ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 519.651 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-22-32

# Об одном обобщённом интерполяционном полиномиальном операторе[1]

А. Ф. Галимянов, Т. Ю. Горская

**Галимянов Анис Фуатович** — кандидат физико-математических наук, Казанский (Приволжский) федеральный университет (г. Казань).
*e-mail: anis_59@mail.ru*
**Горская Татьяна Юрьевна** —кандидат технических наук, Казанский государственный архитектурно-строительный университет (г. Казань).
*e-mail: gorskaya0304@mail.ru*

**Аннотация**

В статье рассматривается построение обобщённого полиномиального оператора, необходимого для нахождения приближённого решения уравнений с дробным порядком интегрирования. Интегральные уравнения дробного порядка используются в ряде задач, связанных с исследованием процессов, которые ведут себя скачкообразно, например, для задач диффузии, экономических задач, связанных с теорией устойчивого развития и других подобных задач. В настоящее время возрос интерес к подобным уравнениям, о чем говорят публикации последних лет, в которых исследуются процессы, описываемые с помощью таких уравнений. В связи с этим становится актуальным изучение методов решения подобных задач. Так как эти уравнения точно не решаются, возникает необходимость в разработке и применении приближённых методов их решения. В статье получен вид полиномиального оператора для некоторых непрерывных на $(0, 2\pi)$ функций, выраженный через интерполяционный полином Лагранжа по равноотстающим узлам. Также установлена связь обобщённого интерполяционного оператора с оператором Фурье, получена величина близости этих операторов. Для интерполяционного полиномиального оператора найдена оценка погрешности приближения точного значения по метрике пространства непрерывных на $(0, 2\pi)$ функций. Данная работа является продолжением исследований авторов.

*Ключевые слова:* приближённые методы, интерполяционные полиномиальные операторы, оценка погрешности.

*Библиография:* 18 названий.

**Для цитирования:**
А. Ф. Галимянов, Т. Ю. Горская. Об одном обобщённом интерполяционном полиномиальном операторе // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 22–32.

[1]Исследование выполнено в КФУ и КГАСУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 519.651 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-22-32

## On one generalized interpolation polynomial operator

A. F. Galimyanov, T. Y. Gorskaya

**Galimyanov Anis Fuatovich** — candidate of physical and mathematal sciences, Kazan (Volga) Federal University (Kazan).
*e-mail: anis_59@mail.ru*
**Gorskaya Tatyana Yur'evna** candidate of technical sciences, Kazan State University of Architecture and Engineering (Kazan).
*e-mail: gorskaya0304@mail.ru*

**Abstract**

The article deals with the construction of a generalized polynomial operator necessary for finding approximate solutions of equations with fractional order of integration. Integral equations of fractional order are used in a number of problems related to the study of processes that behave discontinuously, for example, for diffusion problems, economic problems related to the theory of sustainable development and other similar problems. At present, interest in such equations has increased, as evidenced by the publications of recent years in which the processes described by such equations are investigated. In this connection, it becomes relevant to study methods for solving such problems. Since these equations cannot be solved exactly, there is a need to develop and apply approximate methods for their solution. In this article we obtain a form of polynomial operator for some continuous functions on $(0, 2\pi)$ expressed through the Lagrange interpolation polynomial on equally spaced knots. The connection of the generalized interpolation operator with the Fourier operator is also established, and the closeness value of these operators is obtained. For the interpolation polynomial operator an estimate of the error of approximation of the exact value by the metric of the space of $(0, 2\pi)$ continuous functions is found. This work is a continuation of the research of the authors.

*Keywords:* approximate methods, interpolation polynomial operators, error estimation.

*Bibliography:* 18 titles.

**For citation:**
A. F. Galimyanov, T. Y. Gorskaya, 2023, "On one generalized interpolation polynomial operator", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 22–32.

