

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 3.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-320-332

Идентификация модели нелинейно упругого анизотропного материала с кубической симметрией свойств¹

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич

Соколова Марина Юрьевна — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Христич Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Аннотация

Рассматривается распространение акустических волн в нелинейно упругих анизотропных средах с конечными предварительными деформациями. Среда в начальном состоянии однородная с упругим потенциалом, в котором сохраняются два первых ненулевых члена разложения в ряд по степеням тензора деформаций. Динамические уравнения записаны как уравнения распространения малых возмущений перемещений, накладываемых на конечные деформации. Уравнения конкретизированы для случая распространения плоских монохроматических волн.

Рассмотрен анизотропный материал с симметрией свойств, присущей кристаллам кубической сингонии. Определяющие соотношения нелинейной модели записаны через базисные тензоры собственных упругих подпространств четвертого и шестого рангов. В соотношения входят три константы второго порядка и шесть констант третьего порядка. Предложена программа экспериментов для определения констант упругости кубического материала.

Для определения констант упругости второго порядка предлагается провести эксперимент по измерению фазовых скоростей продольной и двух поперечных волн, распространяющихся вдоль ребра призматического образца. Для определения констант упругости третьего порядка фазовые скорости распространения акустических волн измеряются в двух образцах, отличающихся ориентацией главных осей анизотропии. В образцах создаются предварительные деформации растяжения-сжатия вдоль двух ребер.

Приведены результаты численного моделирования предложенных экспериментов для кристаллов ниобия, упругие свойства которого известны из источников. Построены сечения поверхностей фазовых скоростей продольных (квазипродольных) и поперечных (квазипоперечных) волн, найденных при различных уровнях предварительных деформаций, предложенных в программе экспериментов. Показано, что от уровня деформаций зависят не только величины скоростей распространения волн, но и форма сечений поверхностей фазовых скоростей различными плоскостями.

Ключевые слова: акустические волны, конечные деформации, анизотропия, кубические материалы, фазовые скорости распространения волн, константы упругости второго и третьего порядков.

Библиография: 18 названий.

¹Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Для цитирования:

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич. Идентификация модели нелинейно упругого анизотропного материала с кубической симметрией свойств // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 320–332.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 3.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-3-320-332

Identification of a model of a nonlinear elastic anisotropic material with cubic symmetry of properties

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich

Sokolova Marina Yurievna — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Khristich Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Abstract

The propagation of acoustic waves in nonlinear elastic anisotropic media with finite preliminary strains is considered. The media in the initial state are homogeneous with an elastic potential in which the first two nonzero terms of expansion in a series by degrees of the strain tensor are preserved. The dynamic equations are written as the equations of propagation of small displacement perturbations imposed on finite strains. The equations are concretized for the case of propagation of plane monochromatic waves.

An anisotropic material with the symmetry of properties inherent in crystals of cubic symmetry is considered. Constitutive relations of the nonlinear model are written in terms of the basis tensors of the eigen elastic subspaces of the fourth and sixth ranks. The relations include three second-order constants and six third-order constants. A program of experiments for determining the constants of elasticity of a cubic material is proposed.

To determine the elasticity constants of the second order, it is proposed to fulfill an experiment to measure the phase velocities of longitudinal and two transverse waves propagating along the edge of a prismatic sample. To determine the elasticity constants of the third order, the phase velocities of acoustic wave propagation are measured in two samples differing in the orientation of the main axes of anisotropy. In the samples preliminary tension-compression strains are created along the two edges.

The results of numerical simulation of the proposed experiments for niobium crystals, whose elastic properties are known from sources, are presented. Sections of the surfaces of the phase velocities of longitudinal (quasi-longitudinal) and transverse (quasi-transverse) waves found at different levels of preliminary deformations proposed in the experimental program are constructed. It is shown that not only the values of the wave propagation velocities depend on the level of strains, but also the shape of the cross sections of the phase velocity surfaces with different planes.

Keywords: acoustic waves, finite strains, anisotropy, cubic materials, phase velocities of wave propagation, elasticity constants of the second and third orders.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, 2023, "Identification of a model of a nonlinear elastic anisotropic material with cubic symmetry of properties", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 320–332.

1. Введение

Упругие анизотропные материалы под действием внешних механических и немеханических факторов часто проявляют нелинейный характер деформирования. В частности, в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] установлена зависимость скоростей распространения акустических волн в таких материалах не только от направления распространения фронта волны, но и от действующих в них предварительных напряжений. В известных работах [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] эта зависимость описывается соотношениями, полученными в рамках нелинейных моделей анизотропных материалов с упругим потенциалом, представленным разложением в ряд по степеням тензора деформаций Коши–Грина с сохранением различного числа первых членов. При использовании квадратичного упругого потенциала модель материала содержит упругие константы второго порядка. При сохранении в упругом потенциале членов второго и третьего порядков число констант модели значительно увеличивается: к константам упругости второго порядка добавляются константы упругости третьего порядка. Еще большее число констант содержат модели анизотропных материалов с упругим потенциалом четвертого порядка [6, 8].

