ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 3 (2015)

УДК 511.3

О МИНИМАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНАХ ОСТАТОЧНЫХ ДРОБЕЙ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ[1]

Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский (г. Тула)
dobrovol@tspu.tula.ru

Аннотация

В работе изучается вид и свойства минимальных многочленов остаточных дробей в разложении алгебраических чисел в цепные дроби.

Показано, что для чисто-вещественных алгебраических иррациональностей α степени $n \geqslant 2$, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, последовательность остаточных дробей α_m является последовательностью приведённых алгебраических иррациональностей.

Дано определение обобщённого числа Пизо, которое отличается от определения чисел Пизо отсутствием требования целочисленности.

Показано, что для произвольной вещественной алгебраической иррациональности α степени $n \geqslant 2$, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, последовательность остаточных дробей α_m является последовательностью обобщённых чисел Пизо.

Найдена асимптотическая формула для сопряжённых чисел к остаточным дробям обобщённых чисел Пизо. Из этой формулы вытекает, что сопряжённые к остаточной дроби α_m концентрируются около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ либо в интервале радиуса $O\left(\frac{1}{Q_{m-1}^2}\right)$ в случае чисто-вещественной алгебраической иррациональности, либо в круге такого же радиуса в общем случае вещественной алгебраической иррациональности, имеющей комплексные сопряжённые числа.

Установлено, что, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, справедлива рекуррентная формула для неполных частных q_m разложения вещественной алгебраической иррациональности α, выражающая q_m через значения минимального многочлена $f_{m-1}(x)$ для остаточной дроби α_{m-1} и его производной в точке q_{m-1}.

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

Найдены рекуррентные формулы для нахождения минимальных многочленов остаточных дробей с помощью дробно-линейных преобразований. Композиция этих дробно-линейных преобразований является дробно-линейным преобразование, переводящем систему сопряжённых к алгебраической иррациональности α в систему сопряжённых к остаточной дроби, обладающую ярко выраженным эффектом концентрации около рациональной дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

Установлено, что последовательность минимальных многочленов для остаточных дробей образует последовательность многочленов с равными дискриминантами.

В заключении поставлена проблема о структуре рационального сопряжённого спектра вещественного алгебраического иррационального числа α и о его предельных точках.

Ключевые слова: минимальный многочлен, приведённая алгебраическая иррациональность, обобщенное число Пизо, остаточные дроби, цепные дроби.

Библиография: 20 названий.

ABOUT MINIMAL POLYNOMIAL RESIDUAL FRACTIONS FOR ALGEBRAIC IRRATIONALITIES

N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii (Tula)

Abstract

We study the appearance and properties of minimal residual fractions of polynomials in the decomposition of algebraic numbers into continued fractions.

It is shown that for purely real algebraic irrationalities α of degree $n \geqslant 2$, starting from some number $m_0 = m_0(\alpha)$, the sequence of residual fractions α_m is a sequence of given algebraic irrationalities.

The definition of the generalized number of Piso, which differs from the definition of numbers he's also the lack of any requirement of integrality.

It is shown that for arbitrary real algebraic irrationals α of degree $n \geqslant 2$, starting from some number $m_0 = m_0(\alpha)$, the sequence of residual fractions α_m is a sequence of generalized numbers Piso.

Found an asymptotic formula for the conjugate number to the residual fractions of generalized numbers Piso. From this formula it follows that associated to the residual fraction α_m are concentrated about fractions $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ is either in the interval of radius $O\left(\frac{1}{Q_{m-1}^2}\right)$ in the case of purely real algebraic irrationals, or in circles with the same radius in the General case of real algebraic irrationals, which have complex conjugate of a number.

It is established that, starting from some number $m_0 = m_0(\alpha)$, fair recurrent formula for incomplete private q_m expansions of real algebraic irrationals α, Express q_m using the values of the minimal polynomial $f_{m-1}(x)$ for residual fractions α_{m-1} and its derivative at the point q_{m-1}.

Found recursive formula for finding the minimal polynomials of the residual fractions using fractional-linear transformations. Composition this fractional-linear transformation is a fractional-linear transformation that takes the system conjugate to an algebraic irrationality of α in the system of associated to the residual fraction, with a pronounced effect of concentration about rational fraction $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

It is established that the sequence of minimal polynomials for the residual fractions is a sequence of polynomials with equal discriminantly.

In conclusion, the problem of the rational structure of a conjugate of the spectrum of a real algebraic irrational number α and its limit points.

Keywords: minimal polynomial, given an algebraic irrationality, generalized number Piso, residual fractions, continued fractions.

Bibliography: 20 titles.

1. Введение

Как хорошо известно, для любого вещественного иррационального[2] α имеет место единственное разложение в бесконечную непрерывную дробь

$$\alpha=\alpha_0=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_k+\cfrac{1}{\ddots}}}}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_k+\cfrac{1}{\alpha_{k+1}}}}},\tag{1}$$

где неполные частные q_k и остаточные дроби α_k однозначно определяются из условий

$$q_k=[\alpha_k], k\geqslant 0;\quad \alpha_k=\frac{1}{\alpha_{k-1}-q_{k-1}}, k\geqslant 1.$$

Как обычно, через P_k и Q_k будем обозначать числитель и знаменатель k-ой подходящей дроби $\frac{P_k}{Q_k}$ к числу α. Эти числа связаны хорошо известными рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} P_k= & q_kP_{k-1}+P_{k-2}\\ Q_k= & q_kQ_{k-1}+Q_{k-2}\end{cases},$$

которые остаются верными при $k\geqslant 0$, если принять обычное соглашение, что $P_{-1}=1$, $P_{-2}=0$ и $Q_{-1}=0$, $Q_{-2}=1$.

Аналогичные формулы справедливы для числа α и его остаточных дробей:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha= &\ \frac{\alpha_{k+1}P_k+P_{k-1}}{\alpha_{k+1}Q_k+Q_{k-1}},\\ \alpha_{k+1}= &\ \frac{\alpha Q_{k-1}-P_{k-1}}{P_k-\alpha Q_k},\end{aligned}\right.\quad k\geqslant -1.\tag{2}$$

Благодаря известному равенству

$$P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^{k-1}\quad (k\geqslant -1),$$

которое легко доказывается по индукции, соотношения между числом α и его остаточными дробями можно переписать в виде

$$\left\{\begin{aligned} \alpha= &\ \frac{P_k}{Q_k}+\frac{(-1)^k}{Q_k(\alpha_{k+1}Q_k+Q_{k-1})},\\ \alpha_{k+1}= &\ -\frac{Q_{k-1}}{Q_k}+\frac{(-1)^{k-1}}{Q_k(P_k-\alpha Q_k)}=-\frac{Q_{k-1}}{Q_k}+\frac{1}{Q_k|P_k-\alpha Q_k|},\end{aligned}\right.\quad (k\geqslant 0).$$

[2]На протяжении всей работы через α обозначается только вещественное иррациональное число.

О разложение алгебраических иррациональностей степени $n > 2$ в цепные дроби известно очень мало. Это один из труднейших вопросов современной теории чисел. В работах [1] — [10], [12] — [14] представлены различные аспекты этой теории.

Наиболее развита теория цепных дробей квадратических иррациональностей. В последнее время обнаруживаются новые интересные факты касающиеся этих дробей (см. [11, 16]).

Отметим, что в работе [19] даётся описание множества приведённых алгебраических иррациональностей n-ой степени и установлено, что это множество обладает свойством рациональной выпуклости. По-видимому, аналогичным свойством обладают и обобщенные числа Пизо.

Целью данной работы является изучение свойств минимальных многочленов остаточных дробей, которые возникают в процессе работы алгоритма Лагранжа для алгебраических иррациональностей n-ой степени. Нас будут интересовать как приведённые алгебраические иррациональности, так и общий случай обобщенных чисел Пизо.

Отметим, что случай приведённых алгебраических иррациональностей n-ой степени имеет тесную связь с квадратурными формулами с весами в методе К. К. Фролова (см. [6]—[8], [17], [18]). Дело в том, что приведённые иррациональности пораждают чисто-вещественные алгебраические поля n-ой степени. Если рассмотреть решётку подобную решётке целых сопряжённых алгебраических чисел из чисто-вещественного алгебраического поля, то точки взаимной решётки, попавших в единичный n-мерный куб, будут образовывать алгебраическую сетку. Именно эти сетки и используются в методе Фролова, решая проблему построения квадратурных формул, дающих правильный порядок убывания нормы линейного функционала погрешности приближённого интегрирования на классе E_s^α периодических функций с быстро убывающими коэффициентами Фурье.

2. Необходимые определения и факты

Прежде всего напомним определения приведённой алгебраической иррациональности n-ой степени и обобщенного числа Пизо n-ой степени. Здесь мы следуем работам [9], [10], [19].

Определение 1. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0$$

— произвольный целочисленный неприводимый многочлен[3]*, у которого все корни* $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *— различные вещественные числа, удовлетворяющие*

[3] В частности, неприводимость многочлена означает, что $(a_0, \ldots, a_n) = 1$.

условию

$$-1 < \alpha^{(n)} < \ldots < \alpha^{(2)} < 0, \quad \alpha^{(1)} > 1,$$

тогда алгебраическое число $\alpha = \alpha^{(1)}$ называется приведённой алгебраической иррациональностью степени n.

