

УДК 511.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ А. В. МАЛЫШЕВА О ЦЕЛЫХ ТОЧКАХ НА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛОИДАХ

Р. А. Дохов (г. Нальчик)

Аннотация

В этой работе дается некоторое развитие ранее проведенных исследований по задаче А. В. Малышева о числе целых точек, лежащих в некоторых областях на многомерных гиперboloидах. А. В. Малышевым [1] ставилась задача получения асимптотических формул для количества целых точек в областях типа Де Лури на многомерных гиперboloидах. Де Лури [3] в случае четырехмерной гиперболической поверхности

$$p(x_1, \dots, x_4) = \sum_{k=1}^4 a_k x_k^2 - m = 0, \quad m \neq 0$$

в области $\Omega_p(L)$ на ней определяемой неравенством

$$\sum_{k=1}^4 |a_k| x_k^2 \leq L$$

получил асимптотическую формулу (при $L \rightarrow \infty$ фиксированных a_1, a_2, a_3, a_4 , и m) для величины $R(\Omega_p(L))$, равной количеству целых точек в области $\Omega_p(L)$ на указанном гиперboloиде, но при этом остаточной формулы Де Лури не оценивает.

В дальнейшем в [1] дается обобщение этого результата на многомерный гиперboloид, задаваемый уравнением

$$p = p(x_1, \dots, x_s) = \sum_{k=1}^s a_k x_k^2 + \sum_{k=1}^s b_k x_k + c = 0,$$

где $a_k, b_k, (k = 1, \dots, s), c \neq 0$ — целые числа, причем коэффициенты a_k не все одного знака, а область $\Omega_p(L)$ на этом гиперboloиде задается неравенством

$$\sum_{k=1}^s |a_k| x_k^2 \leq L.$$

В развитие указанной задачи А. В. Малышева мы в уравнении гиперболоида рассматриваем квадратичную форму, эквивалентную диагональной, а область

$$\Omega_p(L) : \sum_{k=1}^s |a_k| x_k^2 \leq L$$

заменяется на область

$$\sum_{i=1}^s \left\{ Q_i^{(1)}(x_i, y_i) + Q_i^{(2)}(z_i, t_i) \right\} \leq L,$$

где $Q_i^{(1)}$ и $Q_i^{(2)}$ — бинарные квадратичные формы, эквивалентные диагональным формам.

Обозначим через $R(\Omega_p(L), s)$ количество целых точек, лежащих в области $\Omega_p(L)$ на $4s$ -мерном гиперboloиде

$$\sum_{i=1}^s \left\{ Q_i^{(1)}(x_i, y_i) - Q_i^{(2)}(z_i, t_i) \right\} = h,$$

где $Q_i^{(1)}(x_i, y_i)$, $Q_i^{(2)}(z_i, t_i)$ — положительные целочисленные бинарные квадратичные формы дискриминанта d ; $h \neq 0$, при этом эти формы считаем эквивалентными диагональным.

При выводе нашего асимптотического результата о величине $R(\Omega_p, L)$ используется теорема о взвешенном числе целых точек $I_h(n, s)$ из [2] при $n \rightarrow \infty$ и комплексный вариант тауберовой теоремы с остаточным членом для степенных рядов (см. [5, 6]).

Отметим также, что полученный нами результат аналогичен одному результату Дэвенпорта [7] по обобщенной проблеме Варинга при показателе $k = 2$, но при таком значении k наше уравнение гиперболической поверхности имеет несколько более общий вид.

Ключевые слова: задача А. В. Малышева, целые точки, многомерный гиперboloид, квадратичные формы, взвешенное число целых точек, тауберова теорема, асимптотическая формула.

Библиография: 16 названий.

ON A PROBLEM OF MALYSHEV A. V. OF INTEGER POINTS ON MULTIDIMENSIONAL HYPERBOLOIDS

R. A. Dokhov (Nalchik)

Abstract

Some development early conducted investigations on the problem of Malyshev A. V. about the number of integer points lying in some areas on multidimensional hyperboloids is given in this work. The task of obtaining of asymptotic formulae for quantity of integer points in areas of the kind of De Luri on

multidimensional hyperboloids is put by Malyshev A. V. [1]. De Luri [3] in case of four-dimensional hyperbolic surface

$$p(x_1, \dots, x_4) = \sum_{k=1}^4 a_k x_k^2 - m = 0, \quad m \neq 0$$

in the area $\Omega_p(L)$ on it by defined inequality

$$\sum_{k=1}^4 |a_k| x_k^2 \leq L$$

obtained asymptotic formula (in $L \rightarrow \infty$ and fixed a_1, a_2, a_3, a_4 , and m) for value of $R(\Omega_p(L))$, equaled to the number of integer points in the area $\Omega_p(L)$ on the mentioned hyperboloid, but in so doing De Luri does not value the remainder formula.