## 1. Введение

В настоящее время возрос интерес к уравнениям с дробно-интегральными операторами, поскольку такие уравнения находят своё применение в ряде теоретических и прикладных задач, связанных с исследованием и построением моделей для задач диффузии, электрохимических процессов, а также экономических процессов, связанных с теорией устойчивого развития. Задачи с операторами дробного интегрирования и дифференцирования как правило, точно не решаются, поэтому возникает необходимость в разработке, обосновании применения приближённых методов решения для этих уравнений. Отметим, что существуют научные публикации, отражающие подобные исследования, приведем обзор некоторых работ. Так, в работах [1] -[3] предложены численные методы для некоторых классов таких уравнений, например, авторами [1] разработан комплект Fractional Integration Toolbox (FIT), который эффективно выполняет дробное численное интегрирование, работа носит прикладной характер, а в работе [2] были проведены теоретические изучением интегро-дифференциальных уравнений, для частного случая был построен функционал Ляпунова, дающий качественные свойства решений. В диссертации Тарасова В.И. [4] предложены модели для интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка, решение которых составляет отдельное исследование, что еще раз говорит об актуальности исследований, связанных с обоснованием применений и поиском аппаратов приближения для решения таких уравнений. Нами также проводились исследования, основанные на известных методологических подходах для решения задач приближения для уравнений с интегралами дробного порядка, сначала проекционно-сеточными методами [5], затем по построению квадратурных формул для интегралов [6]–[8]. В работе [9] авторы для нахождения приближенного решения задачи управления на базе интегральных уравнений дробного порядка сводят задачу дробного оптимального управления в эквивалентную вариационную задачу, которая может быть сведена к задаче, состоящей из решения система алгебраических уравнений с использованием квадратурной формулы Лежандра-Гаусса с методом Рэлея-Ритца, результаты согласуются с тестовыми примерами других авторов. Теоретическим обоснования существования решения ряда обобщённых задач с использованием интегралов дробного порядка посвящены следующие работы, например, для приближенного решения задач затухания для семейство специальных функций с заметными свойствами дробного исчисления в пространствах Соболева авторами [10] получены оптимальные оценки погрешности полиномиальных приближений Чебышева, как следствие,получены оптимальные оценки погрешности для спектральных разложений и связанной с ними чебышевской интерполяции и квадратуры, измеренных в различных нормах. Авторами [11] получены оценки дробных интегральных операторов для различных дробных видов интегралов. В работе [12] теоретически обоснованы решения некоторых обобщённых краевых задач Римана-Лиувиля, определены существование и единственность их решений. В статьях [13],[14] получены некоторые новые обобщённые дробные интегральные неравенства типа средней точки и трапеции для дважды дифференцируемых выпуклых функций [13], для выпуклых функций в[14]. Изучению некоторых новых неравенств для класса дифференцируемых функций, связанных с функционалами Чебышева, обобщенного взвешенного дробного интеграла посвящена работа [15]. Кроме научных работ, носящих прикладной характер, имеются и чисто теоретические исследования, так, в работе [16] авторы установили некоторые обобщенные дробные интегральные неравенства Райна с использованием выпуклой функции по координатам. Для некоторых типов интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка возможно, в частности, найти интегральное преобразование, облегчающее процесс поиска решения, например, в работе [17] найдено интегральное преобразование Меллина для оператора интегродифференцирования дробного порядка. Аппроксимационный аппарат, использующий тригонометрические полиномы, в частности суммы Фурье, также используется в работе [18], применяемый для диофантовых приближений. Анализируя географию публикаций, видно, что исследования в этом направлении ведутся в всем мире, и в основном связаны с решениями частных задач, как прикладных, так и теоретических.

Однако, несмотря на достигнутый успех в этом направлении, остаётся открытым вопрос теоретического обоснования применения приближённых методов для более общего класса подобных задач, в настоящей работе построен интерполяционный оператор для аппроксимации дробных интегралов, использующихся в математических моделях широкого класса задач.

## 2. Основные результаты

Построение обобщённого полиномиального оператора $A_n$. Обозначим через

$$H_n^T = \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right\} = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \right\}$$

– множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше $n$.

Обозначим через $A_n$ линейный оператор, ставящий в соответствие каждой $\varphi(t) \in C_{2\pi}$ полином $T_n(t) \in H_n^T$, удовлетворяющим условиям

$$I_{\mp}^{\alpha}(T_n)(t_k) = I_{\mp}^{\alpha}(\varphi)(t_k), k = \overline{-n, n}, \tag{1}$$

где за $t_k$ возьмём равноотстоящие узлы $t_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = \overline{-n, n}$.

Будем рассматривать класс функций $\varphi(t) \in H_n^T$, таких, что свободный член $c_0 = 0$.

