

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 4.

УДК 512.56 + 515.122

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-12-21

Решётки топологий и квазипорядков конечной цепи¹

А. А. Веселова, И. Б. Кожухов

Веселова Александра Андреевна — Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).

e-mail: alexandra.912@mail.ru

Кожухов Игорь Борисович — доктор физико-математических наук, профессор, НИУ «МИЭТ»; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Аннотация

Решёткой квазипорядков универсальной алгебры A называется решётка тех квазипорядков на множестве A , которые согласуются с операциями алгебры, решётка топологий алгебры — это решётка тех топологий, относительно которых операции алгебры непрерывны. Решётка квазипорядков и решётка топологий алгебры A , наряду с решёткой подалгебр и решёткой конгруэнций, являются важными характеристиками этой алгебры. Известно, что решётка квазипорядков изоморфно вкладывается в решётку, антиизоморфную решётке топологий, а в случае конечной алгебры это вложение является антиизоморфизмом. Цепь X_n из n элементов рассматривается как решётка с операциями $x \wedge y = \min(x, y)$ и $x \vee y = \max(x, y)$. В работе доказано, что решётка квазипорядков и решётка топологий цепи X_n изоморфны булеану из 2^{2n-2} элементов. Найдено простое соответствие между квазипорядками цепи X_n и словами длины $n - 1$ в 4-буквенном алфавите. Найдены атомы решётки топологий. Из результатов о квазипорядках выводится известное утверждение о том, что решётка конгруэнций цепи из n элементов является булеаном из 2^{n-1} элементов. Результаты перестанут быть верными, если цепь рассматривать лишь относительно одной из операций $\wedge, \vee$.

Ключевые слова: конечная цепь, решётка квазипорядков конечной цепи, решётка топологий конечной цепи, булева решётка.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

А. А. Веселова, И. Б. Кожухов. Решётки топологий и квазипорядков конечной цепи // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 12–21.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-11-00052).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 4.

UDC 512.56 + 515.122

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-12-21

Lattices of topologies and quasi-orders on a finite chain

A. A. Veselova, I. B. Kozhukhov

Veselova Alexandra Andreyevna —Volgograd State Social and Pedagogical University (Volgograd).

e-mail: alexandra.912@mail.ru

Kozhukhov Igor Borisovich —doctor of physical and mathematical sciences, professor, NRU «MIET»; Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: kozhukhov_i_b@mail.ru

Abstract

The lattice of quasi-orders of the universal algebra A is the lattice of those quasi-orders on the set A that are compatible with the operations of the algebra, the lattice of the topologies of the algebra is the lattice of those topologies with respect to which the operations of the algebra are continuous. The lattice of quasi-orders and the lattice of topologies of the algebra A , along with the lattice of subalgebras and the lattice of congruences, are important characteristics of this algebra. It is known that a lattice of quasi-orders is isomorphically embedded in a lattice that is anti-isomorphic to a lattice of topologies, and in the case of a finite algebra, this embedding is an anti-isomorphism. A chain X_n of n elements is considered as a lattice with operations $x \wedge y = \min(x, y)$ and $x \vee y = \max(x, y)$. It is proved that the lattice of quasi-orders and the lattice of topologies of the chain X_n are isomorphic to the Boolean lattice of 2^{2n-2} elements. A simple correspondence is found between the quasi-orders of the chain X_n and words of length $n - 1$ in a 4-letter alphabet. Atoms of the lattice of topologies are found. We deduce from the results on quasi-orders a well-known statement that the congruence lattice of an n -element chain is Boolean lattice of 2^{n-1} elements. The results will no longer be true if the chain is considered only with respect to one of the operations $\wedge, \vee$.

Keywords: finite chain, quasiorder lattice of a finite chain, the lattice of topologies of a finite chain, Boolean lattice.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

A. A. Veselova, I. B. Kozhukhov, 2023, “Lattices of topologies and quasi-orders on a finite chain”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 12–21.

1. Введение

С математическим объектом (универсальной алгеброй, графом, частично упорядоченным множеством и т.д.) естественно связываются различные производные структуры – группа автоморфизмов, полугруппа эндоморфизмов, решётка подобъектов. С универсальной алгеброй можно связать решётки конгруэнций, квазипорядков, топологий. Производные структуры играют важную роль в теории, неся существенную информацию о свойствах данного объекта. В частности, теория простых алгебр, т.е. алгебр, имеющих лишь тривиальные конгруэнции, – это целое направление общей алгебры.

