доказательство. Согласно предложениям 1, 3, $T^y_{k,a}$ — положительный оператор и для почти всех x, $(f *_\tau \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = (f *_T \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)$. Отсюда $|T^y_{k,a}f(x)| \leqslant T^y_{k,a}|f|(x)$ и

$$\Phi^\tau f(x) = \Phi^T f(x) \leqslant \sup_{\varepsilon>0}(|f| *_T |\widehat{\varphi}_\varepsilon|)(x), \quad \mathcal{M}_{k,a}f(x) \leqslant \mathcal{M}_{k,a}|f|(x).$$

Следовательно, мы можем далее считать, что $f(x), \widehat{\varphi}(y) \geqslant 0$.

Используя разложение

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\chi_{[\varepsilon 2^j, \varepsilon 2^{j+1}]}(y),$$

равенство $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-(2k+a-1)}\widehat{\varphi}(\varepsilon^{-1}y)$, эквивалентность условия $\lambda = (2k-1)/a \geqslant 0$ условию $k \geqslant 1/2$, получим

$$\int_0^\infty T^y_{k,a}f(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\,d\mu_{k,a}(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty T^y_{k,a}f(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\chi_{[\varepsilon 2^j,\varepsilon 2^{j+1}]}(y)\,d\mu_{k,a}(y)$$

$$\lesssim \sum_{j=-\infty}^{\infty}(1+2^j)^{-\gamma}\Big(\frac{2^j}{1+2^j}\Big)^{2k+a-1}\frac{\int_0^\infty T^y_{k,a}f(x)\chi_{[0,\varepsilon 2^{j+1}]}(y)\,d\mu_{k,a}(y)}{\int_0^\infty \chi_{[0,\varepsilon 2^{j+1}]}(y)\,d\mu_{k,a}(y)}$$

$$\lesssim \sum_{j=0}^{\infty}\big(2^{-\gamma j}+2^{-(2k+a-1)j}\big)\mathcal{M}_{k,a}f(x) \lesssim \mathcal{M}_{k,a}f(x).$$

Предложение 5 доказано.

Для максимальной функции Харди–Литтлвуда $\mathcal{M}_{k,a}f$ обобщенного преобразования Фурье при $a = 2/(2r+1)$ справедливо слабое L^1-неравенство и сильное L^p-неравенство при $1 < p < \infty$ [13]. Следовательно, в условиях предложения 5 для мажоранты обобщенных средних $\Phi^\tau f$ справедливо неравенство (30) и мы приходим к утверждению.

Теорема 6. *Пусть $\lambda \geqslant 0$, $\gamma > 0$, четный генератор $\varphi \in \mathcal{A}_{k,a}$, $\varphi(0) = 1$, и $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1+|y|)^{-(2k+a-1+\gamma)}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leqslant p < \infty$, то почти всюду*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi^\tau_\varepsilon f(x) = f(x).$$

Учитывая свойства (25)–(27) обобщенных деформированных преобразований Данкля генераторов обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона и Бохнера–Рисса при $\delta > \delta_0$, мы получаем их сходимость почти всюду для функций из $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leqslant p < \infty$, если $\lambda \geqslant 0$.

Аналогично функции распределения (28), квазинормы (29), пространства $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ мы можем определить функцию распределения $d_{h,\nu}(\alpha)$, квазинорму $\|h\|_{p,\infty,d\nu_\lambda}$, пространство $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. Применяя замены (11), получим

$$T^y_{k,a}f(x) = T^v_{r,\lambda}f(u), \quad d_{f,\mu}(\alpha) = d_{h,\nu}(\alpha),$$

$$\|f\|_{p,d\mu_{k,a}} = \|h\|_{p,d\nu_\lambda}, \quad \|f\|_{p,\infty,d\mu_{k,a}} = \|h\|_{p,\infty,d\nu_\lambda},$$

поэтому

$$\mathcal{M}_{r,\lambda}h(u) = \sup_{t>0}\frac{\Big|\int_{\mathbb{R}} T^v_{r,\lambda}h(u)\chi_{[-t,t]}(y)d\nu_\lambda(v)\Big|}{\int_{\mathbb{R}}\chi_{[-t,t]}(v)d\nu_\lambda(v)} = \mathcal{M}_{k,a}f(x)$$

и

$$\|\mathcal{M}_{r,\lambda}h\|_{1,\infty,d\nu_\lambda} \lesssim \|h\|_{1,d\nu_\lambda}, \quad \|\mathcal{M}_{r,\lambda}h\|_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \|h\|_{p,d\nu_\lambda},\ 1 < p < \infty. \tag{31}$$

Аналогично лемме 1 для мажоранты $\Psi^\tau h(u) = \sup_{\varepsilon>0}|\Psi^\tau_\varepsilon h(u)|$ доказывается утверждение

Лемма 2. *Если $\lambda \geqslant 0$, $\gamma > 0$, четный генератор $\psi \in \mathcal{A}_{r,\lambda}$, $\psi(0) = 1$, справедлива оценка $|\widehat{\psi}(v)| \lesssim (1+|v|)^{-(2\lambda+2+\gamma)}$ и $h \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$, то для почти всех $u \in \mathbb{R}$*

$$\Psi^\tau h(u) \lesssim \mathcal{M}_{r,\lambda}|h|(u).$$

Применяя для средних $\Psi^\tau_\varepsilon h$ аналог предложения 4, лемму 2, (31), получим утверждение.