Определение 2. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0$$

— произвольный целочисленный неприводимый многочлен, у которого корни $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условию

$$|\alpha^{(j)}| < 1,\ (2 \leqslant j \leqslant n), \quad \alpha^{(1)} > 1,$$

тогда алгебраическое число $\alpha = \alpha^{(1)}$ называется обобщенным числом Пизо степени n.

Нетрудно видеть, что если $\alpha = \alpha^{(1)}$ — приведённая алгебраическая иррациональность, то все n алгебраически сопряжённых полей $\mathbb{Q}[\alpha^{(1)}]$, ..., $\mathbb{Q}[\alpha^{(n)}]$ являются вещественными. При этом число α будет обобщенным числом Пизо, но не всякое обобщенное число Пизо будет приведённой алгебраической иррациональностью. Действительно, число $\beta = \beta^{(1)} = \left(\alpha^{(1)}\right)^2$ является обобщенным числом Пизо, так как $0 < \beta^{(j)} = \left(\alpha^{(j)}\right)^2 < 1$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$, но не является приведённой алгебраической иррациональностью.

Данное выше определение обобщенного числа Пизо отличается от определения числа Пизо тем, что не требуется, чтобы число было целым алгебраическим.

Заметим, что для минимального многочлена $f(x)$, задающего приведённую алгебраическую иррациональность α степени n, всегда выполнено неравенство

$$a_0 < 0, \tag{3}$$

так как на промежутке $[0; \infty)$ имеется только один корень α, при $x > \alpha$ имеем $f(x) > 0$, поэтому $f(0) < 0$. Кроме того выполняются неравенства

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = f(1) < 0, \tag{4}$$

$$a_n - a_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^n a_0 = (-1)^n f(-1) > 0. \tag{5}$$

Для обобщенного числа Пизо можно утверждать только выполнение неравенств (4) и (5). Действительно, неравенство (4) вытекает из того факта, что на промежутке $[1; +\infty)$ минимальный многочлен $f(x)$ со старшим коэффициентом $a_n > 0$ имеет ровно один корень. А неравенство (5) связано с отсутствием корней на промежутке $(-\infty; -1]$. Кроме этого можно утверждать, что для любого обобщенного числа Пизо α найдется натуральное $q_0 = [\alpha]$ и для него справедливы неравенства $f_0(q_0) < 0$, $f_0(q_0 + 1) > 0$.

Лемма 1. *Для произвольной вещественной алгебраической иррациональности α степени n её остаточная дробь α_1 также является вещественной алгебраической иррациональностью степени n, удовлетворяющей неприводимому многочлену*

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,1}x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,1} > 0,$$

где

$$a_{k,1} = \frac{b_k}{d_0},\ d_0 = (b_0, \ldots, b_n),\ b_k = -\sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n},\ (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Справедливо равенство

$$f_1(x) = \frac{-f_0(q_0)}{d_0} \prod_{j=1}^{n} \left(x - \frac{1}{\alpha^{(j)} - q_0} \right).$$

Доказательство. См. [9].

Из этой леммы по индукции доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Для произвольной вещественной алгебраической иррациональности α степени n все её остаточные дроби α_m также являются вещественными алгебраическими иррациональностями степени n, удовлетворяющими неприводимым многочленам*

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,m}x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,m} > 0,$$

где

$$a_{k,m} = \frac{b_{k,m}}{d_m}, \quad d_m = (b_{0,m}, \ldots, b_{n,m}),$$
$$b_{k,m} = -\sum_{l=n-k}^{n} a_{l,m-1} C_l^{l+k-n} q_{m-1}^{l+k-n}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Многочлены $f_m(x)$ имеют корни

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)} Q_{m-2} - P_{m-2}}{P_{m-1} - \alpha^{(j)} Q_{m-1}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{6}$$

Справедливы равенства

$$f_m(x) = \frac{-f_{m-1}(q_{m-1})}{d_{m-1}} \prod_{j=1}^{n} \left(x - \alpha_m^{(j)} \right).$$

Доказательство. См. [9].

Нетрудно видеть, что если $\alpha = \alpha_0 = \alpha^{(1)}$ — обобщенное число Пизо, то остаточная дробь α_1, где

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - q_0}, \quad q_0 = [\alpha_0],$$

не обязана быть обобщенным числом Пизо.

Действительно, если $q_0 = 1$ и найдется такое ν, что $|\alpha^{(\nu)} - q_0| < 1$, то для сопряжённого числа $\alpha_1^{(\nu)} = \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0}$ к остаточной дроби α_1 не выполняется неравенство $|\alpha_1^{(\nu)}| < 1$. Поэтому дадим следующее определение.

Определение 3. *Обобщенное число Пизо $\alpha = \alpha^{(1)}$ называется приведённым обобщенным числом Пизо, если выполнены дополнительные условия: для натурального числа $q_0 = \left[\alpha^{(1)}\right]$ справедливы неравенства*

$$|\alpha^{(j)} - q_0| > 1, \ (2 \leqslant j \leqslant n).$$

Лемма 2. *Для произвольного приведённого обобщенного числа Пизо α степени n его остаточная дробь α_1 также является приведённым обобщенным числом Пизо степени n, удовлетворяющим неприводимому многочлену*

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,1} x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,1} > 0,$$

где

$$a_{k,1} = \frac{b_k}{d_0}, \ d_0 = (b_0, \ldots, b_n), \ b_k = -\sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n}, \ (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Справедливо равенство

$$f_1(x) = \frac{-f_0(q_0)}{d_0} \prod_{j=1}^{n} \left(x - \frac{1}{\alpha^{(j)} - q_0} \right).$$

Доказательство. Действительно, сопряжёнными числами к остаточной дроби $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - q_0}$ являются числа $\alpha_1^{(\nu)} = \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0}$, для которых в силу определения 3 имеем: $|\alpha_1^{(\nu)}| < 1$ $(2 \leqslant \nu \leqslant n)$, поэтому остаточная дробь α_1 является обобщённым числом Пизо.

Теперь необходимо доказать, что α_1 является приведённым обобщённым числом Пизо. Для этого рассмотрим три возможных случая.

I. Пусть $q_0 > 1$, тогда $\alpha^{(\nu)} - q_0 = -x_\nu + y_\nu i$, $x_\nu > q_0 - 1 \geqslant 1$,

$$\alpha_1^{(\nu)} = \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0} = \frac{-x_\nu - y_\nu i}{x_\nu^2 + y_\nu^2}.$$

Поэтому $\alpha_1^{(\nu)}$ находится в левой полуплоскости, ограниченной мнимой прямой. Отсюда следует, что при $q_1 = [\alpha_1]$ имеем

$$\left|\alpha_1^{(\nu)} - q_1\right| > 1 \quad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Следовательно, в этом случае α_1 — приведённое обобщённое число Пизо.

II. Пусть $q_0 = 1$, $\alpha^{(\nu)} = -x_\nu + y_\nu i$, $x_\nu > 0$, $x_\nu^2 + y_\nu^2 < 1$, тогда

$$\alpha_1^{(\nu)} = \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0} = \frac{-x_\nu - 1 - y_\nu i}{(x_\nu + 1)^2 + y_\nu^2}, \quad \left|\alpha_1^{(\nu)}\right| < 1$$

и $\alpha_1^{(\nu)}$ находится в левой полуплоскости, ограниченной мнимой прямой. Отсюда следует, что при $q_1 = [\alpha_1]$ имеем

$$\left|\alpha_1^{(\nu)} - q_1\right| > 1 \quad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Следовательно, в этом случае α_1 — приведённое обобщённое число Пизо.

III. Пусть $q_0 = 1$, и найдется ν такое, что $\alpha^{(\nu)} = x_\nu + y_\nu i$, $x_\nu > 0$, $x_\nu^2 + y_\nu^2 < 1$, тогда по условию $(1 - x_\nu)^2 + y_\nu^2 > 1$. Имеем

$$\alpha_1^{(\nu)} = \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0} = \frac{x_\nu - 1 - y_\nu i}{(x_\nu - 1)^2 + y_\nu^2}, \quad \left|\alpha_1^{(\nu)}\right| < 1$$

и $\alpha_1^{(\nu)}$ находится в левой полуплоскости, ограниченной мнимой прямой. Отсюда следует, что при $q_1 = [\alpha_1]$ имеем

$$\left|\alpha_1^{(\nu)} - q_1\right| > 1 \quad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Следовательно, и в этом последнем случае α_1 — приведённое обобщённое число Пизо.

Рассмотрим многочлен $g(x) = -x^n f_0\left(q_0 + \frac{1}{x}\right)$. Так как

$$g(x) = -x^n a_n \prod_{\nu=1}^{n}\left(q_0 + \frac{1}{x} - \alpha^{(\nu)}\right) = -a_n \prod_{\nu=1}^{n}(q_0 - \alpha^{(\nu)}) \prod_{\nu=1}^{n}\left(x - \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0}\right) =$$
$$= -f_0(q_0) \prod_{\nu=1}^{n}\left(x - \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q_0}\right),$$

то его корни суть остаточная дробь α_1 и её алгебраически сопряжённые числа $\alpha_1^{(\nu)}$ $(2 \leqslant \nu \leqslant n)$.