Имеются определённые связи производных структур друг с другом. Так, например, Ш.Радецкий доказал [2, Proposition 2.2], что $\vee$ -полурешётка подгрупп группы автоморфизмов

любой унарной алгебры изоморфно вкладывается в $\vee$ -полурешётку конгруэнций. А.К.Стейнер доказал [1, теорема 2.6], что решётка квази порядков любого множества изоморфно вкладывается в решётку, двойственную решётке топологий, причём это вложение является изоморфизмом, если множество конечно. А.В.Карташова доказала [3, следствие 1 из теоремы 1] аналогичное утверждение для решёток квази порядков и топологий, согласованных с операциями этой алгебры. В противоположность этому, В.А.Баранский доказал [4, теорема], что свойства групп автоморфизмов не зависит от свойств решёток конгруэнций в классе всех полугрупп, всех полурешёток, от свойств решёток подполугрупп в классе всех полугрупп, элементарных теорий в классе всех решёток.

Цель данной работы — доказать, что решётка топологий и решётка квази порядков цепи из n элементов являются булеанами из 2^{2n-2} элементов (эти решётки антиизоморфны друг другу согласно следствию 2 из теоремы 1 работы [3]). При этом цепь рассматривается как алгебра $X = \{1, 2, \dots, n\}$ с операциями $x \wedge y = \min\{x, y\}$ и $x \vee y = \max\{x, y\}$, т.е. как решётка. Нами также описаны атомы решётки квази порядков и решётки топологий конечной цепи. Отметим, что решётка конгруэнций конечной цепи и, вообще, любой конечной модулярной решётки, а значит, и конечной цепи, также является булеаном — см. [6, теорема 9 и упражнение 13]. У цепи из n элементов решётка конгруэнций — булеан из 2^{n-1} элементов.

Необходимые нам сведения из теории полугрупп можно найти в [5], теории решёток — в [6], теории графов — в [7], по топологии — в [8].

2. Основные понятия

Полурешёткой (верхней, нижней) называется частично упорядоченное множество, в котором у любых двух элементов есть супремум или инфимум соответственно. Множество, являющееся относительно одного и того же отношения порядка как верхней, так и нижней полурешёткой, называется решёткой. Понятие полурешётки (в старой терминологии: полуструктуры) (верхней или нижней) фактически тождественно понятию коммутативной полугруппы идемпотентов (см. [5, теорема 1.12]). Если любое непустое подмножество (как конечное, так и бесконечное) имеет супремум и инфимум, то решётка называется полной.

Квази порядком мы, как обычно, называем рефлексивное и транзитивное бинарное отношение.

Пусть X — множество, σ — бинарное отношение на множестве X и

$$f : \underbrace{X \times \dots \times X}_n \rightarrow X -$$

n -арная операция. Будем говорить, что отношение σ *стабильно относительно операции f* (по-другому: *операция f сохраняет отношение σ*), если для любых $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n \in X$ верна импликация

$$a_1 \sigma a'_1 \wedge \dots \wedge a_n \sigma a'_n \rightarrow f(a_1, \dots, a_n) \sigma f(a'_1, \dots, a'_n).$$

Следующая лемма позволяет упростить проверку того, что σ стабильно относительно операции f . Доказательство леммы опускаем ввиду его очевидности.

ЛЕММА 1. *n -арная операция f на множестве X сохраняет отношение σ в том и только том случае, если для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b, c \in X$ верна импликация*

$$b \sigma c \rightarrow f(a_1, \dots, b, \dots, a_n) \sigma f(a_1, \dots, c, \dots, a_n).$$

Пусть теперь X – универсальная алгебра с набором операций (сигнатурой) $\Omega = \{f_i | i \in I\}$. Обозначим через $\text{Qord}X$ множество всех квазипорядков на X , стабильных относительно операций этой алгебры. Отношение эквивалентности, стабильное относительно всех операций из сигнатуры, называется *конгруэнцией* алгебры X . Обозначим множество всех конгруэнций через $\text{Con}X$. Пусть τ – топология на множестве X . Говорят, что *топология τ согласуется с операциями*, если каждая операция $f \in \Omega$ является непрерывным отображением

$$f : \underbrace{X \times \dots \times X}_n \rightarrow X$$

(здесь n – арность операции f). Обозначим через $\text{Top}X$ множество всех топологий на X , согласующихся с операциями. Нетрудно проверить, что множества $\text{Qord}X$, $\text{Con}X$ и $\text{Top}X$ являются полными решётками относительно порядка $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$. При этом точной нижней гранью в каждом из этих множеств является обычное теоретико-множественное пересечение:

$$\bigwedge \{\alpha_j | j \in J\} = \bigcap \{\alpha_j | j \in J\},$$

а точная верхняя грань такова:

$$\bigvee \{\alpha_j | j \in J\} = \bigcap \{\alpha | \forall j \in J \ \alpha \supseteq \alpha_j\}.$$

При этом, очевидно, $\text{Con}X$ – полная подрешётка решётки $\text{Qord}X$, а $\text{Qord}X$ – полная подрешётка решётки $\text{Eq}X$ отношений эквивалентности на множестве X . Нулевым элементом каждой из этих решёток является отношение $\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$ (отношение равенства), а единичным элементом – $\nabla_X = X \times X = \{(x, y) | x, y \in X\}$ (универсальное отношение).