Later on in [1] generalization of this value is given on multidimensional hyperboloid given by the equation

$$p = p(x_1, \dots, x_s) = \sum_{k=1}^s a_k x_k^2 + \sum_{k=1}^s b_k x_k + c = 0,$$

where $a_k, b_k, (k = 1, \dots, s), c \neq 0$ — integers, in addition to coefficients a_k not all is one sign, but area of $\Omega_p(L)$ on this hyperboloid is given by the inequality

$$\sum_{k=1}^s |a_k| x_k^2 \leq L.$$

In development of indicated task of Malyshev A. V. we examine arbitrary quadratic form equivalent to the diagonal in the equation of hyperboloid, and the area of

$$\Omega_p(L) : \sum_{k=1}^s |a_k| x_k^2 \leq L$$

is substituted for the area

$$\sum_{i=1}^s \left\{ Q_i^{(1)}(x_i, y_i) + Q_i^{(2)}(z_i, t_i) \right\} \leq L,$$

where $Q_i^{(1)}$ и $Q_i^{(2)}$ — binary quadratic forms, equivalent to diagonal forms. In conclusion of our asymptotic result about quantity of $R(\Omega_p, L)$ the theorem about weighted number of integer points $I_h(n, s)$ from [2] is used in $n \rightarrow \infty$ and the complex variant of tauberian's theorem with remainder term for the power series (see [5, 6]).

Also we will note that our obtained result is analogous to one result of Davenport [7] by generalized problem of Varing in power $k = 2$, but in such meaning of k our question of hyperbolic surface has several more common kind.

Keywords: A. V. Malyshev problem, integer number, multidimensional hyperboloid, quadratic forms, tauberian theorem, asymptotic formula.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

В данной работе мы рассматриваем задачу А. В. Малышева [1] о числе целых точек, лежащих в специальных областях на некоторых многомерных гиперболоидах. Для исследования этой задачи в [1] разработан подход, основанный на рассмотрении взвешенного числа целых точек на поверхностях второго порядка, задаваемых диагональной квадратичной формой. В некоторое развитие задачи Малышева мы вместо диагональных квадратичных форм, используем недиагональные формы, но эквивалентные диагональным.

Итак, мы рассматриваем гиперболическую поверхность

$$\sum_{i=1}^s \left\{ Q_i^{(1)}(x_i, y_i) - Q_i^{(2)}(z_i, t_i) \right\} = h, \quad (1)$$

где $Q_i^{(1)}(x_i, y_i)$, $Q_i^{(2)}(z_i, t_i)$ — положительные целочисленные бинарные квадратичные формы дискриминанта d ; $h \neq 0$, при этом эти формы считаем эквивалентными диагональным.

Опираясь на результат теоремы о взвешенном числе целых точек на гиперболической поверхности (1), получим асимптотическую формулу для числа целых точек в некоторых областях на этой поверхности задаваемых неравенством

$$\sum_{i=1}^s \left\{ Q_i^{(1)}(x_i, y_i) + Q_i^{(2)}(z_i, t_i) \right\} \leq L, \quad (2)$$

где $L \rightarrow \infty$.

Исследование задачи о распределении целых точек в областях, лежащих на поверхностях второго порядка, издавна привлекает внимание многих специалистов. В случае эллипсоидов размерности $s \geq 4$ более законченные исследования проведены в работах [1, 8, 9]. Изучению распределения целых точек по областям на конусах посвящены работы [10, 11]. В случае гиперболоидов, к которому относится наша работа, общие исследования содержатся в [1, 12, 13]. Активные исследования проводятся также по вопросу распределения целых точек в областях специальных видов на гиперболоидах. К этому направлению исследований относятся работы [1, 3, 4, 14, 15].

В случае, когда поверхность (1) есть четырехмерный гиперболоид

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{k=1}^4 a_k x_k^2 - m = 0$$

где $m \neq 0$.

Де Лури [3] в области $\Omega_p = \Omega_p(L)$ определяемой на ней неравенством

$$\sum_{k=1}^4 |a_k| x_k^2 \leq L,$$

получим асимптотическую (при $L \rightarrow \infty$ и фиксированных коэффициентах) формулу для числа целых точек без оценки остаточного члена.