Исследуем $A_n$, для этого напомним, что $I_{\mp}^{\alpha}(\varphi; t) = \sum_{|k|=1}^{n} \frac{c_k e^{ikt}}{(\pm ik)^{\alpha}}$ – оператор дробного интегрирования Вейля.

Положим $A_n(\varphi; t) = I^{\alpha}(\varphi; t) = \varphi_n(t) = \sum_{|k|=1}^{n} c_k(\varphi_n) e^{ikt}$, где $c_k(\varphi_n)$ – комплексные коэффициенты Фурье $\varphi_n(t)$. Тогда имеем:

$$\sum_{|k|=1}^{n} \frac{c_k(\varphi_n) e^{ikt_j}}{(\pm ik)^{\alpha}} = I_{n\mp}^{\alpha}(\varphi)(t_j), t_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, j = \overline{-n, n}.$$

Остановимся подробнее для определённости на "левостороннем"дробном интеграле

$$I_{+}^{\alpha}(\varphi; t) = I^{\alpha}(\varphi; t),$$

заметим, что $\Psi_{-}^{\alpha} = \Psi_{+}^{\alpha}$.

Справедлива следующая

Теорема 1 Полиномиальный оператор $A_n(\varphi; t)$ представим в виде

$$A_n(\varphi; t) = \frac{d^{\alpha}}{dt}(L_n(z; t)), \tag{2}$$

где $L_n(z; t)$ – интерполяционный полином Лагранжа по узлам $t_{-n},...,t_n$ для функции $z(t) = I^{\alpha}(\varphi; t), \phi(t) \in C(0, 2\pi)$.

Доказательство. Пусть $A_n$ представимо в виде (2). Полиномиальный оператор удовлетворяет условию (1), следовательно,

$$I^{\alpha}\left(\frac{d^{\alpha}}{dt}[L_n(I^{\alpha}(\varphi; t))]\right)(t_k) = I^{\alpha}(\varphi; t_k), t_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = \overline{-n, n}.$$

Рассмотрим представление $A_n(\varphi; t) :$ при $c_0 = 0 \quad T_n(\varphi; t) = \sum_{|k|=1}^{n} c_k e^{ikt}$, тогда

$$I^{\alpha}(T_n) = \sum_{|l|=1}^{n} \frac{c_l e^{ilt}}{(il)^{\alpha}}.$$

Видно, что $L_n(z; t) = L_n[I_{+}^{\alpha}(\varphi; t)] = I^{\alpha}(T_n; t)$.

Тогда $L_n(z; t) = \sum_{|k|=1}^{n} \frac{c_k e^{ikt}}{(ik)^{\alpha}}$, по определению $\frac{d^{\alpha} x}{dt}(t) = D^{\alpha}(x; t) = \sum_{|k|=1}^{n} (ik)^{\alpha} c_k(x) e^{ikt}$.

Следовательно,

$$D^{\alpha}(L_n(z; t)) = \sum_{|k|=1}^{n} \frac{(ik)^{\alpha} c_k e^{ikt}}{(ik)^{\alpha}} = T_n(\varphi; t).$$

Утверждение теоремы полностью доказано.

Найдем вид полиномиального оператора $A_n$. Положим, что выполняемся

$$z(t_j) = T_n(z;t_j) = \sum_{|k|=1}^{n} \frac{c_k(\varphi)e^{ikt_j}}{(ik)^\alpha}, j = \overline{-n,n}.$$

$T_n(z;t)$ – многочлен степени $n$.

$$T_n(z;t) = L_n(z;t), \tag{3}$$

где $L_n(z;t)$ – интерполяционный полином Лагранжа $n$–й степени для функций $z(t)$ по узлам $t_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, j = \overline{-n,n}$. При этом $c_0 = 0$.

Запишем полином Лагранжа в комплексной форме

$$L_n(z;t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} z(t_j)e^{-ikt_j},$$

из (3) получим

$$\sum_{|k|=1}^{n} \frac{c_k(\varphi)e^{ikt}}{(ik)^\alpha} = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} z(t_j)e^{-ikt_j}.$$

Отсюда находим коэффициенты

$$c_k = \frac{(ik)^\alpha}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} z(t_j)e^{-ikt_j}, k = \overline{-n,n}.$$