Назовём *булеаном* решётку, изоморфную решётке подмножеств некоторого множества. Напомним, что в решётке с нулём *атом* – это минимальный ненулевой элемент, а в решётке с единицей *коатом* – максимальный неединичный элемент. Нам потребуется характеристика конечных булеанов, сформулированная в следующей лемме. Конечно, данное утверждение известно специалистам по теории решёток, его доказательство мы приводим для полноты изложения.

ЛЕММА 2. Пусть L – решётка такая, что выполнены условия:

(а) L имеет n атомов: $\sigma_1, \dots, \sigma_n$;

(б) каждый ненулевой элемент из L единственным образом представим в виде точной верхней грани атомов: $\sigma = \sigma_{i_1} \vee \dots \vee \sigma_{i_k}$.

Тогда L – булеан из 2^n элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Для непустого подмножества $A = \{i_1, \dots, i_k\}$ множества X положим $\sigma_A = \sigma_{i_1} \vee \dots \vee \sigma_{i_k}$, для пустого $\sigma_\emptyset = \Delta_X$. Рассмотрим отображение $\varphi : 2^X \rightarrow L$, $\varphi(A) = \sigma_A$. Ясно, что

$$A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B).$$

Докажем обратную импликацию. Пусть $\sigma_A \leq \sigma_B$ и $i \in A$. Имеем: $\sigma_B \leq \sigma_i \vee \sigma_B \leq \sigma_A \vee \sigma_B = \sigma_B$, следовательно, $\sigma_{B \cup \{i\}} = \sigma_B$. Ввиду условия (ii) $B \cup \{i\} = B$, а значит, $i \in B$. Таким образом, $A \subseteq B$. Итак, $A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$. Следовательно, φ – изоморфизм. $\square$

3. Решётка квазипорядков конечной цепи

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, у нас X будет обозначать конечную цепь $X = \{1, 2, \dots, n\}$ с операциями $x \wedge y = \min\{x, y\}$ и $x \vee y = \max\{x, y\}$, а $\preceq$ – некоторый

квазипорядок на X . Обычные отношения обозначаются $\leq, \geq, <$ и $>$. Соотношение $x \succ y$ – то же самое, что $y \preccurlyeq x$. Хорошо известно, что для всякого квазипорядка $\preccurlyeq$ отношение $\sim$, определённое правилом

$$x \sim y \leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x,$$

является отношением эквивалентности, а на фактор-множестве $X/\sim$ квазипорядок $\preccurlyeq$ индуцирует частичный порядок.

Квазипорядок $\preccurlyeq$, как и всякое бинарное отношение, определяет на множестве X ориентированный граф, вершинами которого являются элементы множества X , а рёбрами – пары (x, y) такие, что $x \preccurlyeq y$. Компоненты сильной связности этого графа, очевидно, совпадают с классами отношения $\sim$. Компоненту сильной связности, содержащую элемент $x \in X$, будем обозначать $\bar{x}$. Мы пишем $\bar{x} \prec \bar{y}$, если $\bar{x} \preccurlyeq \bar{y}$ и $\bar{x} \neq \bar{y}$. Для элементов $x, y \in X$ пишем $x \prec y$, если $\bar{x} \prec \bar{y}$ (т.е. $x \preccurlyeq y$ и $x \not\sim y$). Аналогичные соглашения примем для символов $\succ$ и $\succcurlyeq$.

Для $x, y \in X$ полагаем $[x, y] = \{t \mid x \leq t \leq y\}$. Очевидно, $[x, y] = \emptyset$ при $x > y$. Положим $\langle x, y \rangle = [x, y] \cup [y, x]$ для любых $x, y \in X$. Подмножество $A \subseteq X$ назовём *выпуклым*, если $\langle x, y \rangle \subseteq A$ при $x, y \in A$.