В работах [1, 2] константы упругости высших порядков было предложено определять из динамических экспериментов по определению скоростей распространения акустических волн в предварительно деформированных телах или телах с предварительными конечными деформациями. Принципиальная схема таких экспериментов приведена, например, в работе [3]. Эти эксперименты и в настоящее время лежат в основе методик определения упругих постоянных высших порядков как в изотропных, так и в анизотропных материалах [5, 6, 8]. В основе таких методик является выражение скоростей распространения акустических волн в предварительно напряженном теле через константы упругости, которые можно получить из уравнений распространения волн. Основные подходы к решению этой задачи сформулированы в монографиях [11, 12]. В работе [11] получены уравнения распространения плоских волн в изотропных и ортотропных телах с предварительными напряжениями для материалов с произвольным видом упругого потенциала. В работе [12] задача о распространении акустических волн в изотропных телах с предварительными конечными деформациями рассматривается как задача о малых возмущениях деформированного состояния.

В данной статье рассматривается распространение акустических волн в анизотропных телах с предварительными конечными деформациями. Модель анизотропного материала строится с использованием упругого потенциала, содержащего вторые и третьи степени тензора деформаций Коши–Грина. На примере кубических материалов получены системы алгебраических уравнений, связывающие потенциально измеримые фазовые скорости распространения волн с константами упругости материала второго и третьего порядков.

Под кубическим материалом будем понимать анизотропный материал с симметрией упругих свойств, присущей кристаллам кубической сингонии [13, 14]. Группа симметрии такого материала совпадает с группой симметрии куба и характеризуется наличием трех поворотных осей четвертого порядка, четырех поворотных осей третьего порядка, и шести осей симметрии второго порядка. Кубические материалы по своим упругим свойствам наиболее близки к изотропным материалам, но в отличие от последних в рамках обобщенного закона Гука характеризуются тремя, а не двумя, независимыми константами второго порядка. Распространение акустических волн в кубических кристаллах в рамках линейной упругости рассмотрено в работах [13, 14]. Нелинейные модели кубических материалов, содержащие упругие константы второго и третьего порядков, рассмотрены в работах [5, 6, 8, 9, 15]. Вопросам распространения волн в нелинейных кубических материалах посвящены статьи [5, 6, 8].

В работе [15] соотношения упругости для кубических материалов построены в собственных тензорных базисах, что позволило проанализировать механические эффекты второго порядка, описываемые нелинейными соотношениями. В данной статье рассмотрено влияние различных видов предварительных деформаций на картину распределения фазовых скоростей

распространения акустических волн в кубических материалах, описываемых в рамках модели, предложенной в [15].

2. Основные динамические уравнения

Рассмотрим анизотропную среду с упругим потенциалом полиномиального вида $W(\boldsymbol{\varepsilon})$

$$\frac{1}{\rho_0}W = \frac{1}{2}\mathbf{N} \cdots \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{6}\mathbf{L} \cdots \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.1)$$

где ρ_0 — начальная плотность материала, а тензор деформаций Коши–Грина $\boldsymbol{\varepsilon}$ выражается через поле перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ в соответствии с известными соотношениями [12, 16]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Phi}^T - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\nabla^0 \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla^0 + \nabla^0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla^0), \quad (1.2)$$

в которых $\boldsymbol{\Phi}$ — аффинор деформаций, $\mathbf{E}$ — единичный тензор, $\nabla^0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ — набла-оператор начального состояния, $\mathbf{x}$ — радиус-вектор точки среды в начальный момент времени, точкой обозначено скалярное произведение.

В соотношениях (1.1) тензоры упругих свойств $\mathbf{N}$ (четвертого ранга) и $\mathbf{L}$ (шестого ранга) полагаются постоянными. Их компоненты симметричны по парам индексов и выражаются через константы упругости второго и третьего порядков соответственно. Если анизотропная среда обладает симметрией упругих свойств, то тензоры $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ должны быть инвариантны относительно преобразований из группы симметрии конкретного анизотропного материала [16]. Структура тензоров $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ имеет наиболее простой вид в главных (канонических) осях анизотропии материала [15], направляющие векторы которых обозначим $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Для материалов с различными видами симметрии свойств структура тензоров $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ приведена в работах [13, 16].

На основании представления упругого потенциала (1.1) определяется второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгоффа:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{N} \cdots \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdots \mathbf{L} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.3)$$

Соотношения (1.3) являются определяющими соотношениями рассматриваемой нелинейной модели анизотропного материала.

Пусть в начальный момент времени t_0 в среде отсутствуют деформации и напряжения, а к моменту времени t_1 создано однородное напряженно-деформированное состояние, которое характеризуется полем перемещений $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1)$, тензором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ и тензором напряжений $\mathbf{S}_1$. Будем рассматривать процесс распространения акустической волны как процесс распространения слабых возмущений, накладываемых на конечные деформации среды [12, 17, 18].

Считаем, что в момент времени t_1 в упругой бесконечно протяженной среде возбуждается звуковая волна с полем перемещений $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, \tau)$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \mathbf{u}_1$, $\tau = t - t_1$. Вызываемые волной перемещения $\mathbf{u}_2$ и их градиенты полагаются бесконечно малыми. В момент времени $t > t_1$ перемещения точек среды представляются как сумма

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t_1) + \mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, \tau) \quad \forall t > t_1, \quad (1.4)$$

а тензор деформаций Коши–Грина $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2$, где $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}_1 \cdot (\nabla \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \nabla) \cdot \boldsymbol{\Phi}_1^T$.