По формуле Тейлора

$$f_0\left(q_0 + \frac{1}{x}\right) = f_0(q_0) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f_0^{(\nu)}(q_0)}{\nu!} \frac{1}{x^\nu},$$

поэтому

$$g(x) = -f_0(q_0)x^n - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f_0^{(\nu)}(q_0)}{\nu!} x^{n-\nu} \in \mathbb{Z}[x].$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Замечание 1. *Как будет показано дальше, всегда $d_0 = 1$, поэтому*

$$f_1(x) = -f_0(q_0)x^n - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f_0^{(\nu)}(q_0)}{\nu!} x^{n-\nu} \in \mathbb{Z}[x].$$

3. Дробно-линейные преобразования многочленов

Обозначим через $\mathbb{P}_n[x]$ множество всех целочисленных многочленов $f(x) \in \in \mathbb{Z}[x]$ степени не выше n, а через $\mathbb{P}_n^*[x]$ — степени n . Таким образом, если $f(x) \in \mathbb{P}_n^*[x]$, то

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_j \in \mathbb{Z} \quad (0 \leqslant j \leqslant n).$$

Обозначим через $\mathcal{M}_2^*$ группу унимодулярных целочисленных матриц с определителем ± 1. Таким образом, матрица

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^*$$

если A, B, C, $D \in \mathbb{Z}$ и $\det M = AD - BC = \pm 1$.

Определение 4. *Для произвольной унимодулярной матрицы $M \in \mathcal{M}_2^*$ дробно-линейным преобразованием M многочленов $f(x) \in \mathbb{P}_n[x]$ назовем преобразование, заданное формулой*

$$M(f(x)) = (Cx + D)^n f\left(\frac{Ax + B}{Cx + D}\right).$$

Очевидно, что единичная матрица E задает тождественное преобразование: $E(f(x)) = f(x)$.

Лемма 3. *Любое дробно-линейное преобразование с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*$ переводит $\mathbb{P}_n[x]$ в себя.*

Доказательство. Действительно, если $f(x) \in \mathbb{P}_n[x]$, то

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z} \quad (0 \leqslant j \leqslant n).$$

По определению имеем:

$$M(f(x)) = (Cx+D)^n \sum_{\nu=0}^{n} a_n \left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right)^{\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} a_n (Ax+B)^{\nu}(Cx+D)^{n-\nu} \in \mathbb{P}_n[x]$$

и лемма доказана. □

Обозначим согласно Г. Вейлю [5] через $Ct(f)$ содержание многочлена $f(x)$. Таким образом, $Ct(f) = (a_0, \ldots, a_n)$.

Лемма 4. *Для любого дробно-линейного преобразования с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*$ справедливо равенство*

$$Ct(f) = Ct(M(f)).$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

и

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu, \quad M(f(x)) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu, \quad a_\nu, b_\nu \in \mathbb{Z} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant n),$$

тогда коэффициенты a_ν и b_ν связаны равенствами

$$M(f(x)) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (Ax+B)^\nu (Cx+D)^{n-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} C_\nu^\mu A^\mu B^{\nu-\mu} x^\mu \sum_{\lambda=0}^{n-\nu} C_{n-\nu}^{\lambda} C^\lambda D^{n-\nu-\lambda} x^\lambda =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sum_{\lambda=0}^{n} x^\lambda \sum_{\mu=\max(0,\lambda+\nu-n)}^{\min(\nu,\lambda)} C_\nu^\mu C_{n-\nu}^{\lambda-\mu} A^\mu B^{\nu-\mu} C^{\lambda-\mu} D^{n+\mu-\nu-\lambda};$$

$$b_\lambda = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sum_{\mu=\max(0,\lambda+\nu-n)}^{\min(\nu,\lambda)} C_\nu^\mu C_{n-\nu}^{\lambda-\mu} A^\mu B^{\nu-\mu} C^{\lambda-\mu} D^{n+\mu-\nu-\lambda};$$

$$a_\lambda = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \sum_{\mu=\max(0,\lambda+\nu-n)}^{\min(\nu,\lambda)} C_\nu^\mu C_{n-\nu}^{\lambda-\mu} A_1^\mu B_1^{\nu-\mu} C_1^{\lambda-\mu} D_1^{n+\mu-\nu-\lambda}.$$

Отсюда следует, что $Ct(f)|Ct(M(f))$ и $Ct(M(f))|Ct(f)$, а поэтому

$$Ct(f) = Ct(M(f))$$

и лемма доказана. □

Лемма 5. *Для любых многочленов $f(x)$, $g(x)$ и произвольного дробно-линейного преобразования с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*$ справедливо равенство*

$$M(f(x)g(x)) = M(f(x))M(g(x)).$$

Образ любого неприводимого многочлена $f(x)$ при дробно-линейном преобразовании с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*$ является неприводимым многочленом.

Доказательство. Действительно, если $degre(f(x)) = k$, $degre(g(x)) = l$ и $n = k + l$, то

$$M(f(x)g(x)) = (Cx+D)^n f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right) g\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right) =$$

$$= \left((Cx+D)^k f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right)\right)\left((Cx+D)^l g\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right)\right) = M(f(x))M(g(x)).$$

Так как по доказаному дробно-линейное преобразование переводит произведение в произведение, то дробно-линейное преобразование с унимодулярной матрицей, имеющее обратное преобразование, переводит примитивный многочлен в примитивный, неприводимый многочлен в неприводимый. □

Лемма 6. *Для любого дробно-линейного преобразования с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*$ и многочлена $f(x)$ с корнями $\alpha^{(\nu)}$ $(A \neq C\alpha^{(\nu)} \neq -D, \quad \nu = 1, \ldots, n)$ многочлен*

$$M(f(x)) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu$$

имеет корни

$$\beta^{(\nu)} = \frac{D\alpha^{(\nu)} - B}{A - C\alpha^{(\nu)}} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n), \quad b_n = C^n f\left(\frac{A}{C}\right), b_0 = D^n f\left(\frac{B}{D}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Действительно, если

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = a_n \prod_{\nu=1}^{n}(x - \alpha^{(\nu)}),$$

то

$$M(f(x)) = (Cx+D)^n a_n \prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{Ax+B}{Cx+D} - \alpha^{(\nu)}\right) =$$

$$= a_n \prod_{\nu=1}^{n}\left(Ax + B - C\alpha^{(\nu)}x - D\alpha^{(\nu)}\right) =$$

$$= a_n \prod_{\nu=1}^{n}\left(A - C\alpha^{(\nu)}\right)\prod_{\nu=1}^{n}\left(x - \frac{D\alpha^{(\nu)} - B}{A - C\alpha^{(\nu)}}\right) =$$

$$= a_n C^n \prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{A}{C} - \alpha^{(\nu)}\right)\prod_{\nu=1}^{n}(x - \beta^{(\nu)}) = C^n f\left(\frac{A}{C}\right)\prod_{\nu=1}^{n}(x - \beta^{(\nu)}).$$

Отсюда следует утверждение леммы, так как $b_0 = M(f(0)) = D^n f\left(\frac{B}{D}\right)$. $\square$

Из доказанной леммы вытекает, что корни многочлена $f(x)$ преобразуются в корни многочлена $M(f(x))$ под действием дробно-линейного преобразования комплексной плоскости
$$M^*(z) = \frac{Dz - B}{-Cz + A}$$
с матрицей
$$M^* = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}.$$

Лемма 7. *Для композиции $\circ$ дробно-линейных преобразований справедливо равенство*
$$M_1 \circ M = M \cdot M_1,$$
где $\cdot$ — матричное умножение, при этом корни многочленов преобразуются по закону
$$(M_1 \circ M)^* = M_1^* \cdot M^*.$$

Доказательство. Действительно, пусть
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$
и $g(x) = M(f(x))$, тогда
$$M_1 \circ M(f(x)) = (C_1x + D_1)^n g\left(\frac{A_1x + B_1}{C_1x + D_1}\right) =$$
$$= (C_1x + D_1)^n \left(C\frac{A_1x + B_1}{C_1x + D_1} + D\right)^n f\left(\frac{A\frac{A_1x+B_1}{C_1x+D_1} + B}{C\frac{A_1x+B_1}{C_1x+D_1} + D}\right) =$$
$$= ((CA_1 + DC_1)x + (CB_1 + DD_1))^n \cdot$$
$$\cdot f\left(\frac{(AA_1 + BC_1)x + (AB_1 + BD_1)}{(CA_1 + DC_1)x + (CB_1 + DD_1)}\right) = M_2(f(x)),$$
где
$$M_2 = \begin{pmatrix} AA_1 + BC_1 & AB_1 + BD_1 \\ CA_1 + DC_1 & CB_1 + DD_1 \end{pmatrix} = M \cdot M_1$$
и первое утверждение леммы установлено.

Пусть $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$ — корни многочлена $f(x)$, $\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n)}$ — $M(f(x))$ и $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$ — $(M_1 \circ M)(f(x))$, тогда
$$\beta^{(\nu)} = M^*\left(\alpha^{(\nu)}\right) = \frac{D\alpha^{(\nu)} - B}{-C\alpha^{(\nu)} + A}, \quad \gamma^{(\nu)} = M_1^*\left(\beta^{(\nu)}\right) = \frac{D_1\beta^{(\nu)} - B_1}{-C_1\beta^{(\nu)} + A_1} =$$
$$= \frac{D_1\frac{D\alpha^{(\nu)}-B}{-C\alpha^{(\nu)}+A} - B_1}{-C_1\frac{D\alpha^{(\nu)}-B}{-C\alpha^{(\nu)}+A} + A_1} = \frac{D_1(D\alpha^{(\nu)} - B) - B_1(-C\alpha^{(\nu)} + A)}{-C_1(D\alpha^{(\nu)} - B) + A_1(-C\alpha^{(\nu)} + A)} =$$
$$= \frac{(D_1D + B_1C)\alpha^{(\nu)} - (D_1B + B_1A)}{-(C_1D + A_1C)\alpha^{(\nu)} + (C_1B + A_1A)} = M_2^*\left(\alpha^{(\nu)}\right),$$

где

$$M_2^* = \begin{pmatrix} CB_1 + DD_1 & -(AB_1 + BD_1) \\ -(CA_1 + DC_1) & AA_1 + BC_1 \end{pmatrix} = M_1^* \cdot M^*,$$

и лемма полностью доказана. □

Напомним определение дискримнанта $D(f)$ многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

имеющего корни $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$. Согласно определению

$$D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{\nu<\mu} \left(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)}\right)^2.$$

Рассмотрим многочлен

$$g(x) = x^n f\left(q + \frac{1}{x}\right)$$

и поставим задачу вычислить дискриминант $D(g)$ этого многочлена.