Отметим, что ввиду леммы 1 квазипорядок, стабильный относительно операции $\wedge$, – это в точности такой, который удовлетворяет условию

$$\forall x, y, z \in X \quad x \preccurlyeq y \rightarrow x \wedge z \preccurlyeq y \wedge z,$$

а стабильность относительно операции $\vee$ равносильна условию

$$\forall x, y, z \in X \quad x \preccurlyeq y \rightarrow x \vee z \preccurlyeq y \vee z.$$

ЛЕММА 3. Пусть X – конечная цепь, $\preccurlyeq$ – квазипорядок на X и пусть элементы $x, y, t \in X$ таковы, что $x < t < y$ и $x \preccurlyeq y$. Тогда:

- (i) если $\preccurlyeq$ стабилен относительно операции $\wedge$, то $x \preccurlyeq t$;
- (ii) если $\preccurlyeq$ стабилен относительно операции $\vee$, то $t \preccurlyeq y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\preccurlyeq$ стабилен относительно операции $\wedge$. Тогда из $x \preccurlyeq y$ следует, что $x \wedge t \preccurlyeq y \wedge t$, т.е. $x \preccurlyeq t$. Тем самым доказано (i). Утверждение (ii) доказывается аналогично. $\square$

Так же, как лемма 3, доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 4. Пусть X – конечная цепь, элементы $x, y, t \in X$ таковы, что $x < t < y$, и $x \preccurlyeq y$ – квазипорядок, стабильный относительно обеих операций $\wedge$ и $\vee$ на X . Тогда верны следующие импликации:

- (i) $x \preccurlyeq y \rightarrow x \preccurlyeq t$ и $t \preccurlyeq y$;
- (ii) $y \preccurlyeq x \rightarrow y \preccurlyeq t$ и $t \preccurlyeq x$.

Из леммы 4 и транзитивности отношения $\preccurlyeq$ непосредственно получается следующая лемма.

ЛЕММА 5. Пусть квазипорядок $\preccurlyeq$ стабилен относительно обеих операций $\wedge$ и $\vee$ конечной цепи X . Тогда при $x < t < y$ верны следующие эквивалентности:

- (i) $x \preccurlyeq y \leftrightarrow x \preccurlyeq t$ и $t \preccurlyeq y$;
- (ii) $y \preccurlyeq x \leftrightarrow y \preccurlyeq t$ и $t \preccurlyeq x$.

Теперь мы готовы доказать важное свойство компонент сильной и слабой связности графа, соответствующего квазипорядку $\preccurlyeq$ на конечной цепи.

ЛЕММА 6. Если квазипорядок $\preccurlyeq$ на конечной цепи X стабилен относительно какой-либо из операций $\wedge, \vee$, то компоненты сильной связности и компоненты слабой связности являются выпуклыми множествами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $\preceq$ стабилен относительно операции $\wedge$ (случай, когда $\preceq$ стабилен относительно $\vee$, разбирается аналогично). Докажем вначале выпуклость сильных компонент. Пусть x, y в одной компоненте сильной связности и $x < t < y$. Из неравенства $x \preceq y$ следует, что $x \wedge t \preceq y \wedge t$, т.е. $x \preceq t$. Аналогичным образом, умножив неравенство $y \preceq x$ на t , получим $y \wedge t \preceq x \wedge t$, т.е. $t \preceq x$. Таким образом, $t \sim x$.

Теперь докажем выпуклость слабых компонент. Пусть K – компонента слабой связности. Если $x, y \in K$, то существуют элементы $u_1, u_2, \dots, u_{2k} \in X$ такие, что

$$x \preceq u_1 \succcurlyeq u_2 \preceq \dots \succcurlyeq u_{2k} \preceq y.$$

Очевидно, $u_1, u_2, \dots, u_{2k} \in K$. Положим $u_0 = x$, $u_{2k+1} = y$. Из леммы 3(i) следует, что $\langle u_i, u_{i+1} \rangle \subseteq K$ при всех i . Отсюда получаем, что $\langle x, y \rangle \subseteq \bigcup_{i=0}^{2k} \langle u_i, u_{i+1} \rangle \subseteq K$. Это означает выпуклость множества K . $\square$