В дальнейшем А. В. Малышев обобщил результат Де Лури на многомерные гиперболические поверхности, определяемые диагональными квадратичными формами. На той же четырехмерной гиперболической поверхности Эстерман [4] рассматривает область $\Omega_p(L)$, задаваемую системой неравенств

$$|a_k| x_k^2 \leq L \quad (k = 1, \dots, 4),$$

и получает асимптотическую формулу для числа целых точек $R(\Omega_p(L))$, лежащих в области $\Omega_p(L)$ с главным членом порядка L и остатком $O\left(L^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right)$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Мы обобщаем результат Де Лури, а результат А. В. Малышева частично переносим на случай форм, эквивалентных диагональным.

2. Используемые вспомогательные результаты

При выводе нашего результата будем использовать теорему о взвешенном числе целых точек $J_h(n, s)$ на поверхности (1) взятых с весом

$$e^{-\frac{1}{n}\omega(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})},$$

где

$$\omega(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \sum_{i=1}^s \left\{ Q_i^{(1)}(x_i, y_i) + Q_i^{(2)}(z_i, t_i) \right\}.$$

ЛЕММА 1. (о взвешенном числе целых точек)

Пусть δ_F — дискриминант мнимого квадратичного поля $F = Q(\sqrt{d})$, где $d < 0$ — бесквадратное число. Тогда

$$J_h(n, s) = 2\pi^{2s} \frac{\Gamma(2s-1) n^{2s-1} e^{-\frac{h}{n}}}{\Gamma^2(s) |\delta_F|^s} \times \\ \times \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4s} \sum_{\substack{l=0, \\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \cdot \prod_{i=1}^s G_i^1(q, l, \overline{O}) G_i^2(q, l, \overline{O}) + O\left(n^{s-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right),$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция; $G_k^i(q, \pm l, \overline{O})$ ($k = 1, 2$) — однородные двойные суммы Гаусса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2].

Наряду с этим будем использовать также тауберову теорему для степенных рядов см. [5]. Заметим, что применение тауберовой теоремы Фрейда [16]

(см. также [5]) для вещественных степенных рядов дает в остатке логарифмическое понижение в формуле для $R(\Omega_p(L), s)$ по параметру L . Следующая тауберова теорема Субханкулова М. А. [6], используемая в [1], позволяет получить в асимптотической формуле для $R(\Omega_p(L), s)$ остаточный член со степенным понижением.

Мы проводим ее в качестве следующего вспомогательного предложения.

ЛЕММА 2. *(комплексный вариант тауберовой теоремы)*

Если справедливо условие

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = A(1-z)^{-\alpha} (1 + O(1-z)^{-\beta}),$$

где $a_k \geq 0$, $A > 0$, $\alpha, \beta > 0$ для всех таких комплексных чисел z , $|z| < 1$, что $|\arg z| \leq \{-\lg |z|\}^{1-\gamma}$, то

$$\sum_{k \leq L} a_k = \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} L^\alpha + O(L^{\alpha-\gamma}) + O(L^{\alpha-\beta}).$$

3. Доказательство основного результата

В качестве приложения теоремы о взвешенном числе целых точек на многомерной гиперболической поверхности (1) получаем следующий основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $Q_i^{(1)}(x_i, y_i)$ и $Q_i^{(2)}(z_i, t_i)$ — положительные целочисленные бинарные квадратичные формы эквивалентные диагональные формы эквивалентные диагональным формам дискриминанта δ_F , равного дискриминанту мнимого квадратичного поля $F = Q(\sqrt{d})$ и $\Omega_p(L)$ — область на поверхности (1), задаваемая неравенством (2).

Тогда

$$R(\Omega_p(L), s) = \frac{2\pi^{2s}\Gamma(2s-1)H(p)e^{-\frac{h}{L}}}{\Gamma(2s)\Gamma^2(s)|\delta_F|^s} L^{2s-1} + O(L^{2s-1-\gamma}),$$

где

$$H(p) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4s} \sum_{\substack{l=0, \\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{lh}{q}} \cdot \prod_{i=1}^s G_i^1(q, l, \overline{O}) G_i^2(q, l, \overline{O})$$

— особый ряд, $\gamma > 0$ — сколь угодно малое число; постоянная, входящая в символ O , зависит только от δ_F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как левые части в (1) и (2) таковы, что они по нашему условию приводятся одним и тем же целочисленным преобразованием переменных к диагональному виду, то по свойству эквивалентных квадратичных форм величина $R(\Omega_p(L), s)$ и параметры h и L не меняются.