Теорема 7. *Пусть $\lambda \geqslant 0$, $\gamma > 0$, четный генератор $\psi \in \mathcal{A}_{r,\lambda}$, $\psi(0) = 1$, и $|\widehat{\psi}(v)| \lesssim (1+|v|)^{-(2\lambda+2+\gamma)}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$, то почти всюду*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Psi^\tau_\varepsilon h(u) = h(u).$$

Как и в предыдущем случае для обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса (при $\delta > \delta_0$) обобщенного преобразования Данкля для функций из пространства $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ имеет место сходимость почти всюду.

5. Заключение

В работе для обобщенного преобразования Данкля определен оператор сплетения, который устанавливает связь дифференциально-разностных операторов с обычными производными и позволяет записать ядро обобщенного преобразования Данкля в виде, удобном для его оценок, включая оценки производных. По-видимому, этот путь, как и в случае преобразования Данкля (см. [3, Chap. 2, 2.4]), можно реализовать в многомерном случае. Дополнительные трудности будут связаны с тем, что ядро оператора сплетения будет ненулевым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. On the kernel of the (κ, a)-Generalized Fourier transform // Forum of Mathematics, Sigma. 2023. Vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: https://doi.org/10.1017/fms.2023.69.

2. Иванов В. И. Недеформированное обобщенное преобразование Данкля на прямой // Матем. заметки. 2023. Т. 114, № 4. С. 509–524.

3. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.

4. Dunkl C. F. Integral kernels with reflection group invariance // Canad. J. Math. 1991. Vol. 43. P. 1213–1227.

5. Ben Saïd S., Kobayashi T., Orsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных представлений. Том 2. М.: Наука, 1970. 328 с.

7. Boubatra M. A., Negzaoui S., Sifi M. A new product formula involving Bessel functions // Integral Transforms Spec. Funct. 2022. Vol. 33, no. 3. P. 247–263.

8. Mejjaoli H. Deformed Stockwell transform and applications on the reproducing kernel theory // Int. J. Reprod. Kernels. 2022. Vol. 1, no. 1. P. 1–39.

9. Mejjaoli H., Trimèche K. Localization Operators and Scalogram Associated with the Deformed Hankel Wavelet Transform // Mediterr. J. Math. 2023. Vol. 20, no. 3. Article 186.

10. Иванов В. И. Одномерное (k, a)-обобщенное преобразование Фурье // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 24, № 4. С. 92–108.

11. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 798 с.

12. Grafacos L. Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2008. 489 p.

13. Ben Saïd S., Negzaoui S. Norm inequalities for maximal operators // Journal of Inequalities and Applications. 2022. Article number: 134. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02874-1.

REFERENCES

1. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S., 2023, "On the kernel of the (κ, a)-Generalized Fourier transform" , *Forum of Mathematics, Sigma*, vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: https://doi.org/10.1017/fms.2023.69.

2. Ivanov V. I., 2023, "Undeformed generalized Dunkl transform on the line" , *Math. Notes.*, vol. 114, no. 4, pp. 509–524.

3. Rösler M., 2002, "Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions" , *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

4. Dunkl C. F., 1991, "Integral kernels with reflection group invariance" , *Canad. J. Math.*, vol. 43, pp. 1213–1227.

5. Saïd S., Kobayashi T., Orsted B., 2012, "Laguerre semigroup and Dunkl operators" , *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336.

6. Bateman H., Erdŕelyi A., 1954, "Tables of Integral Transforms, Vol. II" , *New York: McGraw Hill Book Company*, 451 p.

7. Boubatra M. A., Negzaoui S., Sifi M., 2022, "A new product formula involving Bessel functions" , *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 33, no. 3, pp. 247–263.

8. Mejjaoli H., 2022, "Deformed Stockwell transform and applications on the reproducing kernel theory" , *Int. J. Reprod. Kernels*, vol. 1, no. 1, pp. 1–39.

9. Mejjaoli H., Trimèche K., 2023, "Localization Operators and Scalogram Associated with the Deformed Hankel Wavelet Transform" , *Mediterr. J. Math.*, vol. 20, no. 3, Article 186.

10. Ivanov V. I., 2023, "One-dimensional (k, a)-generalized Fourier transform" , *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, vol. 24, no. 4, pp. 92–108. (In Russian)

11. Watson G. N., 1995, "A Treatise on the Theory of Bessel Functions" , *Cambridge: Cambridge University Press*, 804 p.

12. Grafacos L., 2008, "Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249" , *New York: Springer Science+Business Media, LLC*, 489 p.

13. Ben Saïd S., Negzaoui S., 2022, "Norm inequalities for maximal operators" , *Journal of Inequalities and Applications*, Article number: 134. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02874-1.

Получено 13.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023