Лемма 8. *При $a_0 \neq 0$ и $q \neq \alpha^{(\nu)}$ $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$ справедливо равенство*

$$D(g) = D(f).$$

Доказательство. Действительно, так как $a_0 \neq 0$, то все $\alpha^{(\nu)} \neq 0$ $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$ и многочлен $g(x)$ имеет корни

$$\beta^{(\nu)} = \frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n).$$

Воспользуемся формулой Тейлора для многочлена $f(x)$ в точке $x = q$:

$$f(x) = f(q) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f^{(\nu)}(q)}{\nu!}(x-q)^\nu.$$

Получим

$$g(x) = f(q)x^n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f^{(\nu)}(q)}{\nu!} x^{n-\nu}.$$

Отсюда следует, что

$$D(g) = (f(q))^{2n-2} \prod_{\nu<\mu} (\beta^{(\nu)} - \beta^{(\mu)})^2 =$$

$$= (f(q))^{2n-2} \prod_{\nu<\mu} \left(\frac{1}{\alpha^{(\nu)} - q} - \frac{1}{\alpha^{(\mu)} - q} \right)^2 =$$

$$= \left(a_n \prod_{\nu=1}^{n} (q - \alpha^{(\nu)}) \right)^{2n-2} \frac{\prod\limits_{\nu<\mu} (\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)})^2}{\prod\limits_{\nu<\mu} (q - \alpha^{(\nu)})^2 (q - \alpha^{(\mu)})^2} =$$

$$= D(f) \frac{\left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} (q - \alpha^{(\nu)}) \right)^{2n-2}}{\left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} (q - \alpha^{(\nu)}) \right)^{2n-2}} = D(f)$$

и лемма доказана. □

Справедливо более сильное утверждение.

Теорема 2. *Для любого дробно-линейного преобразования с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*$ и многочлена $f(x)$ с корнями $\alpha^{(\nu)}$ $(A \neq C\alpha^{(\nu)} \neq -D, \quad \nu = 1, \dots, n)$ и многочлена $M(f(x))$ справедливо равенство дискриминантов*

$$D(f) = D(M(f)).$$

Доказательство. Действительно, по лемме 6 имеем:

$$D(M(f)) = \left(C^n f\left(\frac{A}{C} \right) \right)^{2n-2} \prod_{\nu<\mu} \left(\beta^{(\nu)} - \beta^{(\mu)} \right)^2 =$$

$$= a_n^{2n-2} \left(\prod_{\nu=1}^{n} (A - C\alpha^{(\nu)}) \right)^{2n-2} \prod_{\nu<\mu} \left(\frac{D\alpha^{(\nu)} - B}{A - C\alpha^{(\nu)}} - \frac{D\alpha^{(\mu)} - B}{A - C\alpha^{(\mu)}} \right)^2 =$$

$$= a_n^{2n-2} \frac{\left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} (A - C\alpha^{(\nu)}) \right)^{2n-2}}{\left(\prod\limits_{\nu=1}^{n} (A - C\alpha^{(\nu)}) \right)^{2n-2}} \prod_{\nu<\mu} \left((DA - BC)(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\nu)}) \right)^2 = D(f)$$

и теорема доказана. □

4. Поведение остаточных дробей и их сопряжённых чисел

Введем следующие обозначения

$$\delta(\alpha) = \min_{2 \leqslant j \leqslant n} \left| \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)} \right| > 0,$$

так как все корни различные.

Для $m \geqslant 1$ величины θ_{m-1} $(0 < \theta_{m-1} < 1)$ определяются из равенства

$$\alpha = \alpha^{(1)} = \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^{m-1}\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\theta_{m-1} = \frac{Q_m}{\alpha_m Q_{m-1} + Q_{m-2}}.$$

Остаточная дробь $\alpha_m = \alpha_m^{(1)}$ имеет разложение

$$\alpha_m = \alpha_m^{(1)} = q_m + \cfrac{1}{q_{m+1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\ddots}}}} > 1 \quad (m \geqslant 1).$$

Теорема 3. *Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена*

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\ldots$, $\alpha^{(n)}$ *— его корни, и число α имеет разложение в цепную дробь*

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Пусть последовательность многочленов $f_m(x)$ $(m \geqslant 1)$ определена рекуррентными соотношениями

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,m}x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,m} > 0,$$
$$\varepsilon_m = \operatorname{sign}(f_{m-1}(q_{m-1})),$$
$$a_{k,m} = \varepsilon_m \sum_{\nu=n-k}^{n} a_{\nu,m-1}C_\nu^{\nu+k-n} q_{m-1}^{\nu+k-n} = \varepsilon_m \frac{f_{m-1}^{(n-k)}(q_{m-1})}{(n-k)!} \quad (0 \leqslant k \leqslant n). \qquad (7)$$

Многочлены $f_m(x)$ имеют корни

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)}Q_{m-2} - P_{m-2}}{P_{m-1} - \alpha^{(j)}Q_{m-1}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \qquad (8)$$

Справедливы равенства

$$f_m(x) = \varepsilon_m f_{m-1}(q_{m-1}) \prod_{j=1}^{n} \left(x - \alpha_m^{(j)}\right). \tag{9}$$

Существует номер $m_0 = m_0(\alpha)$ такой, что для любого $m \geqslant m_0$ остаточная дробь $\alpha_m = \alpha_m^{(1)}$ является приведённым обобщённым числом Пизо и выполнены соотношения

$$\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} = \cfrac{1}{q_{m-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1}}}}, \tag{10}$$

$$\alpha_m^{(j)} = -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1}^2\left(\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)} \quad (2 \leqslant j \leqslant n). \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность многочленов

$$f_m(x) = \varepsilon_m x^n f_{m-1}\left(q_{m-1} + \frac{1}{x}\right) \quad (m \geqslant 1).$$

По формуле Тейлора имеем:

$$f_{m-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu!}(x - q_{m-1})^\nu,$$

поэтому

$$f_m(x) = \varepsilon_m \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu!} x^{n-\nu}.$$

Нетрудно видеть, что для коэффициентов многочлена

$$f_m(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,m} x^\nu$$

справедливы равенства

$$a_{\nu,m} = \varepsilon_m \frac{f_{m-1}^{(n-\nu)}(q_{m-1})}{(n-\nu)!} = \varepsilon_m \sum_{k=n-\nu}^{n} a_{k,m-1} C_k^{n-\nu} q_{m-1}^{k+\nu-n}.$$

Отсюда следует утверждение (7).

Если

$$\alpha_{m-1}^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)} Q_{m-3} - P_{m-3}}{P_{m-2} - \alpha^{(j)} Q_{m-2}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

— корни многочлена $f_{m-1}(x)$, то

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{1}{\alpha_{m-1}^{(j)} - q_{m-1}} = \frac{\alpha^{(j)}Q_{m-2} - P_{m-2}}{P_{m-1} - \alpha^{(j)}Q_{m-1}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

что доказывает утверждения (8) и (9).

Равенство (10) — общеизвестно.

Для доказательства последнего утверждения теоремы преобразуем выражение (8), получим:

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} \cdot \frac{\alpha^{(j)} - \frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}}{\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} - \alpha^{(j)}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{12}$$

При $j = 1$ мы имеем очевидное неравенство $\alpha_m^{(1)} > 1$, которое следует из определения остаточной дроби.

Пусть $2 \leqslant j \leqslant n$, тогда

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} \left(-1 + \frac{\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} - \frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}}{\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} - \alpha^{(j)}} \right) = \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} \left(-1 + \frac{\frac{(-1)^m}{Q_{m-1}Q_{m-2}}}{\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} - \alpha^{(j)}} \right) =$$

$$= \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} \left(-1 + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1}Q_{m-2}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} - \alpha^{(j)}\right)} \right) =$$

$$= -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1}^2\left(\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)}. \tag{13}$$

Существует номер m_0 такой, начиная с которого

$$\left| \frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} \right| \leqslant \frac{\delta(\alpha)}{2}, \quad \frac{2}{Q_{m-1}\delta(\alpha)} < 1,$$

поэтому при $m \geqslant m_0$ будем иметь

$$|\alpha_m^{(j)}| \leqslant \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} \left(1 + \frac{2}{Q_{m-1}Q_{m-2}\delta(\alpha)} \right) = \frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{2}{Q_{m-1}^2\delta(\alpha)} < 1, \tag{14}$$

что и доказывает — $\alpha_m^{(1)}$ — обобщённое число Пизо.

Покажем теперь, что выполнены неравенства из определения приведённого обобщённого числа Пизо, то есть $|q_m - \alpha_m^{(j)}| > 1$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$.