Из уравнений движения сплошной среды, записанных в эйлеровой форме для момента времени $t > t_1$ при отсутствии массовых сил $\nabla \cdot \mathbf{S} = \rho_1 (\ddot{\mathbf{u}}_1 + \ddot{\mathbf{u}}_2)$, после преобразований получим динамическое уравнение «в перемещениях» в виде

$$J_1^{-1} \Phi_1 \cdot (\nabla \epsilon_2 \cdots \mathbf{C}(\epsilon_1)) \cdot \Phi_1 + \mathbf{S}_1 \cdot \nabla \nabla \mathbf{u}_2 + \mathbf{S}_1 \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_2) = \rho_1 \ddot{\mathbf{u}}_2, \quad (1.5)$$

где $\Phi_1 = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}_1$ — аффинор деформаций в момент времени t_1 , $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}$ — набла-оператор деформированного состояния, $J_1 = \det \Phi_1$, $\mathbf{S}_1 = J_1^{-1} \Phi_1^T \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \Phi_1$ — тензор истинных напряжений в момент t_1 , $\mathbf{T}_1$ — второй тензор Пиолы–Кирхгоффа, определяемый соотношением (1.3) при $\epsilon = \epsilon_1$, $\mathbf{C}(\epsilon_1) = \mathbf{N} + \epsilon_1 \cdot \mathbf{L}$ — обобщенный тензор жесткости материала.

Пусть перемещения $\mathbf{u}_2$ определены для плоской монохроматической волны, тогда они имеют вид

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, \tau) = A \exp(i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_1 + \omega\tau)), \quad (1.6)$$

где A — амплитуда, $\mathbf{p}$ — единичный вектор поляризации, k — волновое число, ω — частота, $\mathbf{n}$ — единичный вектор волновой нормали.

Вычисляя входящие в (1.5) производные перемещений (1.6), запишем уравнения распространения плоской монохроматической волны в виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p}, \quad (1.7)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{M}(\mathbf{n}, \epsilon_1) \cdot \mathbf{F}_1 + \Sigma_1 \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} \mathbf{E} + \Sigma_1 \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}$ — акустический тензор среды с предварительными деформациями ϵ_1 , $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \epsilon_1) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(\epsilon_1) \cdot \mathbf{n}$ — обобщенный тензор Кристоффеля, определяемый как свойствами материала, так и направлением распространения волны, $\mathbf{F}_1 = \Phi_1^T \cdot \Phi_1$ — мера конечных деформаций Фингера, $\Sigma_1 = J_1 \mathbf{S}_1$ — обобщенный тензор истинных напряжений, $c = \omega/k$ — фазовая скорость распространения волны.

Из уравнений (1.7) следует, что значение $\rho_0 c^2$ является собственным значением акустического тензора $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \epsilon_1)$, а вектор поляризации — его собственным вектором. При заданных предварительных деформациях скорости распространения плоских монохроматических волн определяются через акустический тензор (1.7), что может быть использовано для определения констант модели нелинейного анизотропного материала с упругим потенциалом (1.1).

3. Определение констант модели нелинейного кубического материала по скоростям распространения акустических волн

В качестве примера рассмотрим возможную программу динамических экспериментов, которые необходимо провести для определения констант модели кубического материала, предложенной в работе [15]. В этой работе тензоры $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$, входящие в определяющие соотношения (1.3), предлагалось представить разложениями по собственным базисным тензорам в виде

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^3 N_i \Omega^{(i)}, \quad \mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^6 b_\alpha \mathbf{B}^{(\alpha)}. \quad (2.1)$$

Собственные тензоры $\Omega^{(i)}$ и $\mathbf{B}^{(\alpha)}$ представляются через тензоры канонического базиса А.А. Ильюшина [15, 16], построенного в главных осях анизотропии материала:

$$\mathbf{I}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2),$$

$$\mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3);$$

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha),$$

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6} (\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha),$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 5$.

Для кубического материала собственные базисные тензоры четвертого ранга имеют вид

$$\mathbf{\Omega}^{(1)} = \mathbf{I}^{00}, \quad \mathbf{\Omega}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22}, \quad \mathbf{\Omega}^{(3)} = \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55},$$

а собственные базисные тензоры шестого ранга представляются соотношениями

$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022}, \quad \mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055},$$

$$\mathbf{B}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{I}^{111} - 3\mathbf{I}^{122}), \quad \mathbf{B}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155} - 2\mathbf{I}^{133}) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244}), \quad \mathbf{B}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{I}^{345}.$$

Константы $N_{(i)}$ и $b_{(\alpha)}$ из соотношений (2.1) связаны с классическими константами упругости второго $C_{\alpha\beta}$ и третьего $C_{\alpha\beta\gamma}$ порядков соответственно:

$$n^{(1)} = C_{11} + 2C_{12}, \quad n^{(2)} = C_{11} - C_{12}, \quad n^{(3)} = 2C_{44}, \quad (2.2)$$

$$b_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} (C_{111} + 6C_{112} + C_{123}), \quad b_2 = 2\sqrt{3} (C_{111} - C_{123}), \quad b_3 = 4\sqrt{3} (C_{144} + 2C_{155}),$$

$$b_4 = 2 (C_{111} - 3C_{112} + 2C_{123}), \quad b_5 = 12 (C_{155} - C_{144}), \quad b_6 = 48C_{456}, \quad (2.3)$$

В соответствии с определяющими соотношениями (1.3) тензор энергетических напряжений в кубическом материале представляется выражением

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 N_i \mathbf{\Omega}^{(i)} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^6 b_\alpha \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{B}^{(\alpha)} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.4)$$

а обобщенный тензор жесткости для кубического материала имеет вид

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \sum_{i=1}^3 N_i \mathbf{\Omega}^{(i)} + \sum_{\alpha=1}^6 b_\alpha \mathbf{B}^{(\alpha)} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1. \quad (2.5)$$

На основании (2.4) и (2.5) в случае плоской монохроматической волны получены выражения для обобщенного тензора Кристоффеля $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)$ и акустического тензора $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)$ через константы модели $N_{(i)}$ и $b_{(\alpha)}$ для произвольных предварительных деформаций и произвольно-го вектора волновой нормали. С целью определения констант предлагается рассмотреть два вида предварительных деформаций и определенные направления распространения волн.