Доказанные леммы позволяют получить полное представление о строении квазипорядка, стабильного относительно обеих операций $\wedge$ и $\vee$ конечной цепи $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Опишем это строение. Сначала разобьём X произвольным образом на выпуклые подмножества (это будут компоненты слабой связности): $X = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$, где $K_1 = \{1, 2, \dots, i_1\}$, $K_2 = \{i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, i_2\}$, ..., $K_m = \{i_{m-1} + 1, i_{m-1} + 2, \dots, n\}$ и предполагается, что $i_1 < i_2 < \dots < i_m$. Каждую слабую компоненту K_j разобьём на выпуклые подмножества, которые потом окажутся сильными компонентами. Элементы цепи X будем рассматривать как точки на числовой прямой. Точку i соединяем с точкой $i + 1$ символом $\sim$, если i и $i + 1$ принадлежат одной сильной компоненте. Далее, между i и $i + 1$ пишем $\rightarrow$, если $i < i + 1$, и символ $\leftarrow$, если $i > i + 1$. Наконец, между i и $i + 1$ пишем $\diamond$, если i и $i + 1$ не лежат в одной слабой компоненте. Таким образом, квазипорядку, стабильному относительно обеих операций цепи, соответствует строка длины $n - 1$, составленная из букв алфавита $\mathcal{A} = \{\sim, \rightarrow, \leftarrow, \diamond\}$. Нетрудно видеть, что верно и обратное: каждое слово длины $n - 1$ из букв алфавита $\mathcal{A}$ определяет квазипорядок, стабильный относительно операций цепи, т.е. соответствие между квазипорядками и словами взаимно однозначное. Сформулируем этот факт в виде следующего утверждения.

PROPOSITION 1. Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$ – конечная цепь. Тогда между квазипорядками на X , стабильными относительно операций $\wedge$ и $\vee$ цепи X , и словами длины $n - 1$ в алфавите $\mathcal{A} = \{\sim, \rightarrow, \leftarrow, \diamond\}$ имеется взаимно однозначное соответствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если X – цепь из n элементов, то решётка $QordX$ квазипорядков, стабильных относительно операций $\wedge$ и $\vee$ цепи X , состоит из 4^{n-1} элементов.

Приведём пример, иллюстрирующий предложение 1. Пусть $n = 10$. Рассмотрим слово $w = \sim \rightarrow \rightarrow \sim \leftarrow \rightarrow \diamond \rightarrow \leftarrow$. Ему соответствует квазипорядок, изображённый на рисунке 1.

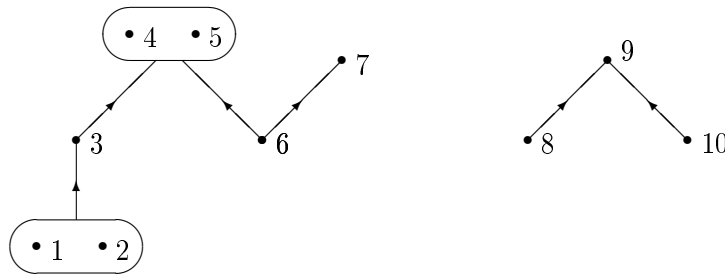


Рис. 1: Квазипорядок на конечной цепи

Введём следующие квазипорядки на множестве $X = \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\kappa_i = \{(i, i + 1)\} \cup \Delta_X, \quad \kappa'_i = \{(i + 1, i)\} \cup \Delta_X$$

для $i = 1, 2, \dots, n-1$. Нетрудно проверить, что κ_i, κ'_i – квазипорядки, стабильные относительно операций $\wedge$ и $\vee$, т.е. $\kappa_i, \kappa'_i \in \text{Qord}X$. Ясно также, что κ_i, κ'_i являются атомами решётки $\text{Qord}X$. Докажем теперь основной результат этого раздела.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$ – цепь, рассматриваемая как решётка с операциями $\wedge = \min$ и $\vee = \max$. Тогда решётка $\text{Qord}X$ всех квазипорядков, стабильных относительно операций $\wedge$ и $\vee$, является булеаном из 2^{2n-2} элементов. Атомами этого булеана являются квазипорядки $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}, \kappa'_1, \dots, \kappa'_{n-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $A = \{\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}, \kappa'_1, \dots, \kappa'_{n-1}\}$ содержит ровно $2n - 2$ элемента, поэтому всевозможных супремумов элементов из A не более 2^{2n-2} штук (здесь Δ_X рассматривается как супремум пустого множества элементов из A). А наша решётка $\text{Qord}X$, как показывает следствие 1, имеет ровно 2^{2n-2} элемента. Следовательно, если мы покажем, что каждый квазипорядок из $\text{Qord}X$ является супремумом элементов из A , то будет доказана единственность представления элемента из $\text{Qord}X$ в виде супремума элементов из A , и, применив лемму 2, мы получим утверждение нашей теоремы.