Рассмотрим два возможных случая.

I. Пусть $\alpha^{(j)}$ — вещественное алгебраическое число, тогда

$$-1 < -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} - \frac{2}{Q_{m-1}^2\delta(\alpha)} \leqslant \alpha_m^{(j)} = -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1}^2\left(\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{2}{Q_{m-1}^2\delta(\alpha)} < 0,$$

поэтому

$$q_m - \alpha_m^{(j)} > 1$$

и для этого алгебраически сопряжённого для остаточной дроби α_m условие выполнено.

II. Пусть теперь $\alpha^{(j)}$ — комплексное алгебраическое число, тогда $\alpha_m^{(j)}$ — комплексное алгебраически сопряжённое для остаточной дроби α_m будет находиться в круге радиуса меньше $\frac{1}{Q_{m-1}}$ с центром в точке $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$. Отсюда следует, что $|q_m - \alpha_m^{(j)}| > 1$ и, значит, в этом случае условие из определения выполнено.

Тем самым теорема полностью доказана. □

5. Минимальные многочлены остаточных дробей

Теорема 4. *Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена*

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\ldots$, $\alpha^{(n)}$ *— его корни, и число α имеет разложение в цепную дробь*

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Для последовательности минимальных многочленов $f_m(x)$ остаточных дробей $\alpha_m = \alpha_m^{(1)}$ последовательность дискриминантов $D(f_m)$ целочисленная, стационарная.

Доказательство. Действительно, все многочлены $f_m(x) \in \mathbb{Z}[x]$, поэтому по свойству дискриминанта (см. [15], стр. 34) $D(f_m) \in \mathbb{Z}$. По лемме 6 $D(f_{m-1}) = D(f_m)$.

Отсюда следует справедливость утверждения теоремы. □

Теорема 5. *Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена*

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, ..., $\alpha^{(n)}$ — его корни, и число α имеет разложение в цепную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Если α — приведённое обобщённое число Пизо, то минимальный многочлен $f_m(x)$ для остаточной дроби α_m имеет вид

$$f_m(x) = (-1)^m (Q_{m-1}x + Q_{m-2})^n f_0\left(\frac{P_{m-1}x + P_{m-2}}{Q_{m-1}x + Q_{m-2}}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,m} x^{\nu}. \tag{15}$$

Справедливы равенства

$$a_{n,m} = Q_{m-1}^n \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|, \quad a_{0,m} = -Q_{m-2}^n \left| f_0\left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}\right)\right|, \tag{16}$$

$$a_{\nu,m} = Q_{m-1}^{\nu} Q_{m-2}^{n-\nu} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^{\mu}} C_{n-\mu}^{\nu} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant n), \tag{17}$$

$$a_{n-1,m} = Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right| - \frac{1}{Q_{m-2}Q_{m-1}} f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right). \tag{18}$$

Доказательство. Проведем индукцию по m.

При $m = 0$ имеем:

$$P_{-1} = 1,\ P_{-2} = 0,\ Q_{-1} = 0,\ Q_{-2} = 1,$$
$$(Q_{-1}x + Q_{-2})^n f_0\left(\frac{P_{-1}x + P_{-2}}{Q_{-1}x + Q_{-2}}\right) = f_0(x)$$

и равенство (15) установлено.

Пусть утверждение справедливо для $m \geqslant 0$, тогда

$$f_m(x) = (-1)^m M_m\left(f_0(x)\right), \quad M_m = \begin{pmatrix} P_{m-1} & P_{m-2} \\ Q_{m-1} & Q_{m-2} \end{pmatrix}.$$

Так как $a_{n,m} > 0$ и α_m — приведённое обобщённое число Пизо, то $f_m(q_m) < 0$ и

$$f_{m+1}(x) = -x^n f_m\left(q_m + \frac{1}{x}\right) = -M_m'\left(f_m(x)\right), \quad M_m' = \begin{pmatrix} q_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$M_m \cdot M_m' = \begin{pmatrix} P_{m-1} & P_{m-2} \\ Q_{m-1} & Q_{m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_m P_{m-1} + P_{m-2} & P_{m-1} \\ q_m Q_{m-1} + Q_{m-2} & Q_{m-1} \end{pmatrix} = M_{m+1}.$$

Воспользуемся индукционным предположением и леммой 7 (стр. 159), получим

$$f_{m+1}(x) = -M'_m\left((-1)^m M_m\left(f_0(x)\right)\right) = (-1)^{m+1}(M_m \cdot M'_m)\left(f_0(x)\right) = \\ = (-1)^{m+1}M_{m+1}\left(f_0(x)\right),$$

что доказывает равенство (15).

Перейдем к доказательству соотношений (16).

Согласно лемме 6

$$a_{n,m} = (-1)^m Q_{m-1}^n f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right).$$

При m — четном $\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} > \alpha$ и $f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) > 0$. При m — нечетном $\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} < \alpha$ и $f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) < 0$. Поэтому

$$(-1)^m Q_{m-1}^n f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) = Q_{m-1}^n\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|$$

и равенство для $a_{n,m}$ доказано.

Аналогично,

$$a_{0,m} = (-1)^m Q_{m-2}^n f_0\left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}\right) = -Q_{m-2}^n\left|f_0\left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}\right)\right|$$

и равенства (16) полностью доказаны.

Для доказательства равенств (17) заметим, что

$$\frac{P_{m-1}x + P_{m-2}}{Q_{m-1}x + Q_{m-2}} = \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^{m-1}}{Q_{m-1}(Q_{m-1}x + Q_{m-2})}.$$

Поэтому по формуле Тейлора получим

$$(Q_{m-1}x + Q_{m-2})^n f_0\left(\frac{P_{m-1}x + P_{m-2}}{Q_{m-1}x + Q_{m-2}}\right) = (Q_{m-1}x + Q_{m-2})^n f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) + \\ + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{f_0^{(\nu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\nu!}\frac{(-1)^{(m-1)\nu}(Q_{m-1}x + Q_{m-2})^{n-\nu}}{Q_{m-1}^{\nu}} = Q_{m-1}^n f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)x^n + \\ + f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\sum_{\nu=0}^{n-1}C_n^{\nu}Q_{m-1}^{\nu}Q_{m-2}^{n-\nu}x^{\nu} + \sum_{\mu=1}^{n}\frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!}\frac{(-1)^{(m-1)\mu}}{Q_{m-1}^{\mu}}.$$

$$\cdot\sum_{\nu=0}^{n-\mu} C_{n-\mu}^{\nu} Q_{m-1}^{\nu} Q_{m-2}^{n-\mu-\nu} x^{\nu} = Q_{m-1}^{n} f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) x^n + f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \sum_{\nu=0}^{n-1} C_n^{\nu} Q_{m-1}^{\nu} Q_{m-2}^{n-\nu} x^{\nu} +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n-1} x^{\nu} Q_{m-1}^{\nu} Q_{m-2}^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{n-\nu} C_{n-\mu}^{\nu} \frac{(-1)^{(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^{\mu}} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} =$$

$$= Q_{m-1}^{n} f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} x^{\nu} Q_{m-1}^{\nu} Q_{m-2}^{n-\nu} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} C_{n-\mu}^{\nu} \frac{(-1)^{(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^{\mu}} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!},$$

что и доказывает (17).

При $\nu = n-1$ получим

$$a_{n-1,m} = (-1)^m Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \sum_{\mu=0}^{1} C_{n-\mu}^{n-1} \frac{(-1)^{(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^{\mu}} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} =$$

$$= (-1)^m Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) + \frac{(-1)^{m-1}}{Q_{m-2}Q_{m-1}} f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right) =$$

$$= Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right| - \frac{1}{Q_{m-2}Q_{m-1}} f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right)$$

что и доказывает (18).

В заключении доказательства проверим, что из (17) следует (16).

Действительно, при $\nu = n$ получим

$$Q_{m-1}^{\nu} Q_{m-2}^{n-\nu} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^{\mu}} C_{n-\mu}^{\nu} = Q_{m-1}^{n} f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)(-1)^m = a_{n,m}$$

и первое из равенств (16) установлено.

Аналогично, при $\nu = 0$ получим

$$Q_{m-1}^{\nu} Q_{m-2}^{n-\nu} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^{\mu}} C_{n-\mu}^{\nu} =$$

$$= (-1)^m Q_{m-2}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} \left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)^{\mu} =$$

$$= (-1)^m Q_{m-2}^{n} f_0\left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}\right) = a_{0,m}$$

и второе из равенств (16) установлено. □

Лемма 9. *Пусть α корень минимального многочлена*

$$f_0(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x],$$

тогда

$$f_0^{(\nu)}(\alpha) \neq 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Доказательство. Действительно, $f_0^{(n)}(x) = n!a_n \neq 0$, так как $f_0(x) \in \mathbb{P}_n^*[x]$ и $a_n \neq 0$.