Рассмотрим два призматических образца, ребра которых по-разному ориентированы относительно главных осей анизотропии кубического материала, ориентированных вдоль единичных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ (рис. 1). В образце I ребра призмы параллельны главным осям анизотропии, а в образце II — повернуты относительно главных осей так, что $\mathbf{a}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$, $\mathbf{a}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)$, $\mathbf{a}'_3 = \mathbf{a}_3$.

В образце II в недеформированном состоянии возбуждается звуковая волна с вектором волновой нормали $\mathbf{n} = \mathbf{a}'_1$, параллельным его ребру. Поскольку предварительные деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{0}$, напряжения $\mathbf{T}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_1 = \mathbf{0}$, тензор Кристоффеля и акустический тензор совпадают:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} = \frac{2N_{(1)} + 4N_{(2)} + 3N_{(3)}}{12} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2) + \frac{2N_{(1)} - 2N_{(2)} + 3N_{(3)}}{12} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) + \frac{N_{(3)}}{2} \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3. \quad (2.6)$$

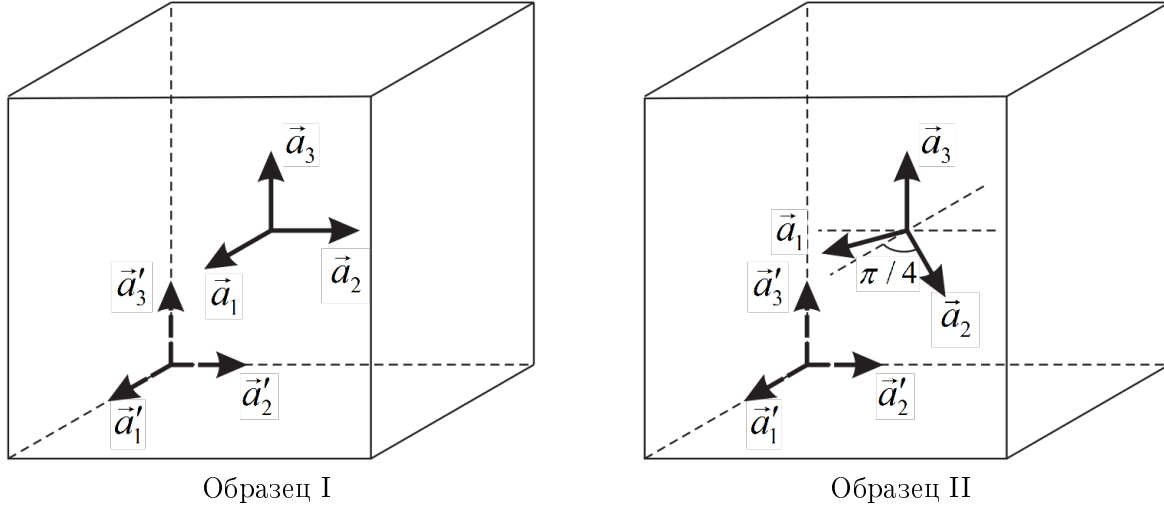


Рис. 1: Ориентация осей анизотропии в призматических образцах

Главные векторы и главные значения тензора (2.6) определяют три вектора поляризации $\mathbf{p}_{(i)}$ и скорости распространения трех волн $c_{(i)}$ в рассматриваемом образце:
продольная волна

$$\mathbf{p}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2), \quad \rho_0 c_{(1)}^2 = \frac{1}{6} (2N_{(1)} + N_{(2)} + 3N_{(3)});$$

поперечные волны

$$\mathbf{p}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1), \quad \rho_0 c_{(2)}^2 = \frac{N_{(2)}}{2}; \quad (2.7)$$

$$\mathbf{p}_{(3)} = \mathbf{a}_3, \quad \rho_0 c_{(3)}^2 = \frac{N_{(3)}}{2}.$$

Из трех соотношений (2.7) по измеренным фазовым скоростям $c_{(1)}$, $c_{(2)}$, $c_{(3)}$ определяются константы второго порядка $N_{(1)}$, $N_{(2)}$, $N_{(3)}$.