Итак, осталось доказать, что супремумы элементов из A – это вся решётка $\text{Qord}X$. Возьмём произвольный элемент κ из $\text{Qord}X$. Ранее мы квазипорядок обозначали символом $\preceq$, теперь он обозначен буквой через κ . Так что записи $x \kappa y$, $(x, y) \in \kappa$ и $x \preceq y$ равносильны. Рассмотрим следующий квазипорядок из $\text{Qord}X$:

$$\tilde{\kappa} = \bigvee \{\kappa_i | i \preceq i + 1\} \vee \bigvee \{\kappa'_j | j + 1 \preceq j\}. \quad (1)$$

Нам достаточно доказать, что $\tilde{\kappa} = \kappa$. Включение $\tilde{\kappa} \subseteq \kappa$ очевидно. Пусть $(i, j) \in \kappa$. Разберём два случая.

1-й случай: $i \leq j$. Тогда по лемме 5(i) $(i, i + 1), (i + 1, i + 2), \dots, (j - 1, j) \in \kappa$. Из (1) видно, что $(i, i + 1), \dots, (j - 1, j) \in \tilde{\kappa}$. Ввиду транзитивности отношения $\tilde{\kappa}$ получаем: $(i, j) \in \tilde{\kappa}$.

2-й случай: $j \leq i$. Этот случай разбирается аналогично, с использованием леммы 5(ii).

Следовательно, $\kappa \subseteq \tilde{\kappa}$. Отсюда получаем требуемое: $\kappa = \tilde{\kappa}$, а значит, κ – супремум элементов множества A . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Если цепь $X = \{1, 2, \dots, n\}$ рассматривать относительно только одной из операций $\wedge, \vee$, то решётка квазипорядков, стабильных относительно выбранной операции, уже не будет булеаном. Она даже не модулярна, как показывает следующий пример 3-элементной цепи. Пусть $\rho_1 = \{(1, 2)\} \cup \Delta_X$, $\rho_2 = \{(1, 2), (1, 3)\} \cup \Delta_X$, $\sigma = \{(2, 3)\} \cup \Delta_X$, $\tau = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \cup \Delta_X$. Нетрудно видеть, что все эти квазипорядки (они являются даже порядками) стабильны относительно операции $\wedge$, ρ_2 не является стабильным относительно $\vee$. При этом $\rho_1 \subset \rho_2$, $\rho_1 \wedge \sigma = \rho_2 \wedge \sigma = \Delta_X$ и $\rho_1 \vee \sigma = \rho_2 \vee \sigma = \tau$.*

Теперь скажем несколько слов о решётке конгруэнций. Решёткам конгруэнций различных алгебраических систем посвящено весьма значительное число работ. Отметим лишь некоторые из них. Тождества в решётке конгруэнций изучались в монографии [9], обзорная статья Г.Митча [10] посвящена конгруэнциям полугрупп, статьи [11], [12] – конгруэнциям полурешёток, глава 3 монографии [6] – конгруэнциям решёток. Так как конечная цепь $X = \{1, 2, \dots, n\}$ является модулярной решёткой (даже дистрибутивной), то тот факт, что $\text{Con}X$ – булеан, следует из результатов главы 3 в [6]. В нашем случае цепи X из n элементов в свете леммы 6 и теоремы 1 строение решётки $\text{Con}X$ довольно ясно: каждая конгруэнция – это разбиение цепи X на выпуклые подмножества. Очевидно, таких разбиений ровно 2^{n-1} . Решётка $\text{Con}X$ – это булеан с атомами $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, где $\theta_i = \{(i, i + 1), (i + 1, i)\} \cup \Delta_X$ при $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

4. Решётка топологий конечной цепи

Перейдём теперь к топологиям конечной цепи $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Цепь X мы рассматриваем как топологическую решётку с операциями $\wedge = \min$ и $\vee = \max$. Однако, связи этих операций друг с другом нами использоваться не будут, достаточно будет считать X топологической полугруппой относительно каждой из операций $\wedge, \vee$. Одной из этих операций будет недостаточно – см. замечание 3 ниже. Во введении уже говорилось, что решётка $\text{Qord}X$ изоморфно вкладывается в решётку, двойственную решётке $\text{Top}X$, а так как множество X конечно и $\text{Qord}X$ – булеан, то имеет место изоморфизм: $\text{Top}X \cong \text{Qord}X$ (здесь мы воспользовались тем, что булеан двойственен самому себе). Очевидно, решётка, двойственная булеану, сама является булеаном. Следовательно, на основании вышеизложенного, а также теоремы 1 мы можем заключить, что решётка $\text{Top}X$ является булеаном из 2^{2^n-2} элементов. Дальнейшие наши рассуждения направлены на то, чтобы получить более наглядное представление о топологиях конечной цепи.