Пусть $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$ и $g(x) = f_0^{(\nu)}(x)$, $g(\alpha) = 0$. Так как $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f_0(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень, то $(f_0(x), g(x)) \neq 1$. Получаем противоречие с неприводимостью минимального многочлена. Лемма доказана. □

Обозначим через $c(\alpha, \varepsilon) > 0$ константу в теореме Рота [20]. Таким образом для любого целого p и натурального q справедливо неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c(\alpha,\varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}. \tag{19}$$

Пусть

$$\Delta(\alpha) = \max_{2\leqslant j\leqslant n} |\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}|.$$

Лемма 10. *Пусть α — вещественная иррациональность степени $n > 2$ и*

$$f_0(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x]$$

— минимальный многочлен, тогда при $m > m_0$ для любой подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу α справедливы неравенства

$$a_n \frac{c(\alpha,\varepsilon)\left(\frac{\delta(\alpha)}{2}\right)^{n-1}}{Q_m^{2+\varepsilon}} < \left|f_0\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)\right| < a_n \frac{(1+\Delta(\alpha))^{n-1}}{Q_m^2}. \tag{20}$$

Доказательство. Действительно,

$$\left|f_0\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)\right| = a_n \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{P_m}{Q_m} - \alpha^{(j)}\right| = a_n \left|\frac{P_m}{Q_m} - \alpha\right| \prod_{j=2}^{n} \left|\frac{P_m}{Q_m} - \alpha + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right|.$$

Далее заметим, что при $m > m_0$ справедливы неравенства

$$\frac{c(\alpha,\varepsilon)}{Q_m^{2+\varepsilon}} < \left|\frac{P_m}{Q_m} - \alpha\right| < \frac{1}{Q_m^2},$$

$$\frac{\delta(\alpha)}{2} < \left|\frac{P_m}{Q_m} - \alpha + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right| < 1 + \Delta(\alpha) \quad (2 \leqslant j \leqslant n).$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Из леммы 10 и теоремы 5 следует, что при $n > 2$ старший коэффициент $a_{n,m}$ минимального многочлена $f_m(x)$ для приведённого обобщённого числа Пизо α растет как величина порядка $O\left(Q_{m-1}^{n-2-\varepsilon}\right)$.

Действительно, при $m > m_0$ имеем

$$a_n \frac{c(\alpha,\varepsilon)\left(\frac{\delta(\alpha)}{2}\right)^{n-1}}{Q_m^{2+\varepsilon}} < \left|f_0\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)\right| < a_n\frac{(1+\Delta(\alpha))^{n-1}}{Q_m^2},$$

$$a_n c(\alpha,\varepsilon)\left(\frac{\delta(\alpha)}{2}\right)^{n-1} Q_{m-1}^{n-2-\varepsilon} < a_{n.m} = Q_{m-1}^n\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right| < a_n(1+\Delta(\alpha))^{n-1}Q_{m-1}^{n-2}.$$

Обозначим через $A_\nu(\alpha)$ величину

$$A_\nu(\alpha) = \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{\left(\alpha^{(1)}-\alpha^{(j)}\right)^{\nu}}, \quad \nu = 1,2,\ldots.$$

Теорема 6. *Пусть α — вещественная иррациональность степени $n > 2$ и*

$$f_0(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x]$$

— минимальный многочлен, тогда при $m > m_0$ для любой подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к приведённому обобщённому числу Пизо α и остаточной дроби α_m справедливы соотношения

$$\alpha_m = -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{Q_{m-1}^2\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|} + (-1)^{m-1}\frac{\lambda_m}{Q_{m-1}^2}, \tag{21}$$

где

$$\lambda_m = A_1(\alpha) + \frac{(-1)^{m-1}\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}A_2(\alpha)\varepsilon_m, \quad |\varepsilon_m| < 2. \tag{22}$$

Доказательство. Действительно, согласно теореме Виета

$$\alpha_m^{(1)} + \ldots + \alpha_m^{(n)} = -\frac{a_{n-1,m}}{a_{n,m}}.$$

Из формул (16) и (18) вытекает

$$\alpha_m^{(1)} + \ldots + \alpha_m^{(n)} = -n\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{Q_{m-1}^2\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|}.$$

Воспользуемся равенством (13), получим

$$\alpha_m^{(1)} + \ldots + \alpha_m^{(n)} = \alpha_m - (n-1)\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \sum_{j=2}^{n}\frac{(-1)^m}{Q_{m-1}^2\left(\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_m = -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{Q_{m-1}^2\left|f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)\right|} + (-1)^{m-1}\frac{\lambda_m}{Q_{m-1}^2},$$

где

$$\lambda_m = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}}.$$

Далее заметим, что при $m > m_0$ имеем

$$\frac{1}{\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}} = \frac{1}{\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}} - (-1)^m\frac{\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{\left(\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)\left(\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)} = \frac{1}{\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}} +$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}\frac{\varepsilon}{\left(\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)^2},$$

где $|\varepsilon| < 2$. Отсюда следует, что

$$\lambda_m = A_1(\alpha) + \frac{(-1)^{m-1}\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}A_2(\alpha)\varepsilon_m, \quad |\varepsilon_m| < 2$$

и теорема доказана. □

6. Модификация алгоритма Лагранжа разложения алгебраического числа в цепную дробь

Важность обобщенных чисел Пизо для алгоритма Лагранжа разложения алгебраического числа в цепную дробь объясняется следующей леммой.

Лемма 11. *Если многочлен*

$$f_0(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n \geqslant 1$$

является минимальным для обобщенного числа Пизо $\alpha^{(1)} = \alpha_0$, то для разложения в цепную дробь

$$\alpha^{(1)} = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

выполняется неравенство

$$\left[-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right]+1-n\leqslant q_0<-\frac{a_{n-1}}{a_n}+n-1. \tag{23}$$

Доказательство. Действительно, по формуле Виета имеем:

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n}=\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\ldots+\alpha^{(n)}.$$

В силу неприводимости минимального многочлена $f_0(x)$ имеем

$$\alpha^{(2)}+\alpha^{(3)}+\ldots+\alpha^{(n)}\neq 0,$$

так как в противном случае $\alpha^{(1)}=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\in\mathbb{Q}$, что противоречит неприводимости минимального многочлена $f_0(x)$.

Так как $\alpha^{(1)}$ — число Пизо, то

$$|\alpha^{(j)}|<1,\quad (2\leqslant j\leqslant n).$$

Поэтому

$$0<|\alpha^{(2)}+\ldots+\alpha^{(n)}|<n-1$$

и

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n}+1-n<\alpha^{(1)}<-\frac{a_{n-1}}{a_n}+n-1.$$

Так как $q_0<\alpha^{(1)}<q_0+1$, то отсюда следует утверждение леммы. □

Таким образом из теоремы 3 и леммы 11 следует, что начиная с некоторого номера m_0 все неполные частные q_m $(m\geqslant m_0)$ требуют для своего вычисления не более $O(\ln n)$ вычислений значений многочлена $f_m(x)$. Этот результат можно существенно усилить с помощью асимптотической формулы (11) для сопряженных чисел к остаточным дробям.

Теорема 7. *Пусть $\alpha=\alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена*

$$f_0(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x],a_n>0,$$

$\alpha=\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, …, $\alpha^{(n)}$ — его корни, и число α имеет разложение в цепную дробь

$$\alpha=\alpha_0=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_k+\cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Пусть последовательность минимальных многочленов $f_m(x)$ для остаточных дробей α_m задана формулами (7) и номер $m_0 = m_0(\alpha, \varepsilon)$ определен из неравенства

$$\frac{2(n-1)}{Q_{m_0-1}\delta(\alpha)} < \varepsilon, \tag{24}$$

тогда для любого $m > m_0$ справедливы равенства

$$q_m = \begin{cases} q_m^*, & \text{если } f_m\left(q_m^*+1\right) > 0 \& f_m\left(q_m^*\right) < 0 \\ q_m^*+1, & \text{если } f_m\left(q_m^*+1\right) < 0 \\ q_m^*-1, & \text{если } f_m\left(q_m^*\right) > 0 \end{cases} \tag{25}$$

где

$$q_m^* = \left[-\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} + \frac{(n-1)Q_{m-2}}{Q_{m-1}}\right].$$

Доказательство. По теореме 3

$$f_m(x) = -f_{m-1}(q_{m-1})x^n - \frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{1!}x^{n-1} - \sum_{\nu=2}^{n} \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu!}x^{n-\nu},$$

поэтому по формулам Виета получим

$$-\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} = \alpha_m^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\left(-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1}^2\left(\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)}\right),$$

следовательно

$$\alpha_m^{(1)} = -\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} + \frac{(n-1)Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \Delta,$$

где

$$\Delta = \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{(-1)^{m-1}}{Q_{m-1}^2\left(\frac{(-1)^m\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}\right)}\right)$$

и

$$|\Delta| < \frac{2(n-1)}{Q_{m-1}^2\delta(\alpha)} < \frac{\varepsilon}{Q_{m-1}}.$$

Так как при $x > \alpha_m^{(1)}$ имеем $f_m(x) > 0$ и при $1 \leqslant x < \alpha_m^{(1)}$ имеем $f_m(x) < 0$, и $q_m^* - 1 < \alpha_m^{(1)} < q_m^* + 2$, то возможно три случая:

$q_m = q_m^* + 1$, если $f_m(q_m^* + 1) < 0$;

$q_m = q_m^*$, если $f_m(q_m^*) < 0 \& f_m(q_m^* + 1) > 0$;

$q_m = q_m^* - 1$, если $f_m(q_m^*) > 0$.

Теорема доказана. □

7. Цепные последовательности дробно-линейных преобразований плоскости

В работе [12] дано определение сходимости последовательности целочисленных матриц к числу.