Для определения констант третьего порядка $b_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ в обоих образцах требуется создать предварительное деформированное состояние двухосного растяжения-сжатия в плоскости одной из граней призмы, например, описываемое аффинорами деформаций

для образца I

$$\Phi_1^I = \lambda \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \frac{1}{\lambda} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3, \quad (2.8)$$

для образца II

$$\Phi_1^{II} = \lambda \mathbf{a}'_1 \mathbf{a}'_1 + \frac{1}{\lambda} \mathbf{a}'_2 \mathbf{a}'_2 + \mathbf{a}'_3 \mathbf{a}'_3. \quad (2.9)$$

Соответствующие тензоры деформаций в главных осях анизотропии материала имеют вид

$$\epsilon_1^I = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2, \quad (2.10)$$

$$\epsilon_1^{II} = \frac{1}{4} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2) + \frac{1}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1). \quad (2.11)$$

В образцах с предварительными деформациями (2.10), (2.11) возбуждается звуковая волна с вектором волновой нормали $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$ в направлении нулевых деформаций. Подставляя тензоры (2.10), (2.11) в выражения (2.5) и (1.7), вычислим обобщенный тензор Кристоффеля

для образца I

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^I = & \left[\frac{N_{(3)}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{36} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 b_{(3)} + \frac{1}{36} \left(\lambda^2 - \frac{2}{\lambda^2} + 1 \right) b_{(5)} \right] \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \\ & + \left[\frac{N_{(3)}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{36} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 b_{(3)} - \frac{1}{36} \left(2\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) b_{(5)} \right] \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \\ & + \left[\frac{N_{(1)} + 2N_{(2)}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{18} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 b_{(1)} - \frac{1}{18} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 b_{(4)} \right] \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3, \end{aligned} \quad (2.12)$$

для образца II

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{II} = & \left[\frac{N_{(3)}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{36} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 b_{(3)} - \frac{1}{72} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 b_{(5)} \right] (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2) + \\ & + \frac{1}{48} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) b_{(6)} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) + \\ & + \left[\frac{N_{(1)} + 2N_{(2)}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{18} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 b_{(1)} - \frac{1}{18} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 b_{(4)} \right] \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Отметим, что главные оси тензоров Кристоффеля (2.12) и (2.13) совпадают с векторами, направленными вдоль ребер соответствующего образца.

Для определения акустического тензора (1.7) в образцах I и II требуется найти напряжения в момент $t = t_1$. Можно показать, что при деформациях, задаваемых аффинорами (2.8), (2.9), для рассматриваемого направления распространения волны акустический тензор $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)$ зависит только от напряжений $\Sigma_{nn} = T_{nn}$, действующих на гранях образцов, перпендикулярных вектору волновой нормали. В соответствии с определяющими соотношениями (2.4) и выражениями для деформаций (2.10), (2.11) выражения для напряжений имеют вид:

в образце I

$$\begin{aligned} T_{nn}^I = & \frac{1}{6} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 (N_{(1)} - N_{(2)}) + \\ & + \frac{\sqrt{3}}{72} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^4 b_{(1)} + \frac{\sqrt{3}}{36} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 b_{(2)} - \frac{1}{72} \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right)^2 + 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] b_{(4)}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

в образце II

$$\begin{aligned} T_{nn}^{II} = & \frac{1}{6} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 (N_{(1)} - N_{(2)}) + \\ & + \frac{\sqrt{3}}{72} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^4 b_{(1)} - \frac{\sqrt{3}}{144} \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right)^2 - 4 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] b_{(2)} + \\ & + \frac{\sqrt{3}}{144} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right)^2 b_{(3)} + \frac{1}{144} \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right)^2 - 4 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] b_{(4)} - \frac{1}{72} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right)^2 b_{(5)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В рассматриваемых образцах одинаковое деформированное состояние различным образом ориентировано относительно главных осей анизотропии кубического материала. Это приводит к различиям в напряжениях, вычисляемых по формулам (2.14) и (2.15). Эти различия носят второй порядок малости, а в случае, когда все коэффициенты $b_{(\alpha)} = 0$, напряжения $T_{nn}^I = T_{nn}^{II}$.

На основании соотношений (2.8)–(2.15) получены выражения для компонент акустического тензора в образцах I и II, и решены задачи об определении их главных значений и главных векторов. Результатом решения этой задачи являются векторы поляризации $\mathbf{p}_{(i)}$ и скорости распространения волн $c_{(i)}$ для случая, когда вектор волновой нормали $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$.

В образце I распространяются:

продольная волна

$$\mathbf{p}_{(1)}^I = \mathbf{a}_3, \quad \rho_0 \left(c_{(1)}^I \right)^2 = M_{(1)}^I + 2T_{nn}^I;$$

поперечные волны

$$\mathbf{p}_{(2)}^I = \mathbf{a}_1, \quad \rho_0 \left(c_{(2)}^I \right)^2 = \lambda^4 M_{(2)}^I + T_{nn}^I; \quad (2.16)$$

$$\mathbf{p}_{(3)}^I = \mathbf{a}_2, \quad \rho_0 \left(c_{(3)}^I \right)^2 = \frac{1}{\lambda^4} M_{(3)}^I + T_{nn}^I,$$

где $M_{(1)}^I = M_{33}^I$, $M_{(2)}^I = M_{11}^I$, $M_{(3)}^I = M_{22}^I$ — главные значения тензора Кристоффеля $\mathbf{M}^I$, вычисляемого по формуле (2.12).

В образце II распространяются:

продольная волна

$$\mathbf{p}_{(1)}^{II} = \mathbf{a}_3, \quad \rho_0 \left(c_{(1)}^{II} \right)^2 = M_{(1)}^{II} + 2T_{nn}^{II};$$

поперечные волны

$$\mathbf{p}_{(2)}^{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2), \quad \rho_0 \left(c_{(2)}^{II} \right)^2 = \lambda^4 M_{(2)}^{II} + T_{nn}^{II}; \quad (2.17)$$

$$\mathbf{p}_{(3)}^{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1), \quad \rho_0 \left(c_{(3)}^{II} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^4} M_{(3)}^{II} + T_{nn}^{II},$$

где $M_{(1)}^{II} = M_{33}^{II}$, $M_{(2)}^{II} = M_{11}^{II} + M_{12}^{II}$, $M_{(3)}^{II} = M_{11}^{II} - M_{12}^{II}$ — главные значения тензора Кристоффеля $\mathbf{M}^{II}$, вычисляемого по формуле (2.13).