Пусть X – произвольное множество, необязательно конечное, необязательно упорядоченное. Предположим, что на множестве X задана бинарная операция $*$. Непрерывность этой операции означает, что для любых $x, y, z \in X$, где $x * y = z$, и любой окрестности $U(z)$ точки z существуют окрестности $U_1(x)$ и $U_2(y)$ точек x и y такие, что

$$U_1(x) * U_2(y) \subseteq U(z). \quad (2)$$

Далее, для каждого подмножества $A \subseteq X$ множество $\tau_A = \{\emptyset, A, X\}$ является топологией на X . Будем считать, что $A \neq \emptyset$ и $A \neq X$. Тогда τ_A – атом решётки топологий (всех топологий, не только согласующихся с операциями). Понятно, что если на множестве X заданы алгебраические операции и топология τ_A согласована с этими операциями, то она будет также атомом в решётке тех топологий, которые согласованы с операциями. Выясним, какие из топологий τ_A согласуются с операцией $\wedge$ на конечной цепи $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Ответ даст следующая лемма.

ЛЕММА 7. *Топология $\tau_A = \{\emptyset, A, X\}$ где $A \neq \emptyset, X$, согласуется с операцией $\vee$ на конечной цепи X в том и только в том случае, если A выпукло и ровно один из элементов $1, n$ принадлежит A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть τ_A согласуется с операцией $\vee$. Докажем вначале, что A выпукло. Предположим, что это не так. Тогда существуют такие $x, y, z \in X$, что $x < y < z$ и при этом $x, z \in A$, $y \notin A$. Имеем: $y \vee z = z$. Возьмём в качестве окрестности $U(z)$ множество A . Ввиду (2) $U_1(y) \vee U_2(z) \subseteq A$ при некоторых U_1, U_2 . Единственное открытое множество, содержащее y , – это X . Поэтому $X \vee U_2(z) \subseteq A$. Но $X \vee B = X$ при любом $B \neq \emptyset$. Полученное противоречие показывает, что A выпукло.

Ввиду выпуклости A и того, что $A \neq \emptyset$, элементы 1 и n одновременно принадлежать множеству A не могут. Осталось доказать, что $\{1, n\} \cap A \neq \emptyset$. Предположим, что это не так. Тогда $1, n \notin A$. Возьмём любой элемент $a \in A$. Так как $1 \vee a = a$, то ввиду (2) найдутся такие окрестности $U_1(1), U_2(a)$, что $U_1(1) \vee U_2(a) \subseteq A$. Очевидно, $U_1(1) = X$, а $U_2(a) = A$ или X . Отсюда $X \vee A \subseteq A$. Но это невозможно, так как $n \notin A$.

Достаточность. Пусть A выпукло и $|\{1, n\} \cap A| = 1$. Докажем, что операция $\vee$ непрерывна в топологии $\tau_A = \{\emptyset, A, X\}$.

1-й случай: $1 \in A$. Тогда $n \notin A$. Пусть $x, y \in X$. Без ограничения общности можно считать, что $x \leq y$. Если $y \notin A$, то $U(y) = X$, и мы имеем включение $U_1(x) \vee U_2(y) \subseteq U(y)$ при любых U_1, U_2 . Если $y \in A$, то $U(y)$ равно A или X . При $U(y) = X$ включение $U_1(x) \vee U_2(y) \subseteq U(y)$ верно при любых U_1, U_2 . При $U(y) = A$ можно взять $U_1(x) = U_2(y) = A$ (действительно, из выпуклости множества A ввиду того, что $1 \in A$ и $x \leq y$, следует, что $x \in A$). Тогда получим $A \vee A \subseteq A$, что является верным соотношением.

2-й случай: $n \in A$. Тогда $1 \notin A$. Возьмём любые $x, y \in X$. Можно считать, что $x \leq y$. При $y \notin A$ мы имеем $U(y) = X$, и включение $U_1(x) \vee U_2(y) \subseteq U(y)$ выполняется при любых U_1, U_2 . При $y \in A$ возьмём $U_2(y) = A$. Тогда получим: $U_1(x) \vee U_2(y) \subseteq X \vee A = A \subseteq U(y)$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение леммы не изменится, если вместо непрерывности операции $\vee$ потребовать непрерывность операции $\wedge$ или непрерывность обеих операций.