Подставляя их в искомый полином $T_n(\varphi;t)$, имеем

$$T_n(\varphi;t) = \sum_{|k|=1}^{n} c_k e^{ikt} = \sum_{|k|=1}^{n} e^{ikt} \frac{(ik)^\alpha}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} z(t_j)e^{-ikt_j} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} I^\alpha(\varphi;t_j) \sum_{|k|=1}^{n} (ik)^\alpha e^{ik(t-t_j)}.$$

То есть

$$A_n(\varphi;t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} I^\alpha(\varphi;t_j) \sum_{|k|=1}^{n} (ik)^\alpha e^{ik(t-t_j)}. \tag{4}$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 2 Линейный оператор, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(t) \in C_{2\pi}$ полином $T_n(t) \in H_n^T$ и удовлетворяющий условиям (1), имеет вид

$$A_n(\varphi;t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} I^\alpha(\varphi;t_j) \sum_{|k|=1}^{n} (ik)^\alpha e^{ik(t-t_j)}.$$

Если учесть, что в (4) $(ik)^\alpha = k^\alpha e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}$, то полином $A_n(\varphi;t)$ можно записать в виде

$$A_n(\varphi;t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} I^\alpha(\varphi;t_j) \sum_{|k|=1}^{n} (k)^\alpha e^{i[k(t-t_j)+\frac{\pi}{2}\alpha]}.$$

Получим формулу

$$A_n(\varphi;t) = \sum_{|k|=1}^{n} (ik)^\alpha c_k^{(n)} \left(I^\alpha(\varphi;t)\right) e^{ikt}.$$

Поскольку $I^{\alpha}(\varphi;t)=z(t)$, то

$$c_m(z)=\frac{c_m(D^{\alpha}(z))}{(im)^{\alpha}}=\frac{c_m(\varphi)}{(im)^{\alpha}}, z(const)=0, m\neq 0.$$

$$c_k^{(n)}(z)=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}e^{-ikt_j}\sum_{|m|=1}^{n}c_m(z)e^{-imt_j}=\sum_{|\mu|=1}^{\infty}c_{k+\mu(2n+1)}(z)=\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\frac{c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)}{(i[k+\mu(2n+1)])^{\alpha}}.$$

Подставив $c_k^{(n)}(z)$ в $A_n(\varphi;t)$, получим

$$A_n(\varphi;t)=\sum_{|k|=1}^{n}(ik)^{\alpha}\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\frac{c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)}{(i[k+\mu(2n+1)])^{\alpha}}e^{ikt}=$$

$$=\sum_{|k|=1}^{n}e^{ikt}(ik)^{\alpha}\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left[\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right]^{\alpha}c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi). \qquad (5)$$

формулу (4)можно также записать в другом виде, учитывая, что комплексные числа представимы в тригонометрической форме, $e^{ik(t-t_j)}=\cos k(t-t_j)+i\sin k(t-t_j)$, учитывая, что при $k=0\ \ (ik)^{\alpha}e^{ik(t-t_j)}=0$, последовательно преобразуем:

$$\sum_{|k|=1}^{n}(ik)^{\alpha}e^{ik(t-t_j)}=\sum_{|k|=1}^{n}(ik)^{\alpha}\left[\cos k(t-t_j)+i\sin k(t-t_j)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(ik)^{\alpha}\left[\cos k(t-t_j)+i\sin k(t-t_j)+\cos(-k)(t-t_j)+i\sin(-k)(t-t_j)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(ik)^{\alpha}2\cos k(t-t_j).$$

С учётом этого преобразования имеем другое представление полинома $A_n(\varphi;t)$ формулы (4) в виде:

$$A_n(\varphi;t)=\frac{2}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}I^{\alpha}(\varphi;t_j)\sum_{k=1}^{n}(ik)^{\alpha}\cos k(t-t_j).$$

Очевидно, что по построению этот полином является интерполяционным полиномом степени не выше $n$.

Далее рассмотрим связь обобщённого интерполяционного оператора $A_n$ с оператором Фурье $S_n$.

$$S_n(\varphi;t)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikt}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t-x)\varphi(x)dx, \qquad (6)$$

где $D_n(t)=\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ – ядро Дирихле, $c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)e^{-ikt}dt$.

Справедлива следующая

Теорема 3 Для любой функции $\varphi(t)\in C_{2\pi}$ справедлива формула

$$A_n(\varphi;t)-S_n(\varphi;t)=\sum_{|k|=1}^{n}e^{ikt}\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left[\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right]^{\alpha}c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi), \qquad (7)$$

причём ряд (7) сходится в среднем.