По измеренным скоростям распространения продольных $c_{(1)}^I$, $c_{(1)}^{II}$ и поперечных $c_{(2)}^I$, $c_{(2)}^{II}$, $c_{(3)}^I$, $c_{(3)}^{II}$ волн из шести соотношений (2.16), (2.17) могут быть определены значения шести констант модели третьего порядка $b_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, 6$, для кубического материала.

4. Численное моделирование экспериментов по идентификации модели кубического материала

Рассмотрим кубический кристалл ниобия ($\rho_0 = 8750 \text{ кг/м}^3$), для которого в работе [9] приведены значения упругих констант второго и третьего порядков. Константы модели $N_{(i)}$ и $b_{(\alpha)}$ определяются из выражений (2.2) и (2.3) и имеют значения (в ГПа): $N_{(1)} = 509$, $N_{(2)} = 113$, $b_{(1)} = -11900$, $b_{(2)} = -72500$, $b_{(3)} = -1170$, $b_{(4)} = -148$, $b_{(5)} = 525$, $b_{(6)} = 1160$.

Для рассматриваемых процессов предварительного деформирования численно решается задача об определении главных значений акустического тензора $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)$ для различных направлений волнового вектора. На рис. 2-4 представлены сечения поверхностей фазовых скоростей [13] упругих волн плоскостями, различным образом ориентированными относительно главных осей анизотропии материала. Представленные кривые являются годографами векторов $c_{(i)}\mathbf{n}$ и характеризуют угловые зависимости фазовых скоростей в различных плоскостях. На рис. 2 и 3 построены сечения поверхностей фазовых скоростей для среды, в которой предварительные деформации задаются тензором $\boldsymbol{\varepsilon}_1^I$ (2.11), при значениях параметра $\lambda_0 = 1, 0$, $\lambda_1 = 1, 02$, $\lambda_2 = 1, 04$, $\lambda_3 = 1, 06$. Для волн, фазовые скорости которых приведены на рис. 2, вектор волновой нормали расположен в плоскости грани $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_2$, а на рис. 3

приведены кривые, для которых $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_3$. На рис. 4 приведены сечения поверхностей фазовых скоростей для среды с предварительными деформациями ϵ_1^I (2.10) при тех же значениях параметра λ плоскостью, содержащей векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$: $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_3$.

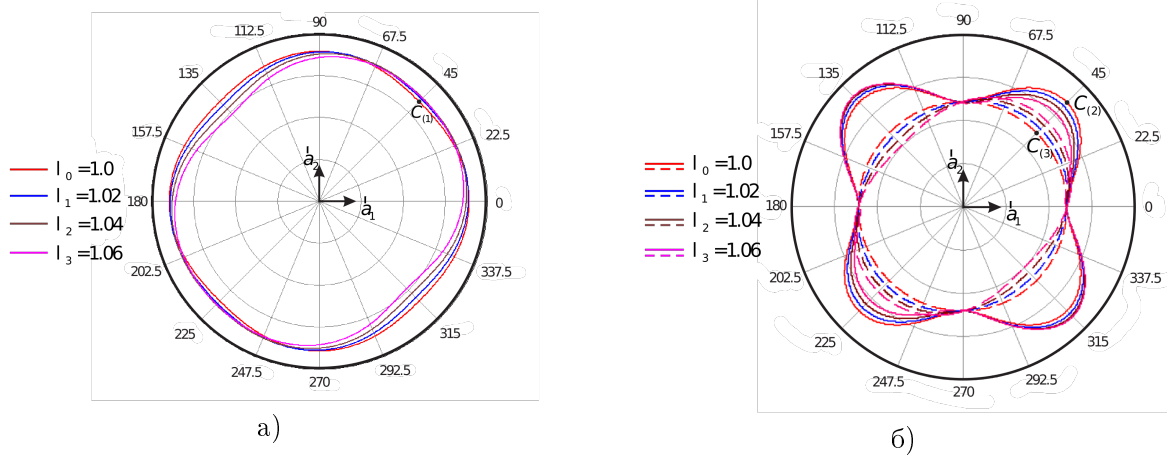


Рис. 2: Сечения поверхностей скоростей распространения продольных (а) и поперечных (б) волн при предварительной деформации ϵ_1^{II} , $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_2$