Теперь докажем теорему, дающую полное описание решётки топологий конечной цепи.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$ – цепь, рассматриваемая как решётка с операциями $\wedge = \min$ и $\vee = \max$. Тогда решётка $\text{Тор}X$ всех топологий, относительно которых операции $\wedge = \min$ и $\vee = \max$ непрерывны, является булеаном из 2^{2n-2} элементов, атомами которого являются топологии, определённые по формулам (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано в начале этого раздела, решётка $\text{Тор}X$ является булеаном из 2^{2n-2} элементов. Докажем, что топологии, получающиеся по формулам (4), – это вся решётка $\text{Тор}X$ (при этом мы считаем, конечно, что нулевой элемент Δ_X решётки $\text{Тор}X$ получается по формулам (4) при $k = l = 0$). Далее, топологии $\tau_1, \dots, \tau'_n$ из формулы (3) являются атомами решётки $\text{Тор}X$, их ровно $2n - 2$ штук. Очевидно, в каждом булеане, даже бесконечном, любой элемент представим единственным образом в виде супремума атомов. Следовательно, формулы (4) нам дают всю решётку $\text{Тор}X$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема неверна для решётки топологий цепи X , в которых непрерывна лишь одна из операций $\wedge, \vee$ (см. замечание 1). Можно указать топологию на 3-элементном множестве, в которой операция $\wedge$ непрерывна, а операция $\vee$ нет: это $\tau = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 3\}, X\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Steiner A. K. The lattice of topologies: structure and complementation // Trans. Amer. Math. Soc..1966. Vol. 122, №2. P. 379-398.
2. Radeleczki S. The automorphism group of unary algebras // Mathematica Pannonica. 1996. Vol. 7, №2. P. 253-271.
3. Карташова А. В. О решётках квазипорядков и топологий алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Vol. 14, №5. P.85-92.
4. Баранский В. А.. О независимости свойств групп автоморфизмов от свойств других производных структур // Известия вузов. Математика. 1986. №3. P.17-22.
5. Клиффорд А.,Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп, тт. 1,2 // М., Мир. 1972.
6. Гретцер Г. Общая теория решёток // М., Мир. 1982.
7. Дехтярь М. И., Дудаков С. М., Карлов Б. Н. Лекции по дискретной математике : Учебник. — Издание второе, переработанное и дополненное // Тверь, Тверской гос. ун-т.2019.
8. Энгелькинг Р. Общая топология // М., Мир. 1986.
9. Kearnes K. A.,Kiss T. W. The sharp of congruence lattices // Memoirs of the AMS. 2013. Vol. 222, №1046. P. 1-169.
10. Mitsch H. Semigroups and their lattices of congruences// Semigroup Forum. 1983. Vol. 26, №1. P. 1-63.

11. Freese R. S., Nation J. B. Congruence lattices of semilattices // *Pacif. J. Math.* 1973. Vol. 49, №1. P. 51-58.
12. Адаричева К. В. Строение решеток конгруэнций конечных полурешеток // *Алгебра и логика*. 1996. Vol. 35, №1. P. 3-30.

REFERENCES

1. Steiner, A. K. 1966, "The lattice of topologies: structure and complementation", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 122, no. 2, pp. 379-398.
2. Radeleczki, S., 1996, "The automorphism group of unary algebras", *Mathematica Pannonica.*, vol. 7, no. 2, pp. 253-271.
3. Kartashova, A. V. "On quasiorder lattices and topology lattices of algebras", *J. Math. Sci.*, 163:6 (2009), pp. 682-687.
4. Baranskii V. A. "Independence of groups of automorphisms and retracts for semigroups and lattices", *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 30:2 (1986), 70-73. ‘
5. Clifford, A. H., Preston, G. B. "The algebraic theory of semigroups". Vol. 1 and vol. 2. - Providence, American mathematical Society, 1961 and 1967 (Mathematical Surveys, 7).
6. Grätzer, G. "General lattice theory". 2nd Ed. Springer, Birkhäuser Verlag. Berlin, 2003, xx + 663 pp.
7. Dekhtyar, M. I., Dudakov, S. M., Karlov, B. N., 2019, "Lectures on discrete mathematics: Textbook". - Second edition, revised and expanded, *Tver, Tver State Univ.*.
8. Engelking, R. "General topology", Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1977, 2nd Ed., 1985 (Monografie Matematyczne, tom 60).
9. Kearnes, K. A., Kiss T. W., 2013, "The sharp of congruence lattices", *Memoirs of the AMS.*, vol. 222, no. 1046, pp. 1-169.
10. Mitsch, H., 1983, "Semigroups and their lattices of congruences", *Semigroup Forum.*, vol. 26, no. 1, pp. 1-63.
11. Freese, R. S., Nation J. B., 1973, "Congruence lattices of semilattices", *Pacif. J. Math.*, vol. 49, no. 1, pp. 51-58.
12. Adaricheva, K. V., 1996, "The structure of congruence lattices of finite semilattices", *Algebra Logika*, 35:1 (1996), 3-30.

Получено: 17.09.2023

Принято в печать: 11.12.2023