Доказательство. Для любой функции $\varphi(t) \in C_{2\pi}$, имеющей производную порядка $\alpha$, справедливо

$$\frac{d^\alpha}{dt} S_n(\varphi(x);t) = S_n\left\{\frac{d^\alpha}{dx}\varphi(x);t\right\}.$$

$$S_n\varphi - A_n\varphi = \frac{d^\alpha}{dt}\left[S_n(z_0;t) - L_n(z_0;t)\right].$$

$$\varphi_0(t) = \varphi(t) - c_0(\varphi),$$

$$z_0(t) = I^\alpha(\varphi_0;t), \varphi \in C_{2\pi}.$$

$$S_n(z_0;t) - L_n(z_0;t) = \sum_{k=-n}^{n}(c_k(z_0) - c_k^{(n)}(z_0))e^{ikt}.$$

$$S_n(\varphi_0;t) - A_n(\varphi_0;t) = \sum_{k=-n}^{n}(ik)^\alpha(c_k(z_0) - c_k^{(n)}(z_0))e^{ikt}.$$

$$\varphi_0(t) = \frac{d^\alpha}{dt} z_0(t).$$

$$c_k(z_0) - c_k^{(n)}(z_0) = c_k(z_0) - \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{k+\mu(2n+1)}(z_0) =$$

$$= -\sum_{|\mu|=1}^{\infty} c_{k+\mu(2n+1)}(z_0) = -\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\frac{c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)}{(i[k+\mu(2n+1)])^\alpha}.$$

$$A_n(\varphi;t) - S_n(\varphi;t) = \sum_{|k|=1}^{n}(ik)^\alpha\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\frac{c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)}{(i[k+\mu(2n+1)])^\alpha}e^{ikt} =$$

$$= \sum_{|k|=1}^{n}\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left[\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right]^\alpha e^{ikt}c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi).$$

Скорость сходимости построенного интерполяционного полинома $A_n$ устанавливает следующая

Теорема 4 $A_n(\varphi;t)\forall\varphi(t) \in C_{2\pi}, \frac{1}{2} < \alpha < 1$ сходится со скоростью

$$E_n^T(\varphi)_c \le \|\varphi - A_n\varphi\|_C \le \sqrt{1+\sigma_n^2}E_n^T(\varphi)_c,$$

$$\sigma_n^2 = \max\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right|^{2\alpha}.$$

Доказательство. В силу (5),(7) имеем для $\forall\varphi(t) \in C_{2\pi}$

$$\varphi - A_n\varphi = (\varphi - S_n) + (S_n\varphi - A_n\varphi) = \sum_{|k|=n+1}^{\infty}c_k(\varphi)e^{ikt} - \sum_{|k|=1}^{n}\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left[\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right]^\alpha c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi).$$

Так как $S_n\varphi - A_n\varphi \in H_n^T, \varphi - S_n\varphi \notin H_n^T$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$(\varphi - S_n\varphi, S_n\varphi - A_n\varphi) = 0, \varphi \in C_{2\pi}.$$

Следовательно,

$$\|\varphi - A_n\varphi\|_C^2 = \|\varphi - S_n\varphi\|_C^2 + \|S_n\varphi - A_n\varphi\|_C^2 = \sum_{|k|=n+1}^{\infty}|c_k(\varphi)|^2 +$$

$$+\sum_{|k|=1}^{n}\left|\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left[\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right]^{\alpha}c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)\right|^{2}\leq\sum_{|k|=n+1}^{\infty}|c_k(\varphi)|^2+$$

$$+\sum_{|k|=1}^{n}\left\{\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left|\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right|^{2\alpha}\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left|c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)\right|^{2}\right\}\leq\sum_{|k|=n+1}^{\infty}|c_k(\varphi)|^2+$$

$$+\sigma_n^2\sum_{|k|=1}^{n}\sum_{|\mu|=1}^{\infty}\left|c_{k+\mu(2n+1)}(\varphi)\right|^{2}\leq$$

$$\leq(1+\sigma_n^2)\sum_{|k|=n+1}^{\infty}|c_k(\varphi)|^2=(1+\sigma_n^2)\left\{E_n^T(\varphi)_C\right\}^2,\varphi\in C_{2\pi},$$