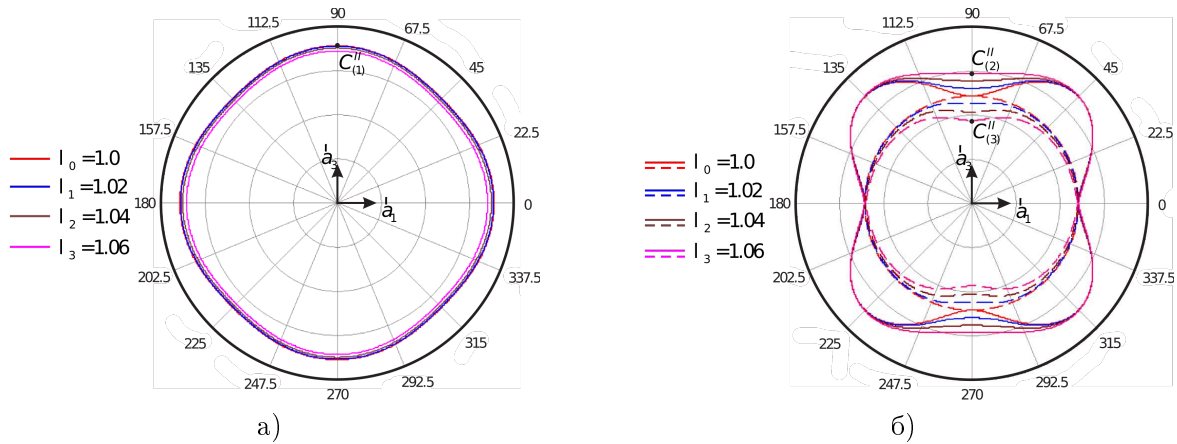


Рис. 3: Сечения поверхностей скоростей распространения продольных (а) и поперечных (б) волн при предварительной деформации ϵ_1^{II} , $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_3$

Точками на рисунках выделены значения фазовых скоростей, которые необходимо измерить для идентификации модели по соотношениям (2.7), (2.16), (2.17). Результаты, приведенные на рис. 2-4 показывают, что вид сечения фазовых скоростей зависит как от плоскости, в которой это сечение рассматривается, так и от вида предварительной деформации. С ростом предварительных деформаций сечения фазовых скоростей изменяют свою форму, а сами скорости уменьшаются в направлении растяжения и увеличиваются в направлении сжатия, что качественно соответствует известным результатам [3, 8].

5. Выводы

Полученные динамические уравнения (1.5), (1.7) позволяют описать распространение плоских монохроматических акустических волн в безграничной среде, упругие свойства которой в общем случае могут обладать анизотропией произвольного типа. Уравнения записаны для

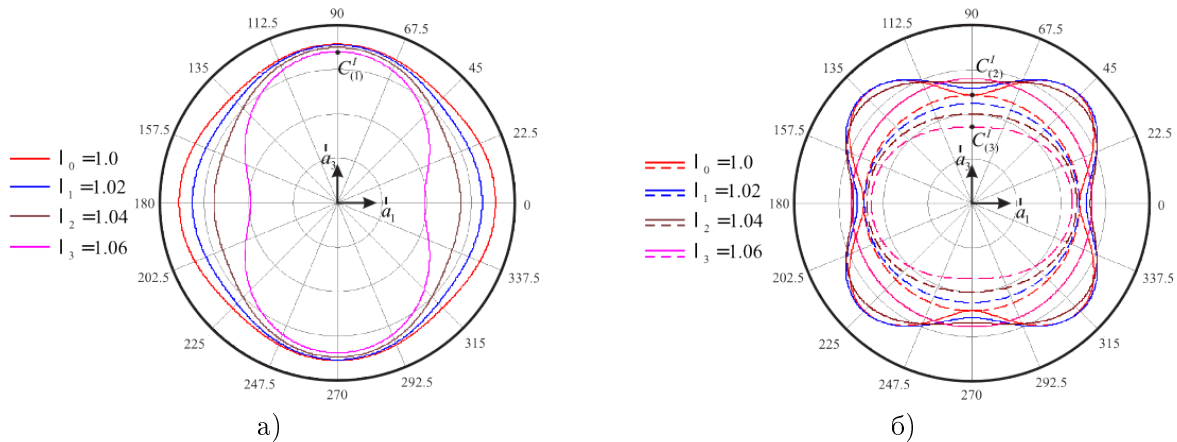


Рис. 4: Сечения поверхностей скоростей распространения продольных (а) и поперечных (б) волн при предварительной деформации ϵ_1^I , $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_3$

случая, когда упругий потенциал материала представляется в виде ряда по степеням тензора деформаций Коши–Грина с сохранением членов второго и третьего порядков, а предварительные деформации в среде полагаются однородными и конечными.

В качестве примера рассмотрен анизотропный материал с кубической симметрией упругих свойств, нелинейная модель которого представлена в работе [15]. Предложена программа экспериментов по измерению фазовых скоростей распространения акустических волн в призматических образцах из кубического материала, специальным образом ориентированных относительно главных осей анизотропии материала. В соответствии с этой программой требуется провести три эксперимента, в каждом из которых измеряются скорости распространения продольной и двух поперечных волн. По измерениям в образце без предварительных деформаций определяются три константы упругости второго материала, а по измерениям в двух образцах с предварительными деформациями растяжения-сжатия могут быть определены шесть констант упругости кубического материала третьего порядка.

Приведенные примеры расчетов фазовых скоростей распространения акустических волн для различных предварительных деформаций показывают, что степень предварительной деформации оказывает существенное влияние не только на величины фазовых скоростей, но и на вид сечений поверхностей скоростей распространения волн различными плоскостями.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thurston R.N., Brugger K. Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude waves in homogeneously stressed media // Phys. Rev. 1964. Vol 133. P. A1604–A1610.
2. Brugger K. Pure modes for elastic waves in crystals // J. Appl. Phys. 1965. Vol. 36, № 3. P. 759–768.
3. Eastman D.E. Measurement of third order elastic moduli of ittrium iron garnet // J. Appl. Phys. 1966. Vol. 37, № 6. P. 2312–2316.
4. Pham H. H., Cagin T. Lattice dynamics and second and third order elastic constants of iron at elevated pressures // Computers, materials and continua CMC. 2010. Vol. 16, № 2. P. 175–194.
5. Kube C.M., Turner J.A. Estimates of nonlinear elastic constants and acoustic nonlinearity parameters for textured polycrystals // Journal of Elasticity. 2016. Vol. 122, № 2. P. 157–177.