Определение 5. *Говорят, что матричное разложение*

$$\prod_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

сходится к числу α, если для матриц

$$M_n=\prod_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{D_n}=\alpha.$$

В этом случае пишется

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}=\prod_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}.$$

В работе [9] дается достаточно систематичное изложение теории матричных представлений действительных чисел. Нас сейчас будет интересовать случай, соответствующий обычным цепным дробям. Если число α разложено в цепную дробь (1), то справедливо матричное разложение

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}=\prod_{\nu=0}^{\infty}\begin{pmatrix} q_\nu & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

так как

$$M_m=\prod_{\nu=0}^{m}\begin{pmatrix} q_\nu & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_m & P_{m-1} \\ Q_m & Q_{m-1} \end{pmatrix}\quad (m\geqslant 0)$$

и последовательность матриц M_m сходится к числу α в силу свойств подходящих дробей.

Рассмотрим произвольное дробно-линейное преобразование комплексной плоскости с матрицей M:

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},\quad w=M(z)=\frac{Az+B}{Cz+D}.$$

Из равенств (2) вытекает, что иррациональное число α и остаточная дробь α_{k+1} связаны взаимообратными дробно-линейными преобразованиями:

$$M_k = \begin{pmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{pmatrix}, \quad M_k^* = \begin{pmatrix} Q_{k-1} & -P_{k-1} \\ -Q_k & P_k \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \alpha = & M_k(\alpha_{k+1}) \\ \alpha_{k+1} = & M_k^*(\alpha) \end{cases}. \tag{27}$$

Анализируя формулы (6) для корней минимального многочлена $f_m(x)$, мы приходим к выводу, что они получаются из корней исходного минимального многочлена под действием дробно-линейного преобразования M_{k-1}^*.

Дадим следующее определение.

Определение 6. *Пусть α — вещественная иррациональность, тогда цепной последовательностью первого рода дробно-линейных преобразований для многочленов назовем последовательность*

$$\left\{ M_\nu(\alpha) = \begin{pmatrix} P_\nu(\alpha) & P_{\nu-1}(\alpha) \\ Q_\nu(\alpha) & Q_{\nu-1}(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \nu = 0, 1, \ldots \right\},$$

где $P_\nu(\alpha)$ — числитель, а $Q_\nu(\alpha)$ — знаменатель подходящей дроби с номером ν к числу α.

Цепной последовательностью первого рода дробно-линейных преобразований комплексной плоскости назовем последовательность

$$\left\{ M_\nu^*(\alpha) = \begin{pmatrix} Q_{\nu-1}(\alpha) & -P_{\nu-1}(\alpha) \\ -Q_\nu(\alpha) & P_\nu(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \nu = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Чтобы лучше понять эффект концентрации алгебраически-сопряжённых чисел к остаточной дроби α_m около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ докажем следующие леммы.

Лемма 12. *Пусть $M^*(z)$ — произвольное дробно-линейное преобразование комплексной плоскости с унимодулярной матрицей M^*:*

$$M^* = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \quad A, B, C, D \in \mathbb{Z}, |AD - BC| = 1, C \neq 0,$$

тогда:

внешность круга $K\left(\frac{A}{C}, 1\right) = \left\{z \,\middle|\, \left|z - \frac{A}{C}\right| \geqslant 1\right\}$ переходит во внутренность круга $K\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{C^2}\right)$ с выколотым центром,

окружность $C\left(\frac{A}{C}, 1\right)$ переходит в окружность $C\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{C^2}\right)$,

внутренность круга $K\left(\frac{A}{C}, 1\right)$ с выколотым центром переходит во внешность круга $K\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{C^2}\right)$,

любое кольцо

$$R\left(\frac{A}{C}, 1, r\right) = \left\{z \,\middle|\, r < \left|z - \frac{A}{C}\right| < 1\right\} \quad (0 < r < 1)$$

переходит в кольцо $R\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{rC^2}, \frac{1}{C^2}\right)$,

точка $z = \frac{A}{C}$ *— полюс дробно-линейного преобразования* $M^*(z)$ *с вычетом* $\frac{1}{C^2}$.

Доказательство. Действительно,

$$M^*(z) = \frac{Dz - B}{-Cz + A} = -\frac{D}{C} + \frac{AD - BC}{C(A - Cz)}, \qquad \left|M^*(z) + \frac{D}{C}\right| = \frac{1}{C^2\left|\frac{A}{C} - z\right|},$$

отсюда следуют все утверждения леммы. □

Рассмотрим дробно-линейное преобразование $N^*(z)$ с матрицей

$$N^* = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad C, D \in \mathbb{Z}, C \neq 0, \quad N^*(z) = \frac{Cz + D}{C} = z + \frac{D}{C}.$$

Нетрудно видеть, что

$$M_1^* = N^* \cdot M^* = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AD - BC \\ -C^2 & AC \end{pmatrix}$$

Лемма 13. *Пусть*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} C & -D \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{Z}, \quad C \neq 0,$$

тогда для дробно-линейного преобразования многочленов $M_1 = N \circ M$ *с матрицей*

$$M_1 = M \cdot N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & BC - AD \\ C^2 & 0 \end{pmatrix}$$

и корней $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(n)}$ *многочлена* $g(x) = M_1(f(x))$ *справедливы соотношения*

$$g(x) = M_1(f(x)) = C^{2n} x^n f\left(\frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C^2 x}\right) =$$

$$= C^{2n} f\left(\frac{A}{C}\right) x^n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f^{(\nu)}\left(\frac{A}{C}\right)}{\nu!} C^{2(n-\nu)} x^{n-\nu} (BC - AD)^\nu \tag{28}$$

и

$$\beta^{(\nu)} = M_1^*\left(\alpha^{(\nu)}\right) = \frac{AD - BC}{C^2\left(\frac{A}{C} - \alpha^{(\nu)}\right)} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n). \tag{29}$$

Доказательство. Действительно, если $h(x) = M(f(x))$, то

$$h(x) = (Cx + D)^n f\left(\frac{Ax + B}{Cx + D}\right), \quad g(x) = M_1(f(x)) = C^n h\left(x - \frac{D}{C}\right) =$$

$$= C^n \left(C\left(x - \frac{D}{C}\right) + D\right)^n f\left(\frac{A\left(x - \frac{D}{C}\right) + B}{C\left(x - \frac{D}{C}\right) + D}\right) =$$

$$= \left(C^2 x\right)^n f\left(\frac{ACx + (BC - AD)}{C^2 x}\right) = M_1(f(x)).$$

По формуле Тейлора получим:

$$\left(C^2x\right)^n f\left(\frac{ACx+(BC-AD)}{C^2x}\right)=\left(C^2x\right)^n f\left(\frac{A}{C}+\frac{BC-AD}{C^2x}\right)=$$
$$=C^{2n}f\left(\frac{A}{C}\right)x^n+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{f^{(\nu)}\left(\frac{A}{C}\right)}{\nu!}C^{2(n-\nu)}x^{n-\nu}(BC-AD)^\nu$$

и равенство (28) доказано.

Далее имеем:

$$g(x)=\left(C^2x\right)^n a_n\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{ACx+(BC-AD)}{C^2x}-\alpha^{(\nu)}\right)=$$
$$=a_n\prod_{\nu=1}^{n}\left((AC-C^2\alpha^{(\nu)})x-(AD-BC)\right)=$$
$$=C^{2n}f\left(\frac{A}{C}\right)\prod_{\nu=1}^{n}\left(x-\frac{AD-BC}{C^2\left(\frac{A}{C}-\alpha^{(\nu)}\right)}\right)=C^{2n}f\left(\frac{A}{C}\right)\prod_{\nu=1}^{n}\left(x-\beta^{(\nu)}\right)$$

что и доказывает равенство (29). □

Определение 7. *Пусть α — вещественная иррациональность, тогда цепной последовательностью второго рода дробно-линейных преобразований для многочленов назовем последовательность*

$$\left\{M_{\nu,1}(\alpha)=\left(\begin{array}{cc}P_\nu(\alpha)Q_\nu(\alpha) & P_{\nu-1}(\alpha)Q_\nu(\alpha)-P_\nu(\alpha)Q_{\nu-1}(\alpha)\\ Q_\nu^2(\alpha) & 0\end{array}\right)\middle|\,\nu=0,1,\ldots\right\},$$

где $P_\nu(\alpha)$ — числитель, а $Q_\nu(\alpha)$ — знаменатель подходящей дроби с номером ν к числу α.

Цепной последовательностью второго рода дробно-линейных преобразований комплексной плоскости назовем последовательность

$$\left\{M^*_{\nu,1}(\alpha)=\left(\begin{array}{cc}0 & P_\nu(\alpha)Q_{\nu-1}(\alpha)-P_{\nu-1}(\alpha)Q_\nu(\alpha)\\ -Q_\nu^2(\alpha) & P_\nu(\alpha)Q_\nu(\alpha)\end{array}\right)\middle|\,\nu=0,1,\ldots\right\}.$$

Теорема 8. *Пусть α — вещественная иррациональность степени $n>2$ и*

$$f_0(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0\in\mathbb{P}^*_n[x]$$

— минимальный многочлен.

Для последовательности многочленов $g_\nu(x)=M_{\nu,1}(\alpha)(f_0(x))$ и корней

$$\beta_\nu^{(j)}=M^*_{\nu,1}(\alpha)(\alpha^{(j)})\quad(1\leqslant j\leqslant n)$$

справедливы соотношения

$$\lim_{\nu\to\infty}\beta_\nu^{(j)}=0\quad(2\leqslant j\leqslant n),\tag{30}$$

$$\beta_\nu^{(1)}=\alpha_{\nu+1}+\frac{Q_{\nu-1}(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)}.\tag{31}$$

Доказательство. Действительно, согласно лемме 13 имеем

$$\beta_\nu^{(j)} = M_{\nu,1}^*(\alpha)(\alpha^{(j)}) = \frac{P_\nu(\alpha)Q_{\nu-1}(\alpha) - P_{\nu-1}(\alpha)Q_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)^2\left(\frac{P_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)} - \alpha^{(j)}\right)} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{Q_\nu(\alpha)^2\left(\frac{P_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)} - \alpha^{(j)}\right)}.$$

Отсюда сразу вытекает утверждение (30) при $2 \leqslant j \leqslant n$.