Обозначим эквивалентные им диагональные квадратичные формы соответственно через

$$\begin{aligned}\tilde{p}(u_1, \dots, u_{4s}) &= \sum_{k=1}^{4s} a_k u_k^2, \\ \tilde{\omega}(u_1, \dots, u_{4s}) &= \sum_{k=1}^{4s} |a_k| u_k^2.\end{aligned}$$

Тогда условия (1) и (2) соответственно заменяются на $\tilde{p}(u_1, \dots, u_{4s}) = h$ и $\tilde{\omega}(u_1, \dots, u_{4s}) \leq L$ и значит, $R(\Omega_p(L), s) = R(\Omega_{\tilde{p}}(L), s)$.

Полагая теперь $e^{-\frac{1}{n}} = r$ и учитывая, что $r \rightarrow 1$ ($r < 1$), получаем $1 - r \sim \frac{1}{n}$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда, обозначая

$$A = \frac{2\pi^{2s}\Gamma(2s-1)H(p)e^{-\frac{h}{L}}}{\Gamma^2(s)|\delta_F|^s}$$

в силу леммы 1, будем иметь

$$f(r) = J_h(n, s) = \sum_{\tilde{p}(u_1, \dots, u_{4s})=h} r^{\sum_{k=1}^{4s} |a_k| u_k^2} = A(1-r)^{-(2s-1)} + O\left((1-r)^{-s+\frac{1}{4}-\varepsilon}\right).$$

Теперь переобозначая $r = z$

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m = A(1-z)^{-\alpha} + O\left((1-z)^{-\beta}\right),$$

где $\alpha = 2s - 1$, $\beta = s - \frac{1}{4} + \varepsilon$.

Преобразуем $f(z)$ еще следующим образом

$$f(z) = A(1-z)^{-\alpha} \{1 + O((1-z)^{\alpha-\beta})\},$$

Но тогда по тауберовой теореме Субханкулова (лемма 2) получаем

$$R(\Omega_p(L), s) = R(\Omega_{\tilde{p}}(L), s) = \sum_{\substack{\tilde{p}(u_1, \dots, u_{4s})=h, \\ \sum_{k=1}^{4s} |a_k| u_k^2 \leq L}} 1 = \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} L^\alpha + O(L^{\alpha-\gamma}) + O(L^{\alpha-\beta}),$$

где $\gamma > 0$ определяется неравенством $|\arg z| \leq \{-\log |z|\}^{1-\gamma}$ при этом

$$O(L^{\alpha-\beta}) = O\left(L^{s-\frac{3}{4}-\varepsilon}\right), \quad O(L^{\alpha-\gamma}) = O(L^{2s-1-\gamma}).$$

Следовательно,

$$R(\Omega_p(L), s) = \frac{A}{\Gamma(\alpha + 1)} L^{2s-1} + O\left(L^{\max\{2s-1-\gamma, s-\frac{3}{4}-\varepsilon\}}\right).$$

Учитывая еще, что γ и ε — сколь угодно малые положительные числа и, значит

$\max\{2s-1-\gamma, s-\frac{1}{4}+\varepsilon\} = 2s-1-\gamma$ получаем

$$R(\Omega_p(L), s) = \frac{A}{\Gamma(2s)} L^{2s-1} + O(L^{2s-1-\gamma}),$$

ч.т.д. $\square$

4. Заключение

Полученная теорема обобщает результат Де Лури на многомерный случай гиперболических поверхностей рассматриваемого специального вида, а в случае постоянных коэффициентов бинарных квадратичных форм результат А. М. Малышева [1] частично переносим на случай форм, эквивалентных диагональным. Кроме того, наш результат, полученный с помощью комплексной тауберовой теоремы для степенных рядов аналогичен одному результату Дэвенпорта [7] по обобщенной проблеме Варинга при показателе $k = 2$, но при таком значении k наше уравнение гиперболической поверхности имеет несколько более общий вид. Заметим также, что успех в решении рассмотренной задачи обусловлен тем, что квадратичные формы $p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ и $\omega(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ целочисленным унимодулярным преобразованием переменных одновременно приводятся к диагональному виду. А в [1], [3] эти квадратичные формы выбраны диагональными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малышев А. В. О взвешенном количестве целых точек, лежащих на поверхности второго порядка // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1966. Т. 1. С. 6–83.
2. Дохов Р. А., Пачев У. М. О взвешенном числе целых точек на некоторых многомерных гиперболоидах // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3(55). С. 219–245.
3. De Lury D. B. On the representation of number by the indefinite form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ // Univ. of Toronto Studies. math. ser., № 5, 1938, P. 1–17.
4. Estermann T. A. New application of the Hardy-Littlewood-Kloosterman method. Proc. Math. Soc. 1962, 12, № 3, p. 425–444.

5. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Изд-во «Наука». 1971. 416 с.
6. Субханкулов М. А. Некоторые общие тауберовы теоремы с остаточным членом // Тр. Матем. инст. АН СССР. 1961. Т. 64. С. 239–266.
7. Davenport H. Analitic Methods for Diophantine Equations and Diophantine Inequalities. 2004. 135 p.
8. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды Математического ин-та АН СССР. Т. 65 (1962). 212 с.
9. Голубева Е. П. Асимптотика числа целых точек на некоторых эллипсоидах // Мат. заметки. 1972. Т. 11, № 6. С. 625–634.
10. Мякишев В. П. Распределение примитивных целых точек на некоторых конусах // ДАН СССР. 1962. Т. 143. С. 785–786.
11. Виноградов А. И. О продолжимости в левую полуплоскость скалярного произведения L -рядов Гекке с характеристиками величины // Изв. АН СССР, сер. матем. 1965/ Т. 29. С. 485–492.
12. Мороз Б. З. Распределение целых точек на многомерных гиперболоидах и конусах // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1966/ Т. 1. С. 84–113.
13. Головизин В. В. О распределении целых точек на гиперболических поверхностях второго порядка // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 106. С. 52–69.
14. Ingham A. E. Some asymptotic formulae in the theory of numbers // J. London. Math. Soc. 1927. Vol. 2 (7). P. 202–208.
15. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об аддитивной проблеме делителей Ингама // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2006. № 5. С. 32–35.
16. Freud G. Restglied eines Tauberscher Satzes // J. Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae 2. 1951. № 3–4. P. 299–308.

REFERENCES

1. Malyshev, A. V. 1966, "The weighted number of integer points lying on a surface of the second order.", *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, vol. 1, pp. 6–83. (Russian)

2. Dokhov, R. A. & Pachev, U. M. 2015, "On the weighted number of integer points on some multidimensional hyperboloids", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 3(55), pp. 219–245. (Russian)
3. De Lury, D. B. 1938, "On the representation of number by the indefinite form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$." *Univ. of Toronto Studies. math. ser.*, vol. 5, pp. 1–17.
4. Estermann, T. A. 1962, "New application of the Hardy-Littlewood-Kloosterman method", *Proc. Math. Soc.*, vol. 12, no. 3, pp. 425–444.
5. Postnikov, A. G. 1971, "Vvedenie v analiticheskuyu teoriyu chisel." [Introduction to analytic number theory] *Izdat. "Nauka", Moscow*, 416 pp. (Russian)
6. Subhankulov, M. A. 1961, "Some general Tauberian theorems with remainder term." *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 64, pp. 239–266. (Russian)
7. Davenport, H. 2004, "Analytic Methods for Diophantine Equations and Diophantine Inequalities", 135 p.
8. Malyshev, A. V. 1962, "On the representation of integers by positive quadratic forms", *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 65, 212 p. (Russian)
9. Golubeva, E. P. 1972, "Asymptotic number of points on certain ellipsoids", *Mat. Zametki*, vol. 11, no. 6, pp. 625–634. (Russian)
10. Myakishev, V. P. 1962, "Distribution of primitive integral points on certain cones", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 143, pp. 785–786. (Russian)
11. Vinogradov, A. I. 1965, "On the continuability into the left half-plane of the scalar product of Hecke L -series with Grossencharaktere", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 29, pp. 485–492. (Russian)
12. Moroz, B. Z. 1966, "Distribution of integer points on multidimensional hyperboloids and cones", *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, vol. 1, pp. 84–113. (Russian)
13. Golovizin, V. V. 1981, "On the distribution of integer points on hyperbolic surfaces of the second order", *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, vol. 106, pp. 52–69. (Russian)
14. Ingham, A. E. 1927, "Some asymptotic formulae in the theory of numbers", *J. London. Math. Soc.*, vol. 2 (7), pp. 202–208.
15. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N. 2006, "On the Ingham additive divisor problem", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, no. 5, pp. 32–35. (Russian)
16. Freud G. 1951, "Restglied eines Tauberscher Satzes", *J. Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae*, vol. 2, no. 3–4, pp. 299–308.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
Получено 29.07.2015