где за $\sigma_n^2$ обозначили следующую сумму:

$$\sigma_n^2=\max\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\frac{k}{k+\mu(2n+1)}\right|^{2\alpha}.$$

## 3. Заключение

В заключении можно отметить, что актуальность исследований интегральных уравнений дробных порядков обусловлена их широким применением в технике, экономике и в других прикладных областях. Несмотря на исследования, проводимые для уравнений с такими операторами, следует отметить, что исследователи, как правило, решают частные случаи задач с использованием дробных интегралов и в каждом отдельном случае применяют тот или иной математический аппарат. Очевидно также, что точно такие задачи не решаются, только лишь в исключительных частных случаях. Поэтому большое значение имеет построение приближённых методов для решения дробных интегральных уравнений. В основе приближенного метода лежит оператор приближения, в виде многочлена, позволяющего приблизить точное решение. Для обоснования применения приближённого аппарата необходимо определить область его применения и определения скорости сходимости приближённого решения к точному решению. В данной работе приводится вид полиномиального оператора, устанавливается его связь с оператором Фурье и на базе этой связи его можно использовать для приближённого решения уравнений, ранее исследуемых авторами, кроме того для полученного полиномиального оператора найдена оценка скорости сходимости по норме пространства непрерывных на $(0,2\pi)$ функций.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marinov T. M., Ramirez N., Santamaria F., Fractional integration toolbox // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2013. Vol. 16, no. 3. – P. 670-681.

2. Barton T. A., Purnaras I. K., Lp-solutions of singular integro-differential equations // J. Math. Anal. Appl., 2012, № 386. – P. 830-841.

3. Saeed R. K., Ahmed C., Approximate solution for the system of non-linear Volterra integral equations of the second kind by using block-by-block method // Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 2008.V. 2, №. 1. P. 114–124.

4. Тарасов В. Е., Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка // М.: Институт компьютерных исследований. 2011, 298 с.

5. Горская Т. Ю., Галимянов А. Ф., Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для уравнений с дробно-интегральным оператором // Известия КГАСУ. 2014, №4(30) С.398-402.

6. Галимянов А. Ф., Сафиуллина Д. Э., Квадратурный метод решения интегрального уравнения смешанного типа // Изв. Вузов. Математика, 2009, №12. С. 22-27.

7. Горская Т. Ю., Галимянов А. Ф., Воронцова В. Л. Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла с логарифмически ослабленным ядром // Тезисы докладов 69 международной научной конференции по проблемам архитектуры и строительства, Казань. 2017. С.373.

8. Galimyanov A. Gorskaya T., Fractional Order Integrals for the Sustainable Development Model // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020, 890 012180.

9. Doha E. H., Bhrawy A. H., Baleanu D., Ezz-Eldien S. S., Hafez R. M. An efficient numerical scheme based on the shifted orthonormal Jacobi polynomials for solving fractional optimal control problems // Advances in Difference Equations, 2015 (1).

10. Liu W., Wang L. L., Li H. Optimal error estimates for chebyshev approximations of functions with limited regularity in fractional Sobolev-Type Spaces // Mathematics of Computation 2019, 88(320), с. 2857-2895.

11. Chel Kwun, Y., Farid, G., Min Kang, S., Khan Bangash, B., Ullah, S., Deri-vation of bounds of several kinds of operators via (s, m) -convexity // Advances in Difference Equations, 2020, (1),5.

12. Zada A., Alzabut, J., Waheed, H., Popa, I.-L. Ulam–Hyers stability of im-pulsive integrodifferential equations with Riemann–Liouville boundary condi-tions // Advances in Difference Equations, 2020 (1),64.

13. Mohammed P. O., Sarikaya M. Z. On generalized fractional integral ine-qualities for twice differentiable convex functions // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 372,112740.

14. Rahman G., Nisar K,S., Abdeljawad T., Ullah S. Certain fractional pro-portional integral inequalities via convex functions // Mathematics, 2020, 8(2), 222.

15. Rahman G., Nisar K. S., Khan S. U., Baleanu D., Vijayakumar V. On the weighted fractional integral inequalities for Chebyshev functionals // Advances in Difference Equations, 2021, (1), 18.

16. Baleanu D., Kashuri A., Mohammed P. O., Meftah B. General Raina fractional integral inequalities on coordinates of convex functions // Advances in Difference Equations, 2021, (1), 82.