Так как

$$\alpha = \alpha^{(1)} = \frac{P_\nu}{Q_\nu} + \frac{(-1)^\nu\theta_\nu}{Q_\nu Q_{\nu+1}}, \quad \theta_\nu = \frac{Q_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}Q_\nu + Q_{\nu-1}},$$

то

$$\frac{P_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)} - \alpha^{(1)} = \frac{(-1)^{\nu-1}\theta_\nu}{Q_\nu Q_{\nu+1}} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{Q_\nu(\alpha_{\nu+1}Q_\nu + Q_{\nu-1})}.$$

Отсюда следует, что

$$\beta_\nu^{(1)} = \frac{\alpha_{\nu+1}Q_\nu + Q_{\nu-1}}{Q_\nu} = \alpha_{\nu+1} + \frac{Q_{\nu-1}}{Q_\nu},$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

8. Заключение

Из материалов статьи видно, что приведённые алгебраические иррациональности в случае чисто-вещественных алгебраических полей и обобщённые числа Пизо в общем случае играют принципиальную роль в вопросах разложения алгебраических иррациональностей в цепную дробь. Начиная с некоторого места все остаточные дроби являются приведёнными алгебраическими числами в первом случае и приведёнными обобщёнными числами Пизо — во втором случае.

Из теоремы 7 следует, что начиная с номера m_0 для вычисления очередного неполного частного достаточно вычислить два значения минимального многочлена $f_m(x)$ и имеется рекуррентная формула для вычисления очередного неполного частного.

По-видимому, представляет интерес дальнейшее изучение явления концентрации около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ сопряжённых к остаточной дроби α_m.

Рассмотрим множество всех сопряжённых к остаточным дробям — сопряжённый спектр иррационального числа α. При $n > 2$ сопряжённый спектр является бесконечным множеством, а при $n = 2$ — конечным множеством.

Если множество всех дробей вида $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ назвать рациональным сопряжённым спектром вещественного алгебраического числа, то возникает естественный вопрос о его структуре.

В квадратичном случае имеется конечное число предельных точек для рационального сопряжённого спектра — это сопряжённый спектр. Какая ситуация имеет место в общем случае?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Г. Александров Исследование на ЭВМ непрерывных дробей // Алгоритмические исследования в комбинаторике. М.: Наука. 1978. С. 142–161, 187.

2. В. Н. Берестовский, Ю. Г. Никоноров Цепные дроби, группа GL(2,Z) и числа Пизо // Матем. тр. 2007. Т. 10, № 1. С. 97–131.

3. А. Д. Брюно Разложение алгебраических чисел в цепные дроби // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4, № 2. С. 211–221.

4. А. Д. Брюно Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 2. С. 35–65.

5. Г. Вейль Алгебраическая теория чисел. М.: Гос. из-во И. Л. 1947. 226 с.

6. Н. М. Добровольский Гиперболическая дзета-функция решёток // Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

7. Н. М. Добровольский Квадратурные формулы на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ // Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

8. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

9. Н. М. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева О матричном разложении приведенной кубической иррациональности // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, вып. 1. С. 34–55.

10. Н. М. Добровольский, Е. И. Юшина О приведенных алгебраических иррациональностях // Алгебра и приложения: труды Международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина, Нальчик, 6–11 сентября 2014 г. – Нальчик: из-во КБГУ. С. 44 – 46.

11. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Е. И. Юшина О матричной форме теоремы Галуа о чисто периодических цепных дробях // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, вып. 3. С. 47–52.

12. В. Д. Подсыпанин О разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сб. 2007. Т. 8, вып. 3(23). С. 43—46.

13. Е. В. Подсыпанин, Об одном обобщении алгоритма цепных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 67. С. 184–194.

14. Е. В. Подсыпанин О разложении иррациональностей высших степеней в обобщенную непрерывную дробь (по материалам В. Д. Подсыпанина) рукопись 1970 // Чебышевский сб. 2007. Т. 8, вып. 3(23). С. 47—49.

15. В. В. Прасолов Многочлены. — 3-е изд., исправленное. — М.: МЦНМО, 2003. — 336 с.

16. Е. В. Триколич, Е. И. Юшина, Цепные дроби для квадратических иррациональностей из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ // Чебышевский сб.2009. Т. 10, вып. 1. С. 77–94.

17. К. К. Фролов Оценки погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231, №. 4. С. 818—821.

18. К. К. Фролов Квадратурные формулы на классах функций: дис. ... к-та физ.-мат. наук. М: ВЦ АН СССР. 1979.

19. Е. И. Юшина О некоторых приведенных алгебраических иррациональностях // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Региональной научной студенческой конференции. Тула: ТулГУ 2015. С. 66–72.

20. K. F. Roth Rational approximations to algebraic numbers // Mathematika. 1955. Vol. 2. P. 1–20. corrigendum: p. 168.

REFERENCES

1. Aleksandrov, A. G. 1978, "Computer investigation of continued fractions." , *Algorithmic studies in combinatorics Nauka, Moscow*, pp. 142—161, 187. (Russian)

2. Berestovskii, V. N. & Nikonorov, Yu. G. 2007, “Continued Fractions, the Group GL(2,Z), and Pisot Numbers”, *Siberian Adv. Math.*, vol. 17, no. 4, pp. 268—290.

3. Bruno, A. D. 1964, “Continued fraction expansion of algebraic numbers”, *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, vol. 4, no. 2, pp. 1–15. (Russian)

4. Bruno, A. D. 2015, “Universal generalization of the continued fraction algorithm”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 16, no. 2, pp. 35–65. (Russian)

5. Weyl, Hermann 1940, "Algebraic Theory of Numbers." , *Annals of Mathematics Studies, no. 1. Princeton University Press, Princeton, N. J.*, viii+223 pp.

6. Dobrovol’skii, N. M. 1984, "Hyperbolic Zeta function lattices." , *Dep. v VINITI* 24.08.84, № 6090–84.(Russian)

7. Dobrovol’skii, N. M. 1984, "Quadrature formulas for classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$." , *Dep. v VINITI* 24.08.84. № 6091–84. (Russian)

8. Dobrovol'skii, N. M. 2015, "About the modern problems of the theory of hyperbolic zeta-functions of lattices", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 1(53), pp. 176 — 190. (Russian)

9. Dobrovol'skii, N. M., Sobolev, D. K. & Soboleva, V. N. 2013, "On the matrix decomposition of a reduced cubic irrational", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 14, no. 1(45), pp. 34—55. (Russian)

10. Dobrovol'skii, N. M. & Yushina, E. I. 2014, "On the reduction of algebraic irrationalities", *Algebra and Applications: Proceedings of the International Conference on Algebra, dedicated to the 100th anniversary of L. A. Kaloujnine, Nalchik, 6–11 September 2014 – Nalchik: publishing house KBSU.*, pp. 44 – 46. (Russian)

11. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N. & Yushina, E. I. 2012, "On a matrix form of a theorem of Galois on purely periodic continued fractions", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 13, no. 3(43), pp. 47–52. (Russian)

12. Podsypanin, V. D. 2007, "On the expansion of irrationalities of the fourth degree in the continued fraction", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 8, no. 3(23), pp. 43—46. (Russian)

13. Podsypanin, E. V. 1977, "A generalization of the continued fraction algorithm that is related to the Viggo Brun algorithm", *Studies in number theory (LOMI), 4. Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, vol. 67, pp. 184—194, 227. (Russian)

14. Podsypanin, E. V. 2007, "On the expansion of irrationalities of higher degrees in the generalized continued fraction (Materials V. D. Podsypanin) the manuscript of 1970", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 8, no. 3(23), pp. 47—49. (Russian)

15. Prasolov, V. V. 2001, "Polynomials." Translated from the 2001 Russian second edition by Dimitry Leites. *Algorithms and Computation in Mathematics, 11. Springer-Verlag, Berlin*, 2004. xiv+301 pp. ISBN: 3-540-40714-6.

16. Trikolich, E. V. & Yushina, E. I. 2009, "Continued fractions for quadratic irrationalities from the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 10, no. 1(29), pp. 77-–94. (Russian)

17. Frolov, K. K. 1976, "Upper bounds for the errors of quadrature formulae on classes of functions.", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* Vol. 231, no. 4, pp. 818—821. (Russian)

18. Frolov, K. K. 1979, "Kvadraturnye formuly na klassakh funktsiy.", PhD thesis. Moscow. *VTS AN SSSR.* (Russian)

19. Yushina, E. I. 2015, "About some the reduction of algebraic irrationalities", *Modern problems of mathematics, mechanics, Computer Science: Proceedings of the Regional scientific student conference. Tula: TulSU*, pp. 66–72.

20. Roth, K. F. 1955, "Rational approximations to algebraic numbers", *Mathematika.*, vol. 2, pp. 1–20. corrigendum: p. 168.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
МБОУ СОШ № 56 г. Тула
Поступило 4.07.2015