6. Kube C.M. Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion // J. Acoust. Soc. Am. 2017. Vol. 141, № 6.
7. Li X. First-principles study of the third-order elastic constants and related anharmonic properties in refractory high-entropy alloys // Acta Materialia. 2017. Vol. 142.
8. Telichko A.V., Erohin S.V., Kvashnin G.M., Sorokin P.B., Sorokin B.P., Blank V.D. Diamond's third-order elastic constants: ab initio calculations and experimental investigation // J. Mater. Sci. 2017. Vol. 52, № 6. P. 3447–3456.
9. Lubarda V.A. New estimates of the third-order elastic constants for isotropic aggregates of cubic crystals // J. Mech. Phys. Solids. 1997. Vol. 45, № 4. P. 471-490.
10. Zhang H., Lu D., Sun Y., Fu Y., Tong L. The third-order elastic constants and mechanical properties of 30° partial dislocation in germanium: A study from the first-principles calculations and the improved Peierls–Nabarro model // Crystals. 2022. Vol. 12, № 1. 4.
11. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями / В двух томах. Киев: Наукова Думка, 1986.
12. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
13. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 640 с.
14. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 388 с.
15. Соколова М.Ю., Христич Д.В. Конечные деформации нелинейно упругих анизотропных материалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 103-116.
16. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
17. Pau A., Vestroni F. The role of material and geometric nonlinearities in acoustoelasticity // Wave Motion. 2019. Vol. 86. P. 79-90.
18. Sokolova M., Astapov Y., Khristich D. Identification of the model of nonlinear elasticity in dynamic experiments // International Journal of Applied Mechanics. 2021. Vol. 13, № 2. 2150025.

REFERENCES

1. Thurston, R. N. & Brugger, K. 1964, “Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude waves in homogeneously stressed media“, *Phys. Rev.*, vol 133, pp. A1604–A1610.
2. Brugger, K. 1965, “Pure modes for elastic waves in crystals“, *J. Appl. Phys.*, vol. 36, no. 3, pp. 759-768.
3. Eastman, D.E. 1966, “Measurement of third order elastic moduli of ittrium iron garnet“, *J. Appl. Phys.*, vol. 37, no. 6, pp. 2312-2316.
4. Pham, H.H. & Cagin, T. 2010, “Lattice dynamics and second and third order elastic constants of iron at elevated pressures“, *Computers, materials and continua CMC*, vol. 16, no. 2, pp. 175-194.

5. Kube, C.M. & Turner, J.A. 2016, “Estimates of nonlinear elastic constants and acoustic nonlinearity parameters for textured polycrystals“, *Journal of Elasticity*, vol. 122, no. 2, pp. 157-177.
6. Kube, C.M. 2017, “Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion“, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 141, no. 6.
7. Li, X. 2017, “First-principles study of the third-order elastic constants and related anharmonic properties in refractory high-entropy alloys“, *Acta Materialia*, vol. 142.
8. Telichko, A.V., Erohin, S.V., Kvashnin, G.M., Sorokin, P.B., Sorokin, B.P. & Blank, V.D. 2017, “Diamond’s third-order elastic constants: ab initio calculations and experimental investigation“, *J. Mater. Sci.*, vol. 52, no. 6, pp. 3447–3456.
9. Lubarda, V.A. 1997, “New estimates of the third-order elastic constants for isotropic aggregates of cubic crystals“, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 45, no. 4, pp. 471-490.
10. Zhang, H., Lu, D., Sun, Y., Fu, Y. & Tong, L. 2022, “The third-order elastic constants and mechanical properties of 30° partial dislocation in germanium: A study from the first-principles calculations and the improved Peierls–Nabarro model“, *Crystals*, vol. 12, no. 1, 4.
11. Guz', A.N. 1986, “*Elastic waves in bodies with initial stresses*“, in two volumes, Naukova Dumka, Kiev, [in Russian].
12. Lurie, A.I. 2012, “*Non-linear theory of elasticity*“, North Holland.
13. Sirotnin, Yu. & Shaskolskaya, M. 1982, “*Fundamentals of crystal physics*“, Mir Publishers, Moscow, 656 p.
14. Fedorov, F.I. 1965, “*Theory of elastic waves in crystals*“, Nauka, Moscow, 388 p., [in Russian]
15. Sokolova, M.Yu. & Khristich, D.V. 2021, “Finite strains of nonlinear elastic anisotropic materials“, *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 70, pp. 103-116.
16. Markin, A.A. & Sokolova, M.Yu. 2015, “*Thermomechanics of elastoplastic deformation*“, Cambridge International Science Publishing, Cambridge.
17. Pau, A. & Vestroni, F. 2019, “The role of material and geometric nonlinearities in acoustoelasticity“, *Wave Motion*, vol. 86, pp. 79-90.
18. Sokolova, M., Astapov, Y. & Khristich, D. 2021, “Identification of the model of nonlinear elasticity in dynamic experiments“, *Int. J. Appl. Mech.*, vol. 13, no. 2, 2150025.

Получено: 11.04.2023

Принято в печать: 12.09.2023