17. Мамаюсупов Ж. Ш. Интегральное преобразование Меллина для оператора интегродифференцирования дробного порядка //Periodica Journal of Modern Philosophy, Social Sciences and Humanities.2022. Т. 11. С. 186-188.

18. Ковалевская Э. И., Тригонометрические суммы в метрической теории диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 207–220.

## REFERENCES


1. Marinov T. M., Ramirez N., Santamaria F., 2013, “Fractional integration toolbox”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, . vol. 16, no. 3. pp. 670-681.

2. Barton T. A., Purnaras I. K., 2012, “Lp-solutions of singular integro-differential equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, no. 386. pp. 830-841.

3. Saeed R. K., Ahmed C., 2008, “Approximate solution for the system of non-linear Volterra integral equations of the second kind by using block-by-block method”, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, v. 2,no. 1, pp. 114–124

4. Tarasov V. E., 2011, “Modeli teireticheskoi fiziki s integro-differenchirovaniem drobnogo poryadka”,[Models of theoretical physics with fractional-order integro-differentiation] *Moscow: Institute for Computer Research*, 298 p.

5. Горская Т. Ю., Галимянов А. Ф., 2014, “Obobchennii metod Bubnova-Galerkina dly uravnenii s drobno-integral’nim operatorom”, [Generalized Bubnov-Galerkin method for equations with fractional-integral operator] *News KSUAE*, no.4(30) C.398-402.

6. Галимянов А. Ф., Сафиуллина Д. Э.,2009, “Qvadraturnii metod rashenia integral’nogo uravnenia smeshannogo tipa ”,[Quadrature method for solving a mixed type integral equation] *Izv. Vuzov. Mathematics*, no.12. pp. 22-27.

7. Gorskaya T. Uy., Galimynov A. F., Vorontsova V. L., 2017, “Kvadraturnaya formyla dly gipersingularnogo integrala s logarifmicheski oslablennim jadrom ”,[The quadrature formula for the hypersingular integral with a logarithmically weakened kernel] *Theses of reports of the 69th international scientific conference on problems of architecture and construction, Kazan.* pp.373.

8. . Galimyanov A., Gorskaya T, 2020, “Fractional Order Integrals for the Sustainable Development Model”, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 890 012180

9. Doha E. H., Bhrawy A. H., Baleanu D., Ezz-Eldien S. S., Hafez R. M., 2015, “An efficient numerical scheme based on the shifted orthonormal Jacobi polynomials for solving fractional optimal control problems”,*Advances in Difference Equations*, (1)

10. Liu W., Wang L.-L., Li H., 2019, “Optimal error estimates for chebyshev approximations of functions with limited regularity in fractional Sobolev-Type Spaces”,*Mathematics of Computation*, 88(320), pp. 2857-2895.

11. Chel Kwun Y., Farid G., Min Kang S., Khan Bangash B., Ullah S.,2020, “Deri-vation of bounds of several kinds of operators via (s, m) -convexity”, *Advances in Difference Equations*, (1),5.

12. Zada A., Alzabut J., Waheed H., Popa I.-L., 2020, “Ulam–Hyers stability of impulsive integrodifferential equations with Riemann–Liouville boundary condi-tions”, *Advances in Difference Equations* (1),64.

13. Mohammed P. O., Sarikaya M. Z., 2020, “On generalized fractional integral ine-qualities for twice differentiable convex functions”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 372,112740.

14. Rahman G., Nisar K.S., Abdeljawad T., Ullah S., 2020, “Certain fractional pro-portional integral inequalities via convex functions”, *Mathematics*, 8(2),222.

15. Rahman G., Nisar K. S., Khan S. U., Baleanu D., Vijayakumar V., 2021, “On the weighted fractional integral inequalities for Chebyshev functionals”, *Advances in Difference Equations*, (1),18.

16. Baleanu D., Kashuri A., Mohammed P.O., Meftah B., 2021, “General Raina fractional integral inequalities on coordinates of convex functions”, *Advances in Difference Equations*, (1),82.

17. Mamausupov J. Sh., 2022, “Integral’noe preobrazovanie Mellina dly operatora intagrodifferencirovania drobnogo parydka ”,[The Mellin integral transformation for the fractional order integrodifferential operator] *Periodica Journal of Modern Philosophy, Social Sciences and Humanities*, vol. 11. pp. 186-188.

Получено: 15.05.2023
Принято в печать: 11